

Метод построения комбинаторных планов многофакторного эксперимента

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Предложен метод построения комбинаторных планов многофакторного эксперимента (МФЭ), в основе которого лежит многоуровневая композиция локальных оптимальных планов МФЭ. Рассмотрено решение поэтапных задач метода. Приведены примеры построения комбинаторных планов МФЭ. Применение предложенного метода позволит упростить процесс построения комбинаторных планов МФЭ для большого количества факторов.

Ключевые слова: фактор, многофакторный эксперимент, комбинаторный план, композиция.

Постановка проблемы. Для сложных технологических процессов характерно наличие большого числа факторов, определяющих процесс, их сложная взаимосвязь, наличие случайных помех. Поэтому задачи идентификации и оптимизации для такого класса объектов можно успешно решать с помощью экспериментально-статистических методов. Одним из наиболее перспективных средств решения этой задачи являются методы планирования эксперимента (МПЭ), которые позволяют повысить эффективность исследований [1]. Важные достоинства МПЭ – их универсальность и пригодность для многих областей исследования. Применение планирования эксперимента делает поведение экспериментатора целенаправленным и организованным, существенно способствует повышению производительности его труда и надежности полученных результатов.

Известные стратегии и методы планирования эксперимента имеют ограничение на количество учитываемых факторов, сложную алгоритмизацию, не имеют общего подхода, во многих случаях характеризуются субъективностью опытов, необходимых для построения адекватной математической модели, не учитывают стоимости опытов плана эксперимента. Все это указывает на необходимость решения такой важной и актуальной задачи, как разработка эффективных методов моделирования сложных объектов.

Анализ последних исследований и публикаций. Оптимальное планирование эксперимента часто требует сложного упорядочения опытов в соответствии с уровнями факторов, и такие упорядочения основаны на комбинаторных схемах. Использование комбинаторных планов позволяет оптимально сократить и существенно уменьшить затраты машинного времени [2]. Развитие теории комбинаторных планов порождает новые методы и подходы для исследования различных объектов.

В работе [3] рассмотрены наиболее характерные задачи планирования эксперимента, решаемые с помощью комбинаторных планов: элиминирующий эксперимент, сравнительный эксперимент, отсеивающий эксперимент, экстремальный эксперимент, получение математического описания многофакторных объектов с количественными и качественными переменными, специальные задачи.

При построении планов многофакторного эксперимента (МФЭ) обычно полагают, что опыты равноценны, и пренебрегают стоимостью проведения эксперимента. Однако опыты в большинстве случаев не являются равноценными, и на стоимость реализации эксперимента существенное влияние оказывает порядок чередования уровней изменения факторов. При активном эксперименте экспериментатор может менять значения факторов по заданной программе путем изменения порядка выполнения опытов, т.е. проводя перестановку строк матрицы планирования эксперимента. При этом в общем случае будет меняться и стоимость изменения значений уровней факторов. Построение комбинаторных планов, учитывающих стоимость изменения уровней факторов, рассмотрено в работах [4, 5]. Эта задача относится к NP-полной, и для ее решения не известно лучшего метода решения, чем полный перебор всех возможных вариантов [6]. Поскольку полный перебор комбинаций в многофакторных ситуациях реализовать невозможно, то главная задача при построении комбинаторных планов МФЭ – разработка методов, позволяющих сократить перебор вариантов.

Цель работы: разработать метод построения комбинаторных планов МФЭ, учитывающий стоимость изменения уровней факторов в процессе проведения эксперимента.

Основные результаты исследования. При поиске комбинаторного плана МФЭ с минимальной стоимостью изменений уровней факторов необходимо для заданного плана выполнить множество преобразований, оценить стоимость изменения уровней факторов для каждого варианта перестановки строк и выбрать минимальный по стоимости план. С ростом числа факторов количество преобразований существенно растет. В табл. 1 приведены значения количества опытов и количество преобразований L_k для некоторых значений $k = 2 \dots 5$.

