

Метод Фурье в нестационарных задачах теплопроводности многокомпонентных стержневых систем

*Харьковский национальный экономический университет
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»*

Получены решения нового класса задач о расчете тепловых нестационарных полей в стержневых системах, составленных из разнородных звеньев. Сами звенья представляют собой отрезки прямых или окружности. На такие стержневые системы распространен классический метод разделения переменных Фурье.

Ключевые слова: многокомпонентные стержневые системы, метод Фурье, нестационарное тепловое поле, начальные условия, разложение в ряды по собственным векторным функциям.

Изучаются линейные задачи нестационарной теплопроводности для составных неоднородных стержневых систем, формы которых изображены на рис 1. Целью статьи является распространение классического метода разделения переменных Фурье [1] на такие задачи. Основной вопрос, которому уделяется внимание, – вопрос полноты системы собственных функций неклассических задач Штурма – Лиувилля и нахождение коэффициентов разложения векторных начальных функций. Такие задачи, насколько известно авторам, поставлены впервые, поэтому их изучение имеет определенный интерес как с математической стороны, так и в связи с возможными приложениями [2, 3].

1. Постановка задачи

Стержневые системы (рис. 1) в общем случае составлены из звеньев разной длины с различными теплофизическими свойствами. Между звеньями в узлах (точках соединения звеньев) существует совершенный тепловой контакт:

$$u_{k-1} = u_k, \quad k = 2, 3, \dots, N, \quad (1.1)$$

$$v_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \dots + v_N \frac{\partial u_N}{\partial x} = 0, \quad v_k > 0, \quad (1.2)$$

где N – количество звеньев в узле; v_k – коэффициент теплопроводности k -го звена (направление осей указано на рисунках).

Первое условие (1.1) следует из непрерывности температурного поля, второе (1.2) – закон сохранения теплового потока в узле при отсутствии в нем источников тепла.

Поведение температуры в стержне описывается однородным уравнением теплопроводности с разрывными коэффициентами:

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} = a_k^{-2} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial t}, \quad a_k^2 = \frac{c_k \rho_k}{v_k}, \quad (1.3)$$

где c_k , ρ_k – соответственно удельная теплоемкость и плотность вещества, из которого изготовлено звено.

С каждым звеном свяжем локальную систему координат Ox , направление оси которой указано на рисунке. В случае окружности x – дуга окружности. Нача-

ло координат поместим в узле, если узла два, то – в один из них. Краевые условия на краях берем нулевыми [1]: это могут быть условия для температуры или для тепловых потоков, но могут быть и смешанные условия (на одних краях задана температура, на других – тепловые потоки). Для случаев, изображенных на рис. 1, г, д, е краевые условия отсутствуют.

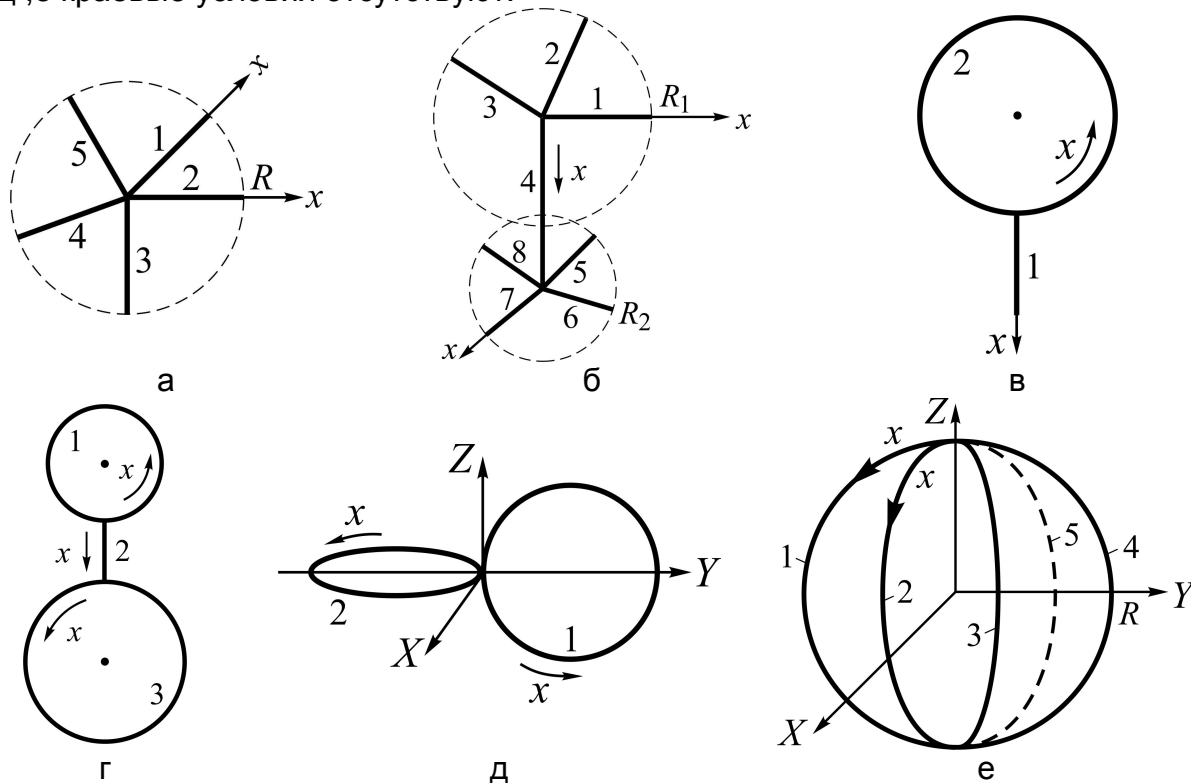


Рис. 1. Разновидности стержневых систем

Начальные условия для всех задач одинаковы:

$$u_k(x,0) = f_k(x), \tag{1.4}$$

где $f_k(x)$ – непрерывные на k -том звене функции, равные между собой в узловых точках. Надо по заданным краевым условиям и начальным условиям (1.4) найти решение уравнения (1.3) при соблюдении условий сопряжения (1.1), (1.2).

