Студ. V курса ХАИ
Тарапов И.Е.

Определение высоты фермы заданного пролета при минимальном весе фермы.

Задана ферма с параллельными поясами и нисходящими раскосами. Пролет фермы $L=(n-1)a$, где $2n$ — количество узлов фермы; a — длина панели решетки. Найти такую высоту фермы, чтобы вес ее был минимальным.

Допущение: вес заклепок и косынок фермы (дополнительных конструктивных элементов) в решении задачи не учитывается.

$n=2k+1$, где $k>a$ — любое целое число;

$L=(n-1)a=2ka$.

Реакции опор равны:

$$R=\frac{Pn}{2}=P\frac{2k+1}{2}.$$

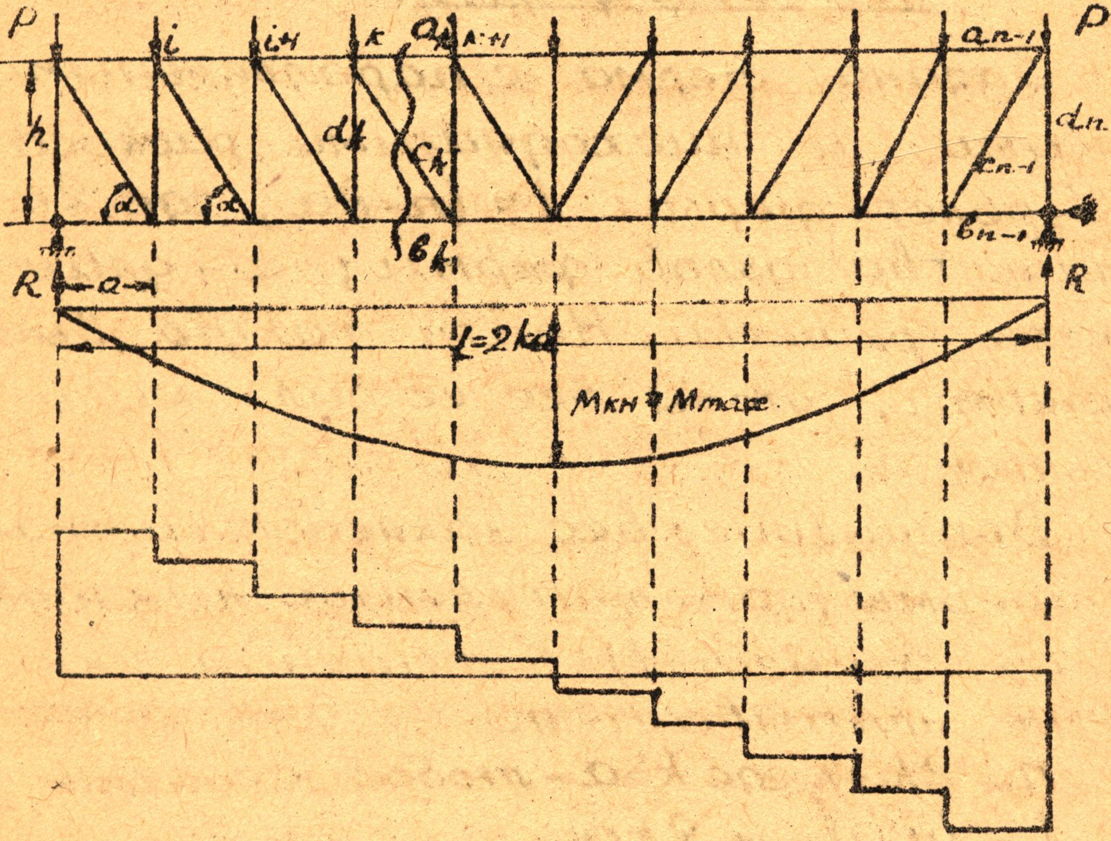
Задача состоит в составлении уравнения веса данной фермы и в исследовании его на extrema. Предполагается, что сечения стержней, работающих на одинаковые деформации, берется по сечению максимального стержня. Пояса загружены сильнее в средних пролетах, а стойки и раскосы — в крайних.