Таблица 1

Количество опытов и преобразований планов МФЭ для $k = 2 \dots 5$

Количество факторов	Количество опытов в плане МФЭ	Количество преобразований
2	4	24
3	8	40320
4	16	$2.092 \cdot 10^{13}$
5	32	$2,63 \cdot 10^{35}$

Как отмечалось выше, рассматриваемая задача относится к NP-полным задачам, для которых лучший метод решения – полный перебор всех возможных вариантов. Приведенные в табл. 1 результаты показывают, что полный перебор осуществим для планов МФЭ при $k = 3$. На практике количество факторов значительно больше, поэтому задача поиска плана МФЭ, близкого к оптимальному, является актуальной. Применение случайного поиска или ограниченного перебора, к сожалению, не всегда дает удовлетворительное решение. Например, для плана МФЭ, приведенного в табл. 2, стоимости изменения уровней которого (в усл. ед.) приведены в табл. 3, при анализе 10^8 вариантов с помощью разработанного программного обеспечения [7] получено уменьшение стоимости на 3,8% при случайном поиске и на 7,2% при ограниченном переборе (компьютер Intel Celeron CPU 550, 2ГГц, ОЗУ 1,75 Гб). Стоимость реализации исходной матрицы – 518 усл. ед.

Таблица 2

Исходный план МФЭ

Номер опыта	Кодированные значения уровней факторов						Номер опыта	Кодированные значения уровней факторов					
	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	F ₅	F ₆		F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	F ₅	F ₆
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	2	-1	-1	-1	-1	-1	1
3	-1	-1	-1	-1	1	-1	4	-1	-1	-1	-1	1	1
5	-1	-1	-1	1	-1	-1	6	-1	-1	-1	1	-1	1
7	-1	-1	-1	1	1	-1	8	-1	-1	-1	1	1	1
9	-1	-1	1	-1	-1	-1	10	-1	-1	1	-1	-1	1
11	-1	-1	1	-1	1	-1	12	-1	-1	1	-1	1	1
13	-1	-1	1	1	-1	-1	14	-1	-1	1	1	-1	1
15	-1	-1	1	1	1	-1	16	-1	-1	1	1	1	1
17	-1	1	-1	-1	-1	-1	18	-1	1	-1	-1	-1	1
19	-1	1	-1	-1	1	-1	20	-1	1	-1	-1	1	1
21	-1	1	-1	1	-1	-1	22	-1	1	-1	1	-1	1
23	-1	1	-1	1	1	-1	24	-1	1	-1	1	1	1
25	-1	1	1	-1	-1	-1	26	-1	1	1	-1	-1	1
27	-1	1	1	-1	1	-1	28	-1	1	1	-1	1	1
29	-1	1	1	1	-1	-1	30	-1	1	1	1	-1	1
31	-1	1	1	1	1	-1	32	-1	1	1	1	1	1
33	1	-1	-1	-1	-1	-1	34	1	-1	-1	-1	-1	1
35	1	-1	-1	-1	1	-1	36	1	-1	-1	-1	1	1
37	1	-1	-1	1	-1	-1	38	1	-1	-1	1	-1	1
39	1	-1	-1	1	1	-1	40	1	-1	-1	1	1	1
41	1	-1	1	-1	-1	-1	42	1	-1	1	-1	-1	1
43	1	-1	1	-1	1	-1	44	1	-1	1	-1	1	1
45	1	-1	1	1	-1	-1	46	1	-1	1	1	-1	1
47	1	-1	1	1	1	-1	48	1	-1	1	1	1	1
49	1	1	-1	-1	-1	-1	50	1	1	-1	-1	-1	1
51	1	1	-1	-1	1	-1	52	1	1	-1	-1	1	1
53	1	1	-1	1	-1	-1	54	1	1	-1	1	-1	1
55	1	1	-1	1	1	-1	56	1	1	-1	1	1	1
57	1	1	1	-1	-1	-1	58	1	1	1	-1	-1	1
59	1	1	1	-1	1	-1	60	1	1	1	-1	1	1
61	1	1	1	1	-1	-1	62	1	1	1	1	-1	1
63	1	1	1	1	1	-1	64	1	1	1	1	1	1