Задачи с ненулевыми граничными условиями, как и в классическом случае [3], могут быть сведены к задачам с нулевыми граничными условиями для уравнения теплопроводности с источниками тепла. Решению таких задач и задач с краевыми условиями третьего рода методом Фурье будет посвящена отдельная публикация.

2. Многозвенные прямолинейные стержни

2.1. В случае, изображенном на рис. 1, а, примем краевые условия

$$u_k(R,t) = 0, \quad k = \overline{1,N}. \tag{2.1}$$

Здесь все звенья одинаковой длины, края их расположены на окружности радиуса R . Положим ради упрощения $a_k = a$ для всех звеньев, но V_k – разные.

Решение задачи в соответствии с методом Фурье берем в виде

$$u_k(x,t) = X_k(x) \cdot e^{-a^2 \lambda^2 t}, \quad (2.2)$$

где функции $X_k(x)$ удовлетворяют уравнению

$$X_k'' + \lambda^2 X_k = 0, \quad (2.3)$$

граничным условиям $X_k(R) = 0$ и условиям сопряжения

$$X_{k-1}(0) = X_k(0), \quad k = \overline{2, N}, \quad \sum_{k=1}^N \nu_k X_k'(0) = 0, \quad (2.4)$$

вытекающим из (1.1), (1.2).

Задача Штурма – Лиувилля (2.3), (2.4) имеет две серии собственных значений $\lambda_n^{(1)} = \frac{n\pi}{R}$ и $\lambda_n^{(2)} = \frac{(2n+1)\pi}{2R}$ и, соответственно, две серии собственных функций

$$X_k^{(1)}(x) = A_k(n) \sin \lambda_n^{(1)}(x - R), \quad \sum_{k=1}^N \nu_k A_k(n) = 0, \quad (2.5)$$

$$X_k^{(2)}(x) = \sin \lambda_n^{(2)}(x - R). \quad (2.6)$$

Найденные собственные функции (2.5), (2.6) удовлетворяют условиям сопряжения (2.4), если $A_k(n)$ связаны вторым соотношением (2.5). Запишем их в векторной форме:

$$y_1(x, \lambda_n^{(1)}) = \begin{bmatrix} A_1(n) \\ \vdots \\ A_N(n) \end{bmatrix} \sin \lambda_n^{(1)}(x - R), \quad y_2(x, \lambda_n^{(2)}) = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \sin \lambda_n^{(2)}(x - R). \quad (2.7)$$

Решение задачи теплопроводности в соответствии с (2.2) представим рядом

$$\begin{bmatrix} u_1(x,t) \\ \vdots \\ u_N(x,t) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} y_1(x, \lambda_n^{(1)}) \cdot e^{-b_n t} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cdot y_2(x, \lambda_n^{(2)}) \cdot e^{-c_n t}, \quad (2.8)$$

где $b_n = (a\lambda_n^{(1)})^2$, $c_n = (a\lambda_n^{(2)})^2$.

Начальные условия (1.4) приводят к векторному равенству

$$\begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_N(x) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} y_1(x, \lambda_n^{(1)}) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n y_2(x, \lambda_n^{(2)}), \quad 0 \leq x \leq R. \quad (2.9)$$

Вектор-функцию, стоящую слева в (2.9), надо разложить по двум системам векторных функций (2.7), причем коэффициенты $A_k(n)$, входящие в $y_1(x, \lambda_n^{(1)})$, связаны соотношением (2.5). В этом состоит неклассичность рассматриваемой спектральной задачи, которая порождает два вопроса: 1) как найти коэффициенты $A_k(n)$, B_n разложения (2.9)?; 2) если коэффициенты найдены, то справедливы ли разложения (2.9), т. е. сходится ли ряд (2.9) к той вектор-функции, которая стоит в левой части (2.9)? Ответ на второй вопрос будет ответом на вопрос о полноте системы собственных функций векторной задачи Штурма – Лиувилля (2.3), (2.4).

Введем N непрерывных функций $\varphi_k(x)$ с помощью рядов Фурье

$$\varphi_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(k)} \cdot \sin \lambda_n^{(1)}(x-R), \quad \alpha_n^{(k)} = \frac{2}{R} \int_0^R \varphi_k(t) \cdot \sin \lambda_n^{(1)}(t-R) dt \quad (2.10)$$

по полной и ортогональной на $(0, R)$ системе функций $\{\sin \lambda_n^{(1)}(x-R)\}$ и представим начальные функции $f_k(x)$ в виде равенств

$$f_k(x) = F(x) + \varphi_k(x), \quad (2.11)$$

где $F(x)$ – новая неизвестная функция, а $\varphi_k(x)$ подчиним дополнительному условию

$$\sum_{k=1}^N \nu_k \cdot \varphi_k(x) = 0. \quad (2.12)$$

Из (2.11), (2.12) определяем функции $F(x)$ и $\varphi_k(x)$:

$$F(x) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^N \nu_k \cdot f_k(x), \quad m = \sum_{k=1}^N \nu_k, \quad (2.13)$$

$$\varphi_k(x) = f_k(x) - F(x) = \frac{1}{m} \sum_{r=1}^N \nu_r [f_k(x) - f_r(x)]. \quad (2.14)$$

Функции $\varphi_k(x)$ удовлетворяют условию $\varphi_k(0) = 0$ в силу равенства функций $f_k(x)$ в узле. Легко видеть, что коэффициенты Фурье (2.10) введенных таким способом функций $\varphi_k(x)$ в силу (2.12) удовлетворяют условию

$$\nu_1 \alpha_n^{(1)} + \nu_2 \alpha_n^{(2)} + \dots + \nu_N \alpha_n^{(N)} = 0. \quad (2.15)$$

Можно показать, что условие (2.12) является также и необходимым для выполнения (2.15).

