Студент V курс.
самолетостроит.
факультета XIII
Балабанов П.М.

Механические кубатуры

Введение.

Механические кубатуры или формулы приближенного вычисления двойных интегралов имеют большое значение для инженерной практики. Особенно это имеет место в авиации, где вес, вычисление которого сводится к вычислению   объемов и площадей деталей, определяет в значительной степени летные качества самолета. Книга Стефенсена „Теория интерполяции" в некоторой степени освещает этот вопрос, но к сожалению формулы, выведенные Стефенсеном, почти не имеют практического значения.

Эта работа, в которой использованы и расширены результаты Стефенсена, представляет собой попытку дать возможно более общее практическое решение задачи вычисления двойного интеграла.

Задача вычисления двойного интеграла решается следующим образом: вначале рассматривается вопрос сведения интеграла по произвольной плоской области к интегралу с постоянными пределами, затем, воспользовавшись некоторыми формулами, выведенными Спкфенсеном, останавливаемся подробно на вычислении интеграла с постоянными пределами, далее рассматриваем отдельно вопрос вычисления интегралов, распространенных по кругу. В заключение дается метод оценки погрешности выведенных формул.

Приведение интеграла, распространенного по произвольной области, к интегралу с постоянными пределами.

Наиболее простой случай вычисления интеграла имеет место тогда, когда пределы интегрирования постоянны. Поэтому естественным является решение общей задачи путем сведения интеграла по произвольной области к интегралу с постоянными пределами.

Предварительно рассмотрим случай области, которая ограничена двумя координатными линиями и непрерывной кривой, уравнение которой представляет собой однозначную функцию по отношению к одному из переменных. Пусть $U = \varphi(V)$ где U и V какие либо координаты. Произведем следующую замену переменных: $v = v$, $u = \eta^k \psi(v) \ldots (k>1)$; $\psi = (v)$ выберем из условия при $\eta = \eta_0$. $u = \varphi(v)$ тогда:

$$\varphi(v) = \eta_0^k \psi(v) \quad \text{и} \quad \psi(v) = \frac{1}{\eta_0^k} \cdot \varphi(v),$$

следовательно:

$$u = \frac{\eta^k}{\eta_0^k} \varphi(v) \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Якобиан будет равен: $$J = \frac{\eta^{k-1}}{\eta_0^k} \varphi(v) \ldots \quad (2)$$

В случае, когда область ограничена двумя кривыми $u = \varphi_1(v)$ и $u = \varphi_2(v)$ производим замену переменных следующим образом:

$$u = \frac{(\eta_0^k - \eta^k)\varphi_1(v) + \eta^k \varphi_2(v)}{\eta_0^k} \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Якобиан будет равен:

$$J = \frac{[\varphi_2(v) - \varphi_1(v)]\eta^{k-1}}{\eta_0^k} \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Интегралы, распространенные по прямоугольной области.

Выведем формулу "касательных плоскостей". Разобьем прямоугольник на mn равных частей, выберем в каждой части некоторую точку (ξ_k η_e) и в точке поверхности, соответствующей (ξ_k η_e) построим касательную плоскость.

Очевидно это эквивалентно замене функции, выражающей поверхность усеченным рядом Тейлора, где членами порядка, начиная со второго, пренебрегаем. Мы будем иметь:

$$f(x,y) \cong f(\xi_k, \eta_e) + (x-\xi_k)\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_k \eta_e) +$$
$$+ (y-\eta_e)\frac{\partial f}{\partial y}(\xi_k \eta_e)$$

Определим объем полученного тела:

$$\int_0^q\int_0^h f(x,y)\,dx\,dy \cong \int_0^q\int_0^h f(\xi_k \eta_e)\,dx\,dy +$$
$$+ \int_0^q\int_0^h (x-\xi_k)\frac{\partial f(\xi_k \eta_e)}{\partial x}\,dx\,dy +$$
$$+ \int_0^q\int_0^h (y-\eta_e)\frac{\partial f(\xi_k \eta_e)}{\partial y}\,dx\,dy = \frac{hqf(\xi_k \eta_e)}{\partial y} +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_k \eta_e)\frac{q}{2}\left[(h-\xi_k)^2 - \xi_k^2\right] +$$
$$+ \frac{\partial f(\xi_k \eta_e)}{\partial y}\frac{h}{2}\left[(q-\eta_e)^2 - \eta_e^2\right]$$