Таблица 3

Стоимость изменения уровней факторов

Вид изменения уровней фактора		Стоимость изменения уровней факторов					
Состояние 1	Состояние 2	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	F ₅	F ₆
-1	1	2	5	4	6	3	4
1	-1	3	7	2	4	2	5
Начальное	1	4	6	3	5	4	5
Начальное	-1	5	4	2	3	3	4

Продолжение табл. 3

Вид изменения уровней фактора		Стоимость изменения уровней факторов					
1	Конечное	3	5	2	3	3	3
-1	Конечное	4	4	3	4	2	2

В основе разработанного метода синтеза планов МФЭ лежит многоуровневая композиция локальных оптимальных планов МФЭ. Множество факторов разбивается на h групп по k_i факторов в i -й группе, причем

$$k = \sum_{i=1}^h k_i ;$$

$$1 < k_i < k_{\text{доп}}, i = 1, \dots, h,$$

где $k_{\text{доп}}$ – максимальное количество факторов, для которого вычислительные возможности позволяют построить оптимальный план МФЭ

Количество возможных вариантов разбиений k факторов на h групп $L(k, h)$ определяется количеством возможных распределений факторов по группам:

$$L(k, h) = C_k^{k_1} \times \prod_{i=2}^h C_{k - \sum_{j=1}^{i-1} k_j}^{k_i} .$$

Каждой группе соответствует множество локальных планов МФЭ, выполняющихся в зависимости от значений элементов множества порядковых номеров опытов, которые для планов с k_i факторами принимают значения из множества $\{1, 2, \dots, 2^{k_i}\}$. При этом значения уровней факторов первого опыта i -го плана совпадают со значениями уровней факторов последнего опыта $(i-1)$ -го плана, что обеспечивает нулевую стоимость изменения уровней факторов между планами.

Метод построения планов МФЭ, основанный на композиции локальных оптимальных планов МФЭ, состоит из следующих этапов:

Этап 1. Формируется множество возможных разбиений факторов по группам.

Этап 2. Для каждой группы определяется последовательность реализации локальных планов МФЭ, входящих в одну группу. При этом для каждого локального плана с помощью разработанного программного обеспечения определяется множество порядковых номеров опытов, при которых стоимость реализации локального плана будет минимальной, т.е. определяется вид локального оптимального плана.

Этап 3. Этапы 1 и 2 выполняются для всех вариантов разбиения множества факторов на группы.

Этап 4. Проводится оценка стоимости реализации планов для различных вариантов разбиения множества факторов и выбирается план с минимальной суммарной стоимостью.

Рассмотрим пример применения описанного метода для улучшения комбинаторного плана МФЭ, приведенного в табл. 2, стоимости изменения уровней которого (в усл. ед.) приведены в табл. 3.

Множество факторов ($k = 6$) разбиваем на две группы ($k_1=3$ и $k_2=3$). Формируем множество возможных разбиений факторов по группам, приведенное в табл. 4.