Если теперь положить $A_k(n) = \alpha_n^{(k)}$, то условие (2.5) для $A_k(n)$ будет удовлетворено и, благодаря (2.11), векторное равенство (2.9) перейдет в скалярное

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cdot \sin \lambda_n^{(2)}(x-R), \quad (2.16)$$

из которого найдем B_n . В самом деле, система функций $\{\sin \lambda_n^{(2)}(x-R)\}$ является ортогональной и полной на $(0, R)$, т. к. она представляет собой систему собственных функций задачи Штурма – Лиувилля: $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y(R) = 0, \quad y'(0) = 0$.

$$\text{Из (2.16) получаем } B_n = \frac{2}{R} \int_0^R F(t) \cdot \sin \lambda_n^{(2)}(t-R) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Итак, коэффициенты векторного разложения (2.9) найдены. В силу полноты систем собственных функций $\{\sin \lambda_n^{(1)}(x-R)\}$ и $\{\sin \lambda_n^{(2)}(x-R)\}$ сходимость ряда (2.9) имеет место. Этим установлена полнота системы собственных векторных функций неклассической спектральной задачи (2.3), (2.4).

Замечание. Прием, с помощью которого система функций $f_k(x)$ представ-

лена в виде суммы (2.11), в которой $\varphi_k(x)$ удовлетворяют (2.12), будем называть симметризацией системы функций $f_k(x)$. Он неоднократно будет использоваться в других задачах настоящей статьи.

2.2. Исследуем случай, представленный на рис. 1, б. Краевые условия на звеньях 1 – 3 примем в виде (2.1), на звеньях 5 – 8 положим

$$\left. \frac{\partial u_k}{\partial x} \right|_{x=R_2} = 0. \quad (2.17)$$

Как и раньше, используем представление (2.2). Для $X_k(x)$ имеем спектральную задачу

$$X_k'' + \lambda^2 X_k = 0, \quad X_k(R_1) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad X_k'(h + R_2) = 0, \quad k = \overline{5, 8}, \quad (2.18)$$

$$X_k(0) = X_{k+1}(0), \quad k = 1, 2, 3, \quad X_k(h) = X_{k+1}(h), \quad k = \overline{4, 7}, \quad (2.19)$$

$$\sum_{k=1}^4 \nu_k \cdot X_k'(0) = 0, \quad \sum_{k=5}^8 \nu_k \cdot X_k'(h) - \nu_4 \cdot X_4'(h) = 0, \quad (2.20)$$

где h – длина четвертого звена. Начало координат расположено в верхнем узле, направление осей на всех звеньях одинаково, т. е. от узлов.

С учетом краевых условий (2.18) имеем

$$X_k(x) = \begin{cases} A_k \cdot \sin \lambda(x - R_1), & k = \overline{1, 3}, \\ A_4 \cdot \sin \lambda x + B_4 \cdot \cos \lambda x, & k = 4, \\ B_k \cdot \cos \lambda(x - h - R_2), & k = \overline{5, 8}. \end{cases} \quad (2.21)$$

Условия сопряжения (2.19), (2.20) приводят к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} A_k \cdot \sin \lambda R_1 &= A_{k+1} \cdot \sin \lambda R_1, \quad k = 1, 2, \quad B_4 = -A_1 \cdot \sin \lambda R_1; \\ B_k \cdot \cos \lambda R_2 &= B_{k+1} \cdot \cos \lambda R_2, \quad k = \overline{5, 7}, \quad B_5 \cos \lambda R_2 = A_4 \cdot \sin \lambda h + B_4 \cdot \cos \lambda h; \\ \sum_{k=1}^3 \nu_k \cdot A_k \cdot \cos \lambda R_1 + \nu_4 \cdot A_4 &= 0, \quad \sum_{k=5}^8 \nu_k \cdot B_k \cdot \sin \lambda R_2 - \nu_4 (A_4 \cdot \cos \lambda h - B_4 \cdot \sin \lambda h) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Из системы (2.22) находим собственные значения:

$$1. \sin \lambda R_1 = 0, \quad \lambda_n^{(1)} = n\pi / R_1, \quad A_4 = B_4 = B_5 = 0, \quad \sum_{k=1}^3 \nu_k A_k = 0. \quad (2.23)$$

При этом предполагается, что $\lambda_n^{(1)}$ не является корнем уравнений

$$\sin 2\lambda R_2 = 0, \quad \sin 2\lambda h = 0, \quad \nu_4 / m_2 - \operatorname{tg} \lambda R_2 \cdot \operatorname{tg} \lambda h = 0, \quad m_2 = \sum_{k=5}^8 \nu_k.$$

Собственная функция для $\lambda_n^{(1)}$ имеет вид (T – символ транспонирования)

$$y_1(x, \lambda_n^{(1)}) = [A_1 \ A_2 \ A_3 \ 0 \dots 0]^T \cdot \sin \lambda_n^{(1)}(x - R_1), \quad \sum_{k=1}^3 \nu_k A_k = 0. \quad (2.24)$$

$$2. \cos \lambda R_2 = 0, \quad \lambda_n^{(2)} = \frac{(2n+1)\pi}{2R_2}, \quad \sum_{k=5}^8 \nu_k B_k = 0, \quad A_1 = A_4 = B_4 = 0. \quad (2.25)$$

Предполагается, что $\lambda_n^{(2)}$ не является корнем уравнений

$$\sin 2\lambda R_1 = 0, \quad \sin 2\lambda h = 0, \quad m_1 \cdot \operatorname{tg} \lambda h + \nu_4 \cdot \operatorname{tg} \lambda R_1 = 0, \quad m_1 = \sum_{k=1}^3 \nu_k.$$

Собственная функция для $\lambda_n^{(2)}$ будет такой:

$$y_2(x, \lambda_n^{(2)}) = [0 \dots 0 B_5 \dots B_8]^T \cdot \cos \lambda_n^{(2)}(x - h - R_2), \quad \sum_{k=5}^8 \nu_k B_k = 0. \quad (2.26)$$