Выберем теперь ξ_k и η_e таким образом, чтобы второй и третий члены правой части обратились в нуль, т.е.

$$\eta- \quad (h-\xi_k)^2 - \xi_k^2 = 0 \quad \text{и} \quad (q-\eta_e)^2 - \eta_e^2 = 0$$

$$h^2 - 2h\xi_k + \xi_k^2 - \xi_k^2 = 0 \qquad \xi_k = \frac{h}{2}$$

аналогично $\quad \eta_e = \frac{q}{2}$

Выберем теперь точки деления таким образом, чтобы они совпадали с нашими ξ_k и η_c, тогда получим

$$\int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x,y)\,dx\,dy = hq f(0,0)$$

Просуммировав по всем частям деления получим:

$$\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \frac{b-a}{m}\,\frac{d-c}{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f\left[\frac{(b-a)}{m}\,\frac{2i-1}{2},\ \frac{d-c}{n}\,\frac{2k-1}{2}\right] \ldots (5)$$

Эта формула незамкнутого типа, т.к. крайние апликаты, имеющие либо абсциссы „а" и „в", либо ординаты „в" и „с" не входят в формулу.

Исходя из интерполяционной формулы Лагранжа для функции двух переменных можно вывести бесчисленное множество формул аналогичным формулам Котеса для функции одной переменной. Мы здесь выведем две формулы, формулу типа „Трапеция - Трапеция" и формулу типа „Симпсон - Симпсон."

Формула Лагранжа для функции двух переменных пишется в виде:

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{z}\sum_{k=1}^{s} \frac{P_i(x)}{P_i(x_i)}\,\frac{\bar{P}_k(y)}{P_k(y_k)}\, f(x_i, y_k)$$

где:

$$P(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_z)$$

$$\bar{P}(y) = (y-y_0)(y-y_1)\ \ldots\ (y-y_s)$$

$$P_i(x) = \frac{P(x)}{x-x_i} \qquad \bar{P}_k(y) = \frac{\bar{P}(y)}{y-y_k}$$

Для $r=s=1$ получим функцию линейную относительно x и относительно y. При замене поверхности, опирающейся на выделенный прямоугольник, поверхностью, которая выражается указанным полиномом, получим при интегрировании формулу типа „Трапеция-Трапеция". И аналогично для $r=s=2$ получим формулу типа „Симпсон-Симпсон." Для $r=s=1$ получим:

$$f(x,y) = \frac{(x-x_1)(y-y_1)}{(x_0-x_1)(y_0-y_1)} f(x_0,y_0) + \frac{(x-x_0)(y-y_1)}{(x_1-x_0)(y_0-y_1)} f(x_1,y_0) +$$

$$+ \frac{(x-x_1)(y-y_0)}{(x_0-x_1)(y_1-y_0)} f(x_0,y_1) + \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{(x_1-x_0)(y_1-y_0)} f(x_1,y_1)$$

Положим $x_0=0$ $x_1=h$ $y_0=0$ $y_1=q$

тогда получим:

$$\int_0^q\int_0^h f(x,y)\,dx\,dy = \frac{f(0,0)}{hq}\int_0^q\int_0^h (h-x)(q-y)\,dx\,dy +$$

$$+ \frac{f(h,0)}{hq}\int_0^q\int_0^h x(q-y)\,dx\,dy + \frac{f(0,q)}{hq}\int_0^q\int_0^h (h-x)y\,dx\,dy +$$

$$+ \frac{f(h,q)}{hq}\int_0^q\int_0^h xy\,dx\,dy = \frac{qh}{4} f(0,0) + \frac{qh}{4} f(h,0) +$$

$$+ \frac{qh}{4} f(0,q) + \frac{qh}{4} f(h,q) =$$

$$= \frac{qh}{4}\left[f(0,0) + f(h,0) + f(0,q) + f(h,q)\right]$$

Суммируя по всем ik-тым прямоугольникам найдем:

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{4}\,\frac{b-a}{m}\,\frac{d-c}{n}\Big\{f(a,c)+f(b,c)+$$

$$+f(a,d)+f(b,d)+2\Big[\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n-1} f\Big(\frac{b-a}{m}i,\,c\Big)+f\Big(\frac{(b-a)}{m}i;\,d\Big)+$$

$$+f\Big(a,\,\frac{d-c}{n}k\Big)+f\Big(b,\,\frac{d-c}{n}k\Big)\Big]+4\sum_{i=2}^{m-2}\sum_{k=2}^{n-2} f\Big(\frac{b-a}{m}i;\,\frac{d-c}{n}k\Big)\Big\}\ldots(7)$$