Изгибающий момент относительно $(i+1)$-го узла:

$$M_{i+1}=\frac{P(2k+1)}{2}ai-Pa[i+(i-1)+\ldots\ldots+$$

$$+2+1]=\frac{P(2k+1)}{2}ai-Pa\frac{i+1}{2}i=\frac{Pa}{2}(2ki+i-i^2-i);$$

$$M_{i+1}=\frac{Pa}{2}(2ki-i^2).$$



Докажем применимость метода индукции, т.е. что:

$$M_{(i+1)+1}=\frac{Pa}{2}\left[2k(i+1)-(i+1)^2\right]=M_{i+2}$$

Имеем очевидное равенство:

$$M_{i+2}=M_{i+1}-Pa+R_i a=M_{i+1}+a(R_i-P),$$

где $R_i=\frac{P(2k+1)}{2}-Pi=P(k-1+\frac{1}{2})$ – равнодействующая i сил.

Итак, $M_{i+2}=M_{i+1}+aP(k-1-\frac{1}{2})$.

Имеем: $M_{(i+1)+1}=\frac{Pa}{2}\left[2k(i+1)-(i+1)^2\right]=$

$$=\frac{Pa}{2}(2ki-i^2)+\frac{Pa}{2}(2k-2i-1)=$$

$= M_{i+1} + Pa\left(k - i - \frac{1}{2}\right)i$

т.е. $M_{(i+1)+1} = M_{i+2}$

Максимальный изгибающий момент, когда $i = k = \frac{n-1}{2}$:

$M_{max} = M_{k+1} + M_{k'+1} = \frac{Pa}{2}(2k^2 - k^2) = \frac{Pa}{2}k^2$

$M_k = M_{k'} = \frac{Pa}{2}(k^2 - 1)$, когда $i = k - 1$.

Перерезывающая сила:

$Q_{k+1} = P = Q_{k'+1}$

$Q_{max} = Q_0 = \frac{P(2k+1)}{2} - P = \frac{P(2k-1)}{2}$.

По известным соотношениям для фермы с параллельными поясами имеем:

$A_k = \frac{M_{k'+1}}{h} = \frac{M_{max}}{h} = \frac{Pak^2}{2h}$ (–) „max" усилие верхнего пояса (к-тый пролет);

$B_k = \frac{M_k}{h} = \frac{M_{k'}}{h} = \frac{Pa}{2h}(k^2 - 1)$ (+) – „max" усилие нижнего пояса (к-тый пролет)

$C_0 = \frac{Q_{max}}{\sin\alpha} = \frac{P(2k-1)}{2\sin\alpha}$ (+) „max" усилие в раскосах (1-й раскос);

$D_1 = Q_{max} = \frac{P(2k-1)}{2}$ (–) – „max" усилие в стойках (1-я стойка).

Искомое уравнение веса фермы:

$G = \gamma\left[L(F_a + F_b) + nhF_d + \frac{h}{\sin\alpha}(n-1)F_c\right]$, где:

γ – удельный вес материала.

Минимально-необходимые площади: F_a, F_b, F_d и F_c (соответственно верхнего пояса, нижнего пояса, стойки, раскоса) находим из уравнений прочности:

$$F_a = \frac{A_k}{\psi \sigma^a_{kp}} = \frac{Pak^2}{2h\psi} \cdot \frac{a^2}{\pi^2 E r_a^2} = \frac{Pa^3k^2}{2\psi\pi^2 E r_a^2} \cdot \frac{1}{h} = \frac{A}{h};$$

$$A = \frac{Pak^2}{2\psi \sigma^a_{kp}}$$

$$F_B = \frac{B_k}{\sigma_z} = \frac{Pa(k^2-1)}{2h\sigma_z} = \frac{B}{h};$$

$$B = \frac{Pa(k^2-1)}{2\sigma_z}$$

$$F_c = \frac{C_1}{\sigma_z} = \frac{P(2k-1)}{2\sigma_z \sin\alpha} = \frac{C}{\sin\alpha};$$

$$C = \frac{P(2k-1)}{2\sigma_z}$$

$$F_d = \frac{D_1}{\psi \sigma^d_{kp}} = \frac{P(2k-1)}{2\pi^2 E r_d^2 \psi} h^2 = Dh^2;$$

$$D = \frac{P(2k-1)}{2\pi^2 E \psi r_d^2}, \text{ где:}$$

σ_z – допускаемое напряжение для растяжения.