3. Пусть $\sin 2\lambda R_1 \neq 0, \sin 2\lambda R_2 \neq 0, \sin 2\lambda h \neq 0$. Тогда

$$A_1 = A_2 = A_3, \quad B_5 = B_6 = B_7 = B_8, \quad B_4 = -A_1 \cdot \sin \lambda R_1, \\ B_5 \cdot \cos \lambda R_2 = A_4 \cdot \sin \lambda h + B_4 \cdot \cos \lambda h.$$

Из условий сопряжения, записанных в последней строке системы (2.22), находим

$$A_1 \cdot m_1 \cdot \cos \lambda R_1 + \nu_4 \cdot A_4 = 0,$$

$$B_5 \cdot m_2 \cdot \sin \lambda R_2 - \nu_4 (A_4 \cdot \cos \lambda h - B_4 \cdot \sin \lambda h) = 0.$$

В конечном итоге получаем уравнение

$$\nu_4 \cdot \sin \lambda R_1 (m_2 \cdot \operatorname{tg} \lambda R_2 \cdot \cos \lambda h + \nu_4 \cdot \sin \lambda h) + \\ + m_1 \cdot \cos \lambda R_1 (m_2 \cdot \operatorname{tg} \lambda R_2 \cdot \sin \lambda h - \nu_4 \cdot \cos \lambda h) = 0 \quad (2.27)$$

для определения третьей серии собственных значений $\lambda_n^{(3)}$. Собственная функция в этом случае определена равенством (2.21), в котором следует положить

$$A_1 = \cos \lambda R_2, \quad A_4 = -(m_1/\nu_4) \cos \lambda R_1 \cdot \cos \lambda R_2, \quad B_4 = -\sin \lambda R_1 \cdot \cos \lambda R_2, \\ B_5 = -[\sin \lambda R_1 \cos \lambda h + (m_1/\nu_4) \cos \lambda R_1 \cdot \sin \lambda h].$$

Следовательно,

$$y_3(x, \lambda) = \begin{cases} \cos \lambda R_2 \cdot \sin \lambda (x - R_1), & x \in I_1 = (0, R_1), k = 1, 2, 3, \\ -\left[\frac{m_1}{\nu_4} \cos \lambda R_1 \cdot \sin \lambda x + \sin \lambda R_1 \cdot \cos \lambda x \right] \cos \lambda R_2, & x \in I_2 = (0, h), k = 4, \\ -\left[\sin \lambda R_1 \cdot \cos \lambda h + \frac{m_1}{\nu_4} \cos \lambda R_1 \cdot \sin \lambda h \right] \cos \lambda (x - h - R_2), & x \in I_3 = (h, R_2 + h), k = \overline{5, 8}, \end{cases} \quad (2.28)$$

где $\lambda = \lambda_n^{(3)}$ – положительные корни характеристического уравнения (2.27).

Общее решение задачи теплопроводности будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} u_1(x, t) \\ \vdots \\ u_8(x, t) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} y_1(x, \lambda_n^{(1)}) \cdot e^{-r_n t} + \sum_{n=0}^{\infty} y_2(x, \lambda_n^{(2)}) \cdot e^{-s_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot y_3(x, \lambda_n^{(3)}) \cdot e^{-p_n t}, \quad (2.29)$$

где $r_n = (a\lambda_n^{(1)})^2, s_n = (a\lambda_n^{(2)})^2, p_n = (a\lambda_n^{(3)})^2$, а коэффициенты $A_k(n), B_k(n)$, входящие в $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$, связаны соотношениями (2.24), (2.26).

Начальные условия (1.4) при $t = 0$ приводят к векторному равенству

$$\begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_8(x) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} y_1(x, \lambda_n^{(1)}) + \sum_{n=0}^{\infty} y_2(x, \lambda_n^{(2)}) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot y_3(x, \lambda_n^{(3)}). \quad (2.30)$$

Для нахождения коэффициентов $A_k(n)$, $B_k(n)$ подвергнем симметризации функции $f_k(x)$ ($k = 1, 2, 3$) и отдельно для $k = \overline{5, 8}$, т.е. представим их в виде:

$$f_k(x) = F_1(x) + \varphi_k(x), \quad \varphi_k(x) = f_k(x) - F_1(x), \quad k = 1, 2, 3,$$

$$f_k(x) = F_2(x) + g_k(x), \quad g_k(x) = f_k(x) - F_2(x), \quad k = \overline{5, 8},$$

$$F_1(x) = \frac{1}{m_1} \sum_{k=1}^3 v_k \cdot f_k(x), \quad F_2(x) = \frac{1}{m_2} \sum_{k=5}^8 v_k \cdot f_k(x).$$

В левой части равенства (2.30) будет стоять вектор-функция

$$[F_1(x) + \varphi_k(x), f_4(x), F_2(x) + g_k(x)]^T.$$

Разложим $\varphi_k(x)$ и $g_k(x)$ по полным системам функций $\{\sin \lambda_n^{(1)}(x - R_1)\}$ и $\{\cos \lambda_n^{(2)}(x - R_2 - h)\}$ соответственно ($l = h + R_2$):

$$\varphi_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(k)} \cdot \sin \frac{n\pi}{R_1}(x - R_1), \quad \alpha_n^{(k)} = \frac{2}{R} \int_0^R \varphi_k(t) \cdot \sin \frac{n\pi}{R_1}(t - R_1) dt,$$

$$g_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{(k)} \cdot \cos \lambda_n^{(2)}(x - l), \quad \beta_n^{(k)} = \frac{2}{R} \int_h^l g_k(t) \cdot \cos \lambda_n^{(2)}(t - l) dt.$$