Если в формуле Лагранжа положим $r=s=2$; и $x_0=-h$; $x_1=0$; $x_2=h$;
$y_0=-q$; $y_1=0$; $y_2=q$ и то $f(x,y)$ получит выражение:

$$f(x,y)\cong\Big[\frac{x(x-h)}{2h^2}f(-h,-q)+\frac{(x-h)(x+h)}{-h^2}f(0,-q)+$$

$$+\frac{x(x+h)}{2h^2}f(h,-q)\Big]\frac{q(y-q)}{2q^2}+\Big[\frac{x(x-h)}{2h^2}f(-h,0)+$$

$$+\frac{(x-h)(x+h)}{-h^2}f(0,0)+\frac{x(x+h)}{2h^2}f(h,0)\Big]\frac{(y+q)(y-q)}{-q^2}+$$

$$+\Big[\frac{x(x-h)}{2h^2}f(-h,q)+\frac{(x-h)(x+h)}{-h^2}f(0,q)+$$

$$+\frac{x(x+h)}{2h^2}f(h,q)\Big]\frac{q(y+q)}{2q^2};$$

$$\int_{-q}^{q}\int_{-h}^{h} f(x,y)\,dx\,dy=\Big[\frac{h}{3}f(-h,-q)+\frac{4h}{3}f(0,-q)+$$

$$+\frac{h}{3}f(h,-q)\Big]\frac{q}{3}+\Big[\frac{h}{3}f(-h,0)+\frac{4}{3}h\,f(0,0)+\frac{h}{3}f(h,0)\Big]\frac{4q}{3}+$$

$$+\left[\frac{h}{3}f(-h,q)+\frac{4h}{3}f(0,q)+\frac{h}{3}f(h,q)\right]\frac{q}{3};$$

Затем суммируя по всей прямоугольной области получим:

$$\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy \cong \frac{b-a}{2m}\,\frac{d-c}{2n}\,\frac{1}{9}\Big\{f(a,c)+f(a,d)+$$

$$+f(b,d)+4\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\Big\{f\left[\frac{b-a}{2m}(2i-1),c\right]+f\left[\frac{b-a}{2m}(2i-1),d\right]+$$

$$+f\left[a,\frac{d-c}{2n}(2k-1)\right]+f\left[b,\frac{d-c}{2n}(2k-1)\right]\Big\}+$$

$$+2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n-1}\Big\{f\left[\frac{b-a}{2m}2i,c\right]+f\left[\frac{b-a}{2n}(2k-1)\right]\Big\}+$$

$$+2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left[f\left[\frac{b-a}{2m}2i,c\right]+f\left[\frac{b-a}{2m}2i,d\right]+f\left[a,\frac{d-c}{2n}2k\right]+\right.$$

$$\left.+f\left(b,\frac{d-c}{2n}2k\right)\right]+16\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}f\left[\frac{b-a}{2m}(2i-1),\frac{d-c}{2n}(2k-1)\right]+$$

$$+4\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n-1}f\left[\frac{b-a}{2m}2i,\frac{d-c}{2n}2k\right]+$$

$$+\ 8\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\Big\{f\left[\frac{b-a}{2m}(2i-1),\frac{d-c}{2n}2k\right]+$$

$$+f\left[\frac{b-a}{2m}2i,\frac{d-c}{2n}(2k-1)\right]\Big\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (8)$$

Интегралы, распространенные по кругу.

Может возникнуть вопрос, нужно ли говорить отдельно об интегралах по кругу, поскольку это также интегралы с постоянными пределами. Для того, чтобы ответить на этот вопрос определим соотношение площадей при делении полярного угла 2π и радиуса R на равные части. При таком делении получим:

$$\Delta\Theta = \frac{2\pi}{m} \qquad \Delta r = \frac{R}{n}$$

тогда: $r_i = \frac{Rk}{n}$ и

$r_{k-1} = \frac{R}{n}$; площадь каждой части равна:

$$\frac{\Delta\Theta}{2}\left(r_k^2 - r_{k-1}^2\right) = \frac{\Delta\Theta}{2}\frac{R^2}{n^2}\left[k^2-(k-1)^2\right] = \frac{\Delta\Theta}{2}\frac{R^2}{n^2}(2k-1),$$