r_a – радиус инерции сечения верхнего пояса;

r_d – радиус инерции сечения стоек;

ψ – коэфициент запаса продольного изгиба.

Уравнение веса:

$$G = \gamma\left[L\frac{A+B}{h} + (2k+1)Dh^3 + \frac{2kC}{\sin^2\alpha}h\right];$$

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = 1 + \frac{a^2}{h^2};$$

$$G(h) = \gamma\left[L\frac{A+B}{h} + (2k+1)Dh^3 + 2kC\left(h + \frac{a^2}{h}\right)\right];$$

Для того, чтобы при $h = h_0$ $G(h)$ принимало min, необходимо и достаточно, чтобы: 1) $\left.\frac{\partial G}{\partial h}\right|_{h=h_0} = 0$; 2) $\left.\frac{\partial^2 G}{\partial h^2}\right|_{h=h_0} > 0$;

$$\frac{\partial G}{\partial h} = \gamma\left[-\frac{L(A+B)}{h^2} + 3D(2k+1)h^2 + 2kC -\right.$$

$-\frac{2kCa^2}{h^2}\Big] = 0$.

Считаем, что $h \neq 0$; при $h=0$ может быть extreme $G(h)$, но в этом тривиальном случае теряется физический смысл задачи (высота фермы равна нулю)

Поэтому, умножая предыдущее равенство на $\frac{h^2}{\gamma}$ $(\gamma \neq 0)$, получим:

$$3D(2k+1)h^4 + 2kCh^2 - [L(A+B) + 2kCa^2) = 0.$$

Или: $$h^4 + \frac{2kC}{3D(2k+1)}h^2 - \frac{L(A+B)+2kCa^2}{3D(2k+1)} = 0.$$

$h^4 + mh^2 - n = 0$. $m>0$; $n>0$, т.к m и n – существенно положительны.

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial G}{\partial h}h^2 = h^4 + mh^2 - n.$$

Покажем, что $\operatorname{sign}\frac{\partial^2 G}{\partial h^2}\Big|_{h=h_0} = \operatorname{sign}\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial G}{\partial h}\cdot h^2\right)\Big|_{h=h_0}$.

$$\operatorname{sign}\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial G}{\partial h}\cdot h^2\right)\Big|_{h=h_0} = \operatorname{sign}\left[\left(\frac{\partial^2 G}{\partial h^2}h^2\right)\Big|_{h=h_0} + \left(\frac{\partial G}{\partial h}2h\right)\Big|_{h=h_0}\right] = \operatorname{sign}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial h^2}\right)\Big|_{h=h_0}\cdot h_0^2 =$$
$$= \operatorname{sign}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial h^2}\right)\Big|_{h=h_0} \Big/ \text{учитывая, что } \left(\frac{\partial G}{\partial h}\right)_{h=h_0} = 0 \Big/.$$

Т.к. нас интересует вещественный и положительный корень, h_0 уравнения $\frac{\partial G}{\partial h} = 0$, то если h_0 (вещественный) существует, то $h_0 > 0$.

Поэтому, т.к. для min (для достаточности) надо: $\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial G}{\partial h}\cdot h^2\right)\Big|_{h=h_0} > 0$, т.е. $4h_0^3 + 2h_0 m > 0$, то это условие выполнено, ибо $h_0 > 0$ и $m > 0$.

Исследуем уравнение: $h^4 + mh^2 - n = 0$.