Положим в (2.30) $A_k(n) = \alpha_n^{(k)}$, $B_k(n) = \beta_n^{(k)}$, тогда условия (2.24), (2.26) будут удовлетворяться благодаря проведенной симметризации функций $f_k(x)$. Вместо (2.30) будем иметь равенство

$$[F_1(x), f_4(x), F_2(x)]^T = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot y_3(x, \lambda_n^{(3)}). \quad (2.31)$$

Для определения c_n сделаем замену $x = -x_1$ на I_1 и $x = x_1$ на $(I_2 + I_3)$. В результате получим

$$[F_1(-x_1), f_4(x_1), F_2(x_1)]^T = - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot z_n(x_4, \lambda_n^{(3)}), \quad (2.32)$$

где

$$z(x, \lambda) = \begin{cases} \cos \lambda R_2 \cdot \sin \lambda(x - R_1), & x \in I'_1 = (-R_1, 0), \\ \left[\frac{m_1}{v_4} \cos \lambda R_1 \cdot \sin \lambda x + \sin \lambda R_1 \cdot \cos \lambda x \right] \cos \lambda R_2, & x \in I'_2 = (0, h), \\ \left[\sin \lambda R_1 \cdot \cos \lambda h + \frac{m_1}{v_4} \cos \lambda R_1 \cdot \sin \lambda h \right] \cos \lambda(x - h - R_2), & x \in I'_3 = (h, R_2 + h). \end{cases} \quad (2.33)$$

Легко убедиться, что $z(x, \lambda)$ является собственной функцией задачи Штурма – Лиувилля на $(-R_1, h + R_2)$:

$$\begin{aligned} z'' + \lambda^2 z &= 0, \quad z(-R_1) = 0, \quad z'(h + R_2) = 0, \\ z(-0) &= z(+0), \quad z(h-0) = z(h+0), \\ m_1 \cdot z'(-0) &= \nu_4 \cdot z'(0), \quad \nu_4 \cdot z'(h-0) = m_2 \cdot z'(h+0), \end{aligned} \quad (2.34)$$

если $\lambda = \lambda_n^{(3)}$ будут корнями уравнения (2.27).

Такая задача изучена в работе [4], где показано, что собственные значения, т. е. корни уравнения (2.27), являются действительными числами, а собственные функции $z(x_1, \lambda_n^{(3)})$ – ортогональны с весом $\rho(x_1)$ на $(-R_1, h + R_2)$. Вес $\rho(x_1)$ в рассматриваемом случае таков:

$$\rho(x_1) = \begin{cases} 1, & x_1 \in I'_1, \\ \nu_4/m_1, & x_1 \in I'_2, \\ m_2/\nu_4, & x_1 \in I'_3. \end{cases}$$

Свойство ортогональности позволяет найти коэффициенты c_n из равенства (2.32).

В работе [4] доказана полнота системы собственных функций спектральной задачи (2.34). Сходимость рядов Фурье по такой системе собственных функций такая же, как и в тригонометрических рядах Фурье [5].

Итак, все коэффициенты разложения (2.30) найдены, система собственных векторных функций задачи Штурма – Лиувилля (2.18) – (2.20) является полной.

3. Стержни, составленные из окружностей и отрезка прямой

3.1. В задаче, схематично изображенной на рис. 1, в, краевое условие принимаем таким:

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=h} = 0, \quad (3.1)$$

где h – длина прямолинейного отрезка.

Условия сопряжения в узле имеют вид:

$$u_1(0) = u_2(0) = u_2(l), \quad \nu_1 \left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=0} + \nu_2 \left(\left. \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|_{x=0} - \left. \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|_{x=l} \right) = 0, \quad l = 2\pi R. \quad (3.2)$$

Для окружности $x = R\varphi$ – дуговая координата.

Решение задачи берем в виде $u_k(x, t) = X_k(x) \cdot e^{-\lambda^2 t}$.

Для $X_k(x)$ имеем уравнение

$$X_k'' + (\lambda/a_k)^2 X_k = 0, \quad k = 1, 2, \quad (3.3)$$

краевое условие $X_1'(h) = 0$ и условия сопряжения

$$X_2(0) = X_2(l) = X_1(0), \quad \nu_1 X_1'(0) + \nu_2 (X_2'(0) - X_2'(l)) = 0. \quad (3.4)$$

Решение этой спектральной задачи ищем в форме

$$X_1(x) = A_1 \cdot \cos p_1(x-h), \quad X_2(x) = A_2 \cdot \sin p_2 x + B_2 \cdot \cos p_2 x, \quad p_k = \lambda/a_k. \quad (3.5)$$

Из условий сопряжения (3.4) находим

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= A_2 \cdot \sin p_2 l + B_2 \cdot \cos p_2 l, \quad B_2 = A_1 \cdot \cos p_1 h, \\ A_1 \cdot \nu_1 \cdot \sin p_1 h + \nu_2 \cdot (a_1/a_2)(A_2 - A_2 \cos p_2 l + B_2 \cdot \sin p_2 l) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Решая систему (3.6), получим:

$$1. \sin p_2 l / 2 = 0, \quad \lambda_n^{(1)} = \frac{a_2}{R} n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$X_1(x) \equiv 0, \quad X_2(x) = A_2 \cdot \sin(\lambda_n^{(1)} x / a_2), \quad \text{если } \sin 2 p_1 h \neq 0;$$

$$2. \nu_1 (a_2/a_1) \cdot \sin p_1 h \cdot \cos(p_2 l / 2) + 2\nu_2 \cdot \sin(p_2 l / 2) \cdot \cos p_1 h = 0, \quad (3.7)$$

если $\cos p_1 h \neq 0, \cos(p_2 l / 2) \neq 0$.

Уравнение (3.7) определяет вторую серию собственных значений спектральной задачи $\lambda = \lambda_n^{(2)}$.