т.е от центра к периферии площадь растет как геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{\Delta\Theta k^2}{n^2}$;

Поэтому, разделив на равное число частей радиус R и полярный угол Θ, будем иметь различную степень точности в центре и на периферии. Теперь разделим площадь круга на равные части следующим образом: $\frac{\pi R^2}{mn}$, очевидно, что площадь линейно зависит от полярного угла Θ и от R^2, поэтому можем написать:

$$\int_0^R\int_0^{2\pi} f(\theta,r)\,r\,dr\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{R^2}\int_0^{2\pi} f(\theta,r)\,d(r^2)\,d\theta$$

Взяв за переменные r^2 и θ, интеграл по кругу будем вычислять как обычный двойной интеграл с постоянными пределами. Правда, подставлять в $f(\theta,r)$ не точки деления R на n, а точки деления R^2 на n. Тогда r_k определится из следующего соотношения:

$$\frac{\Delta\theta}{2}\left(r_k^2-r_{k-1}^2\right)=\frac{\Delta\theta}{2}\,\frac{R^2}{n}$$

Этому соотношению удовлетворим, если положим:

$$r_k=\frac{R}{\sqrt{n}}\sqrt{k} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Все выведенные формулы можно оставить без изменения, только в формуле касательных плоскостей следует делить пределы интегрирования не на „m" и „n" частей, а на $2m$ и $2n$ частей и для „r_k" брать только нечетное „k".

Оценка погрешностей выведенных формул.

Займемся вначале оценкой погрешности формулы „трапеция-трапеция". Остаточный член формулы Лагранжа в этом случае будет:

$$r=\frac{x(h-x)}{2}\frac{\partial^2 f(\xi',\eta')}{\partial x^2}+\frac{y(q-y)}{2}\frac{\partial^2 f(\xi',\eta')}{\partial y^2}-$$

$$-\frac{x(h-x)y(q-y)}{4}\frac{\partial^4 f(\xi',\eta')}{\partial x^2\partial y^2}$$

$$R=\int_0^q\int_0^h r\,dx\,dy$$

Применяя теорему о среднем значении интеграла, получим:

$$R=\frac{\partial^2 f(\xi,\eta)}{\partial x^2}\int_0^q\int_0^h\frac{x(h-x)}{2}dx\,dy+\frac{\partial^2 f(\xi,\eta)}{\partial y^2}\int_0^q\int_0^h\frac{y(q-y)}{2}dx\,dy$$

$$+\frac{qh^3}{12}\frac{\partial^2 f(\xi,\eta)}{\partial x^2}+\frac{q^3h}{12}\frac{\partial^2 f(\xi,\eta)}{\partial y^2}-\frac{\partial^4 f(\xi,\eta)}{\partial x^2\partial y^2}\frac{q^3h^3}{144}=$$

$$=\frac{(b-a)^3(d-c)}{12m^3n}\frac{\partial^2 f(\xi,\eta)}{\partial x^2}+\frac{(b-a)(d-c)^3}{12mn^3}\frac{\partial^2 f(\xi,\eta)}{\partial y^2}+$$

$$+\frac{(b-a)^3(d-c)^3}{12m^3n^3}\frac{\partial^4 f(\xi,\eta)}{\partial x^2\partial y^2}$$

или суммируя и применяя теорему о среднем значении суммы получим:

$$R_{mn}=\frac{(b-a)^3(d-c)}{12m^2}\frac{\partial^2 f(\xi,\eta)}{\partial x^2}+\frac{(b-a)(d-c)^3}{12n^2}\frac{\partial^2 f(\xi,\eta)}{\partial y^2}-$$

$$-\frac{(b-a)^3(d-c)^3}{144m^2n^2}\frac{\partial^4 f(\xi,\eta)}{\partial x^2\partial y^2};$$

Здесь ξ и η числа, вообще говоря, различные в каждой формуле и даже в каждом слагаемом.