Таблица 4

Варианты разбиений множества факторов по группам

Номер варианта	1-я группа	2-я группа	Номер варианта	1-я группа	2-я группа
1	1, 2, 3	4, 5, 6	11	2, 3, 4	1, 5, 6
2	1, 2, 4	3, 5, 6	12	2, 3, 5	1, 4, 6
3	1, 2, 5	3, 4, 6	13	2, 3, 6	1, 4, 5
4	1, 2, 6	3, 4, 5	14	2, 4, 5	1, 3, 6
5	1, 3, 4	2, 5, 6	15	2, 4, 6	1, 3, 5
6	1, 3, 5	2, 4, 6	16	2, 5, 6	1, 3, 4
7	1, 3, 6	2, 4, 5	17	3, 4, 5	1, 2, 6
8	1, 4, 5	2, 3, 6	18	3, 4, 6	1, 2, 5
9	1, 4, 6	2, 3, 5	19	3, 5, 6	1, 2, 4
10	1, 5, 6	2, 3, 4	20	4, 5, 6	1, 2, 3

Для каждого разбиения множества факторов определяем вид локального оптимального плана и стоимость его реализации. В табл. 5 приведены значения стоимости реализации общего плана МФЭ для различных вариантов сочетаний факторов. Наименьшую стоимость реализации имеет вариант номер 15.

Таблица 5

Стоимость реализации планов МФЭ в зависимости от вида

Номер варианта	1-я группа	2-я группа	Стоимость	Номер варианта	1-я группа	2-я группа	Стоимость
1	П(1,2,3)	П(4,5,6)	253	11	П(2,3,4)	П(1,5,6)	246
2	П(1,2,4)	П(3,5,6)	228	12	П(2,3,5)	П(1,4,6)	253
3	П(1,2,5)	П(3,4,6)	259	13	П(2,3,6)	П(1,4,5)	226
4	П(1,2,6)	П(3,4,5)	231	14	П(2,4,5)	П(1,3,6)	228
5	П(1,3,4)	П(2,5,6)	261	15	П(2,4,6)	П(1,3,5)	219
6	П(1,3,5)	П(2,4,6)	330	16	П(2,5,6)	П(1,3,4)	231
7	П(1,3,6)	П(2,4,5)	267	17	П(3,4,5)	П(1,2,6)	261
8	П(1,4,5)	П(2,3,6)	276	18	П(3,4,6)	П(1,2,5)	232
9	П(1,4,6)	П(2,3,5)	238	19	П(3,5,6)	П(1,2,4)	267
10	П(1,5,6)	П(2,3,4)	281	20	П(4,5,6)	П(1,2,3)	238

В табл. 6 представлен вид общего комбинаторного плана МФЭ, имеющего наименьшую стоимость, в табл. 7 – вид локальных оптимальных планов.

Таблица 6

Вид общего комбинаторного плана МФЭ, имеющего наименьшую стоимость

Номер опыта	П(F ₂ , F ₄ , F ₆)			П(F ₁ , F ₃ , F ₅)
	F ₂	F ₄	F ₆	
1	-1	-1	-1	П _н (F ₁ , F ₃ , F ₅)
2	-1	-1	1	П ₁ (F ₁ , F ₃ , F ₅)
3	-1	1	1	П ₂ (F ₁ , F ₃ , F ₅)
4	-1	1	-1	П ₁ (F ₁ , F ₃ , F ₅)
5	1	1	1	П ₂ (F ₁ , F ₃ , F ₅)

Продолжение табл. 6

Номер опыта	П(F ₂ ,F ₄ ,F ₆)			П(F ₁ ,F ₃ ,F ₅)
	F ₂	F ₄	F ₆	
6	1	1	-1	П ₁ (F ₁ ,F ₃ ,F ₅)
7	1	-1	-1	П ₂ (F ₁ ,F ₃ ,F ₅)
8	1	-1	1	П _к (F ₁ ,F ₃ ,F ₅)

Таблица 7

Локальные оптимальные планы П(1,3,5)

Номер опыта	П _н (F ₁ ,F ₃ ,F ₅)			П ₁ (F ₁ ,F ₃ ,F ₅)			П ₂ (F ₁ ,F ₃ ,F ₅)			П _к (F ₁ ,F ₃ ,F ₅)		
	F ₁	F ₂	F ₃	F ₁	F ₂	F ₃	F ₁	F ₂	F ₃	F ₁	F ₂	F ₃
1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1
2	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1
3	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
4	-1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	1
5	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1
6	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1
7	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1
8	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1

Полученный с помощью описанного метода комбинаторный план МФЭ имеет стоимость изменения уровней факторов в два-три раза меньше, чем исходный план эксперимента.