Собственные функции таковы:

$$y_1(x, \lambda_n^{(1)}) = \begin{cases} 0, & x \in I_1 = (0, h), \\ \sin \frac{\lambda_n^{(1)} x}{a_2}, & x \in I_2 = (0, l), \end{cases} \quad y_2(x, \lambda_n^{(2)}) = \begin{cases} \cos \frac{\lambda_n^{(2)} l}{2 a_2} \cdot \cos \frac{\lambda_n^{(2)}}{a_1} (x-h), & x \in I_1, \\ \cos \frac{\lambda_n^{(2)} h}{a_1} \cdot \cos \frac{\lambda_n^{(2)}}{a_2} (x-l/2), & x \in I_2. \end{cases} \quad (3.8)$$

Решение задачи теплопроводности запишем в виде ряда

$$\begin{bmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot y_1(x, \lambda_n^{(1)}) \cdot e^{-r_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot y_2(x, \lambda_n^{(2)}) \cdot e^{-s_n t} + b_0,$$

где $r_n = (\lambda_n^{(1)})^2, s_n = (\lambda_n^{(2)})^2, \lambda_n^{(2)}$ – положительные корни уравнения (3.7); b_0 – слагаемое, которое соответствует $\lambda_0^{(2)} = 0$.

При $t = 0$ получим

$$\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot y_1(x, \lambda_n^{(1)}) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot y_2(x, \lambda_n^{(2)}). \quad (3.9)$$

Из (3.9) надо найти коэффициенты разложения a_n, b_n .

Для этого функцию $f_2(x)$ представим в виде суммы четной и нечетной функций относительно точки $x = l/2 = \pi R$:

$$f_2(x) = f_{2r}(x) + f_{2H}(x),$$

$$f_{2r}(x) = \frac{1}{2} [f_2(x) + f_2(2\pi R - x)], \quad f_{2H}(x) = \frac{1}{2} [f_2(x) - f_2(2\pi R - x)].$$

В силу непрерывности $f_2(x)$ выполняется равенство $f_{2H}(0) = f_{2H}(\pi R) = 0$.

Функцию $f_{2H}(x)$ разложим в ряд Фурье по системе $\left\{ \sin(\lambda_n^{(1)} x / a_2) \right\}$:

$$f_{2H}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(2)} \cdot \sin(\lambda_n^{(1)} x / a_2), \quad 0 \leq x \leq \pi R, \quad \alpha_n^{(2)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_{2H}(R\varphi) \cdot \sin n\varphi d\varphi,$$

и положим $a_n = \alpha_n^{(2)}$. В результате из (3.9) найдем

$$\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_{2r}(x) \end{bmatrix} = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot y_2(x, \lambda_n^{(2)}). \quad (3.10)$$

Сделаем в (3.10) замены $x = -x_1$ на I_1 и $x = x_1$ на I_2 , в результате чего равенство (3.10) перейдет в равенство

$$\begin{bmatrix} f_2(-x_1) \\ f_{2r}(x_1) \end{bmatrix} = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot z(x_1, \lambda_n^{(2)}), \quad (3.11)$$

где обозначено

$$z(x, \lambda_n^{(2)}) = \begin{cases} \cos \frac{\lambda_n^{(2)} l}{2a_2} \cdot \cos \frac{\lambda_n^{(2)}}{a_1} (x-h), & x \in I_1' = (-h, 0), \\ \cos \frac{\lambda_n^{(2)} h}{a_1} \cdot \cos \frac{\lambda_n^{(2)}}{a_2} (x-l/2), & x \in I_2' = (0, l/2). \end{cases} \quad (3.12)$$

Функция $z(x, \lambda)$ является (это легко проверить) собственной функцией задачи Штурма – Лиувилля: $z'' + (\lambda/a_k)^2 z = 0$ ($k=1$ для I_1' и $k=2$ для I_2'), $z(-h) = z'(l/2) = 0$, $z(-0) = z(+0)$, $v_1 z'(-0) = 2v_2 z'(+0)$, а $\lambda_n^{(2)}$ – корень уравнения (3.7).

Для функций $z(x_1, \lambda_n^{(2)})$ имеют место [4] свойство ортогональности с весом $\rho(x_1)$ на $(-h, \pi R)$ и полнота. Вес $\rho(x_1)$ в рассматриваемом случае определяется равенством

$$\rho(x_1) = \begin{cases} a_1^{-2}, & x_1 \in I_1', \\ (2v_2)^2 / (v_1 \cdot a_2)^2, & x_1 \in I_2'. \end{cases}$$

Таким образом, коэффициенты b_n в (3.11) определяются по формуле

$$b_n = \left\| z(x_1, \lambda_n^{(2)}) \right\|^{-2} \int_{-h}^{\pi R} F(x_1) z(x_1, \lambda_n^{(2)}) \cdot \rho(x_1) dx_1, \quad n \geq 0,$$

где $F(x_1) = \{f_1(-x_1) \text{ на } I_1' \text{ и } f_{2r}(x_1) \text{ на } I_2'\}$.

На основании вышесказанного делаем вывод о полноте системы собственных векторных функций задачи (3.3), (3.4) на множестве начальных функций задачи теплопроводности.

3.2. В случае задачи, представленной на рис. 1, г, имеем два узла, краевых условий нет, т. к. нет границ. Условия сопряжения запишутся так:

$$u_1(0, t) = u_1(l_1, t) = u_2(0, t), \quad v_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=l_1} \right) + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (3.13)$$

$$u_2(h, t) = u_3(h, t) = u_3(h+l_2, t), \quad v_3 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} \Big|_{x=h} - \frac{\partial u_3}{\partial x} \Big|_{x=h+l_2} \right) - v_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=h} = 0, \quad (3.14)$$

где $l_1 = 2\pi R_1$; $l_2 = 2\pi R_2$; h – длина прямолинейного звена.