Для определения остаточного члена формулы касательных плоскостей и формулы Симпсон-Симпсон воспользуемся

$x=2h x_1 \quad ; \quad y=2q y_1 \quad ;$

По Стефенсону:

$$R_1=\frac{1}{2880}\left(\frac{\partial^4 f(\xi,h)}{\partial x_1^4}+\frac{\partial^4 f(\xi,h)}{\partial y_1^4}+\frac{1}{2880}\frac{\partial^8 f(\xi,h)}{\partial x_1^4\,\partial y_1^4}\right)$$

и

$$R_{qh}=\frac{4qh}{2880}\left(\frac{\partial^4 f(\xi,h)}{\partial x^4}h^4\cdot 16+\frac{\partial^4 f(\xi,h)}{\partial y^4}16\cdot q^4+\right.$$
$$\left.+\frac{256}{2880}\frac{\partial^8 f(\xi,h)}{\partial x^4\,\partial y^4}h^4q^4\right);$$

Или суммируя по всем „mn" прямоугольникам получим, применяя теорему о среднем значении суммы:

$$R_{mn}=\frac{(b-a)(d-c)}{2880}\left(\frac{\partial^4 f(\xi,h)}{\partial x^4}\frac{(b-a)^4}{m^4}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^4 f(\xi,h)}{\partial y^4}\frac{(d-c)^4}{n^4}+\frac{1}{2880}\frac{\partial^8 f(\xi,h)}{\partial x^4\,\partial y^4}\frac{(b-a)^4}{m}\frac{(d-c)^4}{n^4}\right);$$

Отсюда ясно, что формула Симпсона значительно точнее предыдущих формул.

Обозначив через M_p модуль-максимум частной производной p-того же порядка, и пренебрегая третьим слагаемым остаточного члена, получим следующие оценки погрешности выведенных формул, считая $b-a$ большим из интервалов интегрирования по абсолютной величине: для формулы „трапеция - трапеция"

$$R_{mn}\leq\frac{(b-a)^4}{6\,n^2}M_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

остаточными членами выведенными Стефенсеном для промежутка $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Для этого сведем наш наш интеграл к этому промежутку интегрирования:

$$\int_0^q\int_0^h f(x,y)\,dx,dy = qh\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x_1,y_1)\,dx_1 dy_1$$

$$x = x_1 h + \tfrac{1}{2}h\ ; \quad x_1 = \frac{x - \frac{1}{2}h}{h}\ ; \quad y = y_1 q + \tfrac{1}{2}q$$

Остаточный член у Стефенсена для этого случая:

$$R_1 = \frac{1}{24}\left(\frac{\partial^2 f(\xi,h)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f(\xi,h)}{\partial y_1^2} - \frac{1}{24}\,\frac{\partial^4 f(\xi,h)}{\partial x_1^2\,\partial y_1^2}\right.$$

и так как $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\dfrac{\partial x}{\partial x_1} = h\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$

и т.д.

$$R_{qh} = \frac{qh}{24}\left(\frac{\partial^2 f(\xi,h)}{\partial x^2}h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,h)q^2 - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{24}\,\frac{\partial^4 f(\xi,h)}{\partial^2 x\,\partial^2 y}q^2 h^2\right)$$

Суммируя получим: $R_{mn} = \frac{1}{24}\left[\frac{(b-a)^3(d-c)}{m^2}\,\frac{\partial^2 f(\xi,h)}{\partial x^2} + \right.$

$$\left. + \frac{(b-a)(d-c)^3}{n^2}\,\frac{\partial^2 f(\xi,h)}{\partial x^2} - \frac{1}{24}\,\frac{(b-a)^3}{m^2}\,\frac{(d-c)^3}{n^2}\,\frac{\partial^4 f(\xi,h)}{\partial^2 x\,\partial^2 y}\right];$$

Как видим, формула касательных плоскостей несколько точнее формулы „трапеция-трапеция“.

Для формулы „Симпсон-Симпсон“ имеем аналогично:

$$\int_{-q}^{q}\int_{-h}^{h} f(x,y)\,dx\,dy = 4qh\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

для формулы касательных плоскостей

$$R_{mn} \leq \frac{1}{12}\frac{(b-a)^4}{n^2} M_2 \dots\dots\dots\dots\dots (11)$$

и наконец для формулы „Симпсон-Симпсон"

$$R_{mn} \leq \frac{1}{1440}\frac{(b-a)^6}{n^4} M_4 \dots\dots\dots\dots\dots (12)$$

здесь „n" меньше „m"