Число перемен знаков в ряду коэфициентов $\nu=1$; по теореме Декарта, число положительных корней ур-ия или равно ν, или на четное число меньше. Очевидно, что существует один положительный корень. Его точная формула для вычисления:

$$k_0=\sqrt{-\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{m^2}{4}+n}}\ , \quad \text{где:}$$

$$m=\frac{2kC}{3D(2k+1)}=\frac{2kP(2k-1)\,2\pi^2 E r_a^2\psi}{3(2k+1)\,2\sigma_z\,P(2k-1)}=$$

$$=\frac{2\pi^2}{3}\cdot\frac{k}{2k+1}\cdot\frac{E}{\sigma_z}\cdot r_a^2\,\psi;$$

$$n=\frac{L(A+B)+2kCa^2}{3D(2k+1)};$$

$L=2ka$; $\quad A=\frac{Pak^2}{2\psi\sigma_{кр}}$, где $\sigma_{кр}$ - критическое напряжение продольного изгиба, принятое постоянным в панелях верхнего пояса; ψ - коэфициент запаса продольного изгиба.

$$B=\frac{Pa(k^2-1)}{2\sigma_z};$$

$$C=\frac{P(2k-1)}{2\sigma_z};$$

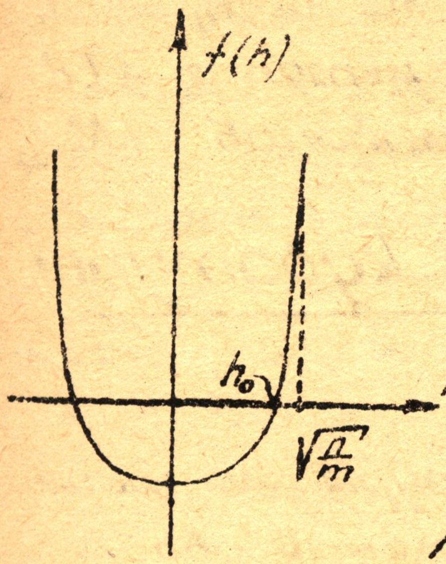
$$D=\frac{P(2k-1)}{2\pi^2 E\psi r_a^2};$$

Размерности: $[m]-l^2$, где l - размерность длины; $[n]-l^4$.

Для приближенного нахождения укажем формулу.

Имеем. $f(h)=h^4+mh^2-n=0$.

т.к. $f(0)<0$, а $f\left(\sqrt{\frac{n}{m}}\right)>0$, то $0<h_0<\sqrt{\frac{n}{m}}$



Вследствие крутого хода параболы можно очевидно принять $h_0 \approx \sqrt{\frac{n}{m}}$

$$\frac{n}{m} = \frac{L(A+B)}{2Kc} + a^2 =$$

$$= \frac{L\left(\frac{Pak^2}{2\psi\sigma^a_{kp}} + \frac{Pa(k^2-1)}{2\sigma_z k}\right)}{2k\,\frac{P(2k-1)}{2\sigma_z}} + a^2$$

После преобразований получаем:

$$\frac{n}{m} = \frac{L^2}{4k^2}\left[\frac{k^2\sigma_z+(k^2+2k-2)\psi\sigma^a_{kp}}{(2k-1)\psi\sigma^a_{kp}}\right]$$

Учитывая $\frac{L}{2k}=a$, окончательно имеем:

$$h_0 = a\sqrt{\frac{k^2\sigma_z+(k^2+2k-2)\psi\sigma^a_{kp}}{(2k+1)\psi\sigma^a_{kp}}}$$

Размерность $[h_0]=[a]=l$

<u>Пример:</u>

$\sigma_z = 1400$ кг/см²

$\frac{l}{i} = 100$

$\psi\sigma^a_{kp} = 840$ кг/см²

$k=5$

$$h_0 = a\sqrt{\frac{25\cdot 1400+(25+10-2)\cdot 840}{11\cdot 840}} = 2{,}6a$$

$$\frac{h_0}{b} \approx \frac{2{,}6a}{2\cdot 5a} = 0{,}26$$