Как и в предыдущей задаче, подстановка $u_k(x,t) = X_k(x) \cdot e^{-\lambda^2 t}$ приводит к спектральной задаче:

$$X_k'' + (\lambda/a_k)^2 X_k = 0, \quad X_1(0) = X_1(l_1) = X_2(0), \quad X_2(h) = X_3(h) = X_3(h+l_2); \quad (3.15)$$

$$\nu_1(X_1'(0) - X_1'(l_1)) + \nu_2 X_2'(0) = 0, \quad \nu_3(X_3'(h) - X_3'(l_2+h)) - \nu_2 X_2'(h) = 0. \quad (3.16)$$

Задача (3.15), (3.16) имеет три серии собственных значений и три семейства собственных функций:

$$1. \lambda_n^{(1)} = n a_1 / R_1, \quad y_1(x, \lambda_n^{(1)}) = \begin{cases} \sin(\lambda_n^{(1)} x / a_1), & x \in I_1 = (0, l_1), \\ 0 & x \in I_2 = (0, h) \cup I_3 = (0, l_2); \end{cases}$$

$$2. \lambda_n^{(2)} = n a_3 / R_2, \quad y_2(x, \lambda_n^{(2)}) = \begin{cases} 0 & x \in I_1 \cup I_2, \\ \sin[\lambda_n^{(2)}(x - h - \pi R_2) / a_2], & x \in I_3; \end{cases}$$

3. $\lambda_n^{(3)}$ – положительные корни уравнения

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{23} \cos\left(\frac{\lambda l_2}{2a_3}\right) \left[\sin\left(\frac{\lambda h}{a_2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\lambda l_1}{2a_1}\right) + 2\varepsilon_{12} \sin\left(\frac{\lambda l_1}{2a_1}\right) \cdot \cos\left(\frac{\lambda h}{a_2}\right) \right] + \\ & + 2 \sin\left(\frac{\lambda l_2}{2a_3}\right) \left[\cos\left(\frac{\lambda h}{a_2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\lambda l_1}{2a_1}\right) - 2\varepsilon_{12} \sin\left(\frac{\lambda h}{a_2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\lambda l_1}{2a_1}\right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\varepsilon_{12} = \nu_1 a_2 / (\nu_2 a_1), \quad \varepsilon_{23} = \nu_2 a_3 / (\nu_3 a_2),$$

$$y_3(x, \lambda) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\lambda l_2}{2a_3}\right) \cdot \cos\frac{\lambda}{a_1}(x - \pi R_1), & x \in I_1, \\ \cos\left(\frac{\lambda l_2}{2a_3}\right) \left[\cos\left(\frac{\lambda l_1}{2a_1}\right) \cdot \cos\left(\frac{\lambda x}{a_2}\right) - 2\varepsilon_{12} \sin\left(\frac{\lambda l_1}{2a_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\lambda x}{a_2}\right) \right], & x \in I_2, \\ \left[\cos\left(\frac{\lambda h}{a_2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\lambda l_1}{2a_1}\right) - 2\varepsilon_{12} \sin\left(\frac{\lambda h}{a_2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\lambda l_1}{2a_1}\right) \right] \cos\frac{\lambda}{a_3}(x - h - \pi R_2), & x \in I_3, \end{cases} \quad (3.18)$$

где $\lambda = \lambda_n^{(3)}$ – корни уравнения (3.17).

Искомая температура будет представлена формулой

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \\ u_3(x,t) \end{bmatrix} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot y_1(x, \lambda_n^{(1)}) \cdot e^{-(\lambda_n^{(1)})^2 t} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot y_2(x, \lambda_n^{(2)}) \cdot e^{-(\lambda_n^{(2)})^2 t} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot y_3(x, \lambda_n^{(3)}) \cdot e^{-(\lambda_n^{(3)})^2 t} + c_0. \end{aligned}$$

Начальные условия приводят к равенству

$$\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot y_1(x, \lambda_n^{(1)}) + b_n \cdot y_2(x, \lambda_n^{(2)}) + c_n \cdot y_3(x, \lambda_n^{(3)}) \right), \quad (3.19)$$

из которого надо найти коэффициенты a_n , b_n и c_n .

В силу того, что функции $\sin(\lambda_n^{(1)}x/a_1)$ и $\sin[\lambda_n^{(2)}(x-h-\pi R_2)/a_2]$ – нечетные функции соответственно на отрезках $[0, l_1]$ и $[h, h+l_2]$ относительно середин этих отрезков, то выделим в функциях $f_1(x)$ и $f_3(x)$ нечетные составляющие, как это было сделано в предыдущем пункте с функцией $f_2(x)$:

$$f_1(x) = f_{1H}(x) + f_{1r}(x), \quad f_3(x) = f_{3H}(x) + f_{3r}(x).$$

Разложим нечетные функции $f_{1H}(x)$ и $f_{3H}(x)$ по функциям $\sin(\lambda_n^{(1)}x/a_1)$ и $\sin[\lambda_n^{(2)}(x-h-\pi R_2)/a_2]$ соответственно. Таким образом, определяем коэффициенты a_n и b_n . Из (3.19) теперь находим

$$[f_{1r}(x), f_2(x), f_{3r}(x)]^T = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot y_3(x, \lambda_n^{(3)}). \quad (3.20)$$

Для определения коэффициентов c_n введем замену: $x = -x_1$ на I_1 и $x = x_1$ на $I_2 \cup I_3$. Тогда (3.20) запишется в виде

$$[f_{1r}(-x_1), f_2(x_1), f_{3r}(x_1)]^T = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z(x_1, \lambda_n^{(3)}), \quad -l_1/2 \leq x_1 \leq h+l_2/2, \quad (3.21)$$

где $z(x_1, \lambda)$ – результат замены в (3.20).

Функция $z(x_1, \lambda)$ представляет собой собственную функцию спектральной задачи с двумя точками сопряжения:

$$\begin{aligned} z'' + (\lambda/a_k)^2 z = 0, \quad z'(-\pi R_1) = z'(h + \pi R_2) = 0, \quad z(-0) = z(+0), \\ z(h-0) = z(h+0), \quad z'(-0) = (\nu_2/2\nu_1)z'(h+0), \quad z'(h-0) = (2\nu_3/\nu_2)z'(h+0), \end{aligned} \quad (3.22)$$

а λ – корень уравнения (3.17).