Пример:

$$\int_0^6\int_{y=x^2}^{y=48-2x} y^4(x+1)\,dx\,dy$$

Область интегрирования ограничена осью y, параболой $y=x^2$ и прямой $y=48-2x$. Произведем замену переменных по формуле (8) $(k=1)$, тогда $y=(\eta_0-\eta)x^2+\eta(48-2x)$

$$J=\frac{48-2x-x^2}{\eta_0} \qquad \eta_0 = 36 - (\text{пример})$$

Интеграл имеет вид

$$\int_0^6\int_{y=x^2}^{y=48-2x} y^4(x+1)\,dx\,dy = \int_0^6\int_0^{36}\frac{[(36-\eta)x^2+\eta(48-2x)]^4\cdot}{36^5}$$

$$\frac{\cdot(x+1)[48-2x-x^2]}{}dx\,d\eta$$

Далее вычислим этот интеграл по какой-либо из выведенных формул. Вычисление по формуле Симпсона при $m=n=6$ дает $203{,}87\cdot10^6$ в то время как истинное значение $203{,}84\cdot10^6$.

Сводка формул.

а) приведение интеграла по произвольной области к интегралу с постоянными пределами.

$$u = \frac{\eta^k}{\eta_0^k}\varphi(v) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$y = \frac{\eta^{k-1}}{\eta_0^k}\varphi(v) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$u = \frac{(\eta_0^k - \eta^k)\varphi_1(v) + \eta^k\varphi_2(v)}{\eta_0^k} \quad \ldots\ldots (3)$$

$$y = \frac{[\varphi_2(v) - \varphi_1(v)]\eta^{k-1}}{\eta_0^k} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

б) Формулы вычисления интегралов по прямоугольной области.

$$\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \frac{(b-a)}{m}\frac{(d-c)}{n}\sum\sum f\left(\frac{b-a}{m}\frac{2i-1}{2}\frac{d-c}{n}\cdot\frac{2k-1}{2}\right) \ldots (5)$$

$$\int_a^b\int_d^c f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{4}\frac{b-a}{m}\frac{d-c}{n}\Big\{f(a,c)+f(b,c)+$$

$$+f(a,d)+f(b,d)+2\left[\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{b-a}{m}i, c\right)+f\left(\frac{b-a}{m}i, d\right)+\right.$$

$$\left.+f\left(a,\frac{d-c}{n}k\right)+f\left(b,\frac{d-c}{n}k\right)\right]+4\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{b-a}{m}i,\frac{d-c}{n}k\right)\Big\} \ldots (6)$$

$$\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy \approx \frac{b-a}{2m}\frac{d-c}{2n}\frac{1}{9}\Big\{f(a,c)+f(b,c)+$$

$$+f(a,d)+f(b,d)+4\sum\sum\left[f\left[\frac{b-a}{2m}(2i-1), c\right]+\right.$$

$$+f\left[\frac{(b-a)}{2m}(2i-1), d\right] + f\left[a, \frac{d-c}{2m}(2k-1)\right] +$$

$$+f\left[b, \frac{d-c}{2n}(2k-1)\right]\Big] + 2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left[f\left[\frac{b-c}{2m}2i, c\right] +\right.$$

$$+f\left[\frac{b-a}{2m}2i, d\right] + f\left[a, \frac{d-c}{2n}2k\right] + f\left[b, \frac{d-c}{2n}2k\right]\Big] +$$

$$+16\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f\left[\frac{b-a}{2m}(2i-1), \frac{d-c}{2n}(2k-1)\right] +$$

$$+4\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n-1} f\left[\frac{b-a}{2m}2i, \frac{d-c}{2n}2k\right] +$$

$$+ 8\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left[\frac{b-a}{2m}(2i-1), \frac{d-c}{2n}2k\right] +\right.$$

$$+f\left[\frac{b-a}{2m}(2i) \frac{d-c}{2n}(2k-1)\right]\Big] \ldots\ldots \quad (8)$$

c) к вычислению интегралов, распространенных по кругу.

$$r_k = \frac{R}{\sqrt{n}}\sqrt{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

d) Оценка погрешностей выведенных формул для формулы „трапеция-трапеция"

$$R_{mn} \leq \frac{(b-a)^4}{6n^2} M_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

для формулы касательных плоскостей

$$R_{mn} \leq \frac{(b-a)^4}{12n^2} M_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

для формулы „Симпсон - Симпсон"

$$R_{mn} \leq \frac{(b-a)^6}{1440n^4} M_4 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$