Выводы. Предложен метод построения комбинаторных планов МФЭ, в основе которого лежит многоуровневая композиция локальных оптимальных планов МФЭ. Рассмотрено решение поэтапных задач метода. Приведены примеры построения комбинаторных планов МФЭ. Применение предложенного метода позволит упростить процесс построения комбинаторных планов МФЭ для большого количества факторов. Следующим этапом исследований является разработка алгоритмического и программного обеспечения для автоматизации решения рассмотренной задачи.

Работа выполнена за бюджетные средства, выделенные в соответствии с Грантом Президента Украины №Ф32/261-2011.

Список литературы

1. Радченко, С.Г. Устойчивые методы оценивания статистических моделей [Текст]: моногр. / С.Г. Радченко. – К.: ПП «Санспарель», 2005. – 504 с.
2. Маркова, Е.В. Комбинаторные планы в задачах многофакторного эксперимента [Текст] / Е.В. Маркова, А.Н. Лисенков. – М.: Наука, 1979. – 347 с.
3. Маркова, Е.В. Комбинаторные планы и теория графов [Текст] / Е.В. Маркова // Вопросы кибернетики: Некоторые вопросы планирования эксперимента / Е.В. Маркова, В.П. Козырев. – М.: Науч. совет по комплексной проблеме "Кибернетика" АН СССР, 1972. – С. 3-12.
4. Кошевой, Н.Д. Применение комбинаторного анализа при выборе оптимальных планов многофакторного эксперимента [Текст] / Н.Д. Кошевой, С.Г. Бестань, В.А. Дергачев // Теорія і практика перебудови економіки: зб. наук. пр. ЧІТІ. – Черкаси, 2001. – С. 224-227.

5. Кошевой, Н.Д. Оптимальное планирование эксперимента при исследовании качества технологических процессов [Текст] / Н.Д. Кошевой, М.В. Цеховской, В.А. Дергачев и др. // Якість технологій та освіти: зб. наук. пр. Української інженерно-педагогічної академії. – Вып. 2. – Х., 2011. – С. 26 – 32
6. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 40322. Програма побудови комбінаторних планів багатofакторного експерименту / М.В. Цеховський, М.Д. Кошовий, О.М. Костенко, В.А. Дергачов; Заявник та власник Цеховський М.В. – №40584; заявл. 25.07.2011; зареєстр. 07.10.2011. – 16 с.
7. Рейнгольд, Э. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика [Текст] / Э. Рейнгольд, Ю. Нивергельт, Н. Део. – М.: Мир, 1980. – 476 с.

Рецензент: д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой информатики А.Ю. Соколов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

Поступила в редакцию 30.01.2012

Метод побудови комбінаторних планів багатofакторного експерименту

Запропоновано метод побудови комбінаторних планів багатofакторного експерименту (БФЕ), в основі якого лежить багаторівнева композиція локальних оптимальних планів БФЕ. Розглянуто вирішення поетапних задач методу. Наведено приклади побудови комбінаторних планів БФЕ. Застосування запропонованого методу дозволить спростити процес побудови комбінаторних планів БФЕ для великої кількості факторів.

Ключові слова: фактор, багатofакторний експеримент, комбінаторний план, композиція

Method of multifactorial experiment combinatory plans construction

The method of multifactorial experiment (MFE) combinatory plans construction based on use of a local optimum plans MFE multilevel composition is offered. The decision of a method stage-by-stage problems is considered. Examples of combinatory plans MFE construction are resulted. Application of the offered method will allow to simplify process of combinatory plans MFE construction for the big number of factors.

Keywords: factor, multifactorial experiment, combinatory plan, composition.