Собственные значения задачи (3.22) вещественные и простые, а собственные функции ортогональны с весом и образуют полную систему [4]. Коэффициенты c_n находятся так же, как и b_n в предыдущем пункте.

4. Стержни, составленные из окружностей

4.1. В задаче, схематично изображенной на рис. 1, д, краевых условий нет, а условия сопряжения будут такими:

$$\begin{aligned} X_1(0) = X_1(l_1), \quad X_2(0) = X_2(l_2), \quad X_1(0) = X_2(0), \quad l_1 = 2\pi R_1, \quad l_2 = 2\pi R_2; \\ \nu_1(X_1'(0) - X_1'(l_1)) + \nu_2(X_2'(0) - X_2'(l_2)) = 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $X_k(x)$ удовлетворяет уравнению $X_k'' + (\lambda/a_k)^2 X_k = 0$, а $u_k(x, t) = X_k(x) \cdot e^{-\lambda^2 t}$ ($k = 1, 2$). Функцию $X_k(x)$ выбираем в виде

$$X_k(x) = A_k \cdot \sin(\lambda x/a_k) + B_k \cdot \cos(\lambda x/a_k), \quad k = 1, 2.$$

Для задачи (4.1) имеем собственные функции и собственные значения:

$$1. \sin(\lambda l_1/2a_1) = 0, \quad \lambda_n^{(1)} = na_1/R_1 \text{ при } \sin(\lambda l_2/2a_2) \neq 0,$$

$$y_1(x, \lambda_n^{(1)}) = \begin{cases} \sin(\lambda_n^{(1)}x/a_1), & x \in I_1 = (0 \leq x \leq l_1), \\ 0, & x \in I_2 = (0 \leq x \leq l_2); \end{cases}$$

$$2. \sin(\lambda l_2/2a_2) = 0, \quad \lambda_n^{(2)} = na_2/R_2 \text{ при } \sin(\lambda l_1/2a_1) \neq 0,$$

$$y_2(x, \lambda_n^{(2)}) = \begin{cases} 0, & x \in I_1, \\ \sin(\lambda_n^{(2)}x/a_2), & x \in I_2; \end{cases}$$

$$3. \sin(\lambda l_1/2a_1) \neq 0, \quad \sin(\lambda l_2/2a_2) \neq 0, \quad \varepsilon_{12} = v_1 a_2 / (v_2 a_1),$$

$$\varepsilon_{12} \sin \lambda s_1 \cdot \cos \lambda s_2 + \sin \lambda s_2 \cdot \cos \lambda s_1 = 0, \tag{4.2}$$

$$y_3(x, \lambda) = \begin{cases} \cos \lambda s_2 \cdot \cos[\lambda(x - \pi R_1)/a_1], & x \in I_1, \\ \cos \lambda s_1 \cdot \cos[\lambda(x - \pi R_2)/a_2], & x \in I_2, \quad l_i/2a_i = s_i, \end{cases}$$

$\lambda = \lambda_n^{(3)} \geq 0$ – корни уравнения (4.2).

Решение задачи теплопроводности в соответствии с методом Фурье будет таким:

$$\begin{bmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot y_1(x, \lambda_n^{(1)}) \cdot e^{-(\lambda_n^{(1)})^2 t} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot y_2(x, \lambda_n^{(2)}) \cdot e^{-(\lambda_n^{(2)})^2 t} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot y_3(x, \lambda_n^{(3)}) \cdot e^{-(\lambda_n^{(3)})^2 t}.$$

Начальные условия приводят к равенству

$$\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot y_1(x, \lambda_n^{(1)}) + b_n \cdot y_2(x, \lambda_n^{(2)})) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot y_3(x, \lambda_n^{(3)}). \tag{4.3}$$

Как и в предыдущей задаче, из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ выделим слагаемые, нечетные относительно серединных точек $x = \pi R_1$ и $x = \pi R_2$ окружностей I_1 и I_2 , и разложим эти слагаемые соответственно по системам $\{\sin(\lambda_n^{(1)}x/a_1)\}$ и $\{\sin(\lambda_n^{(2)}x/a_2)\}$. В результате найдем коэффициенты a_n и b_n .

Для нахождения c_n сделаем замену: $x_1 = -x$ на I_1 и $x_1 = x$ на I_2 . Тогда вместо (4.3) получим

$$\begin{bmatrix} f_{1r}(-x_1) \\ f_{2r}(x_1) \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z(x_1, \lambda_n^{(3)}), \quad z(x_1, \lambda) = \begin{cases} \cos \lambda s_2 \cdot \cos[\lambda(x_1 + \pi R_1)/a_1], & x_1 \in I'_1, \\ \cos \lambda s_1 \cdot \cos[\lambda(x_1 - \pi R_2)/a_2], & x_1 \in I'_2, \end{cases}$$

где $I'_1 = (-\pi R_1, 0)$, $I'_2 = (0, \pi R_2)$, а $f_{1r}(x)$, $f_{2r}(x)$ – четные части функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ относительно серединных точек окружностей.

Функция $z(x_1, \lambda)$ удовлетворяет уравнению $z''_k + (\lambda/a_k)^2 z_k = 0$, крайевым условиям $z'(-\pi R_1) = z'(\pi R_2) = 0$ и условиям сопряжения $z(-0) = z(+0)$, $v_1 \cdot z'(-0) =$

$=v_2 \cdot z'(+0)$, $\lambda = \lambda_n^{(3)}$ – корень уравнения (4.2). Полнота и ортогональность с весом собственных функций этой спектральной задачи доказаны в работе [4]. Коэффициенты c_n находим по классическим формулам Эйлера.

4.2. В случае, схематично изображенном на рис. 1, е, краевых условий нет, но есть два узла. Начало координат поместим в верхнем узле. Звенья – разнородные полуокружности радиуса R , их число равно N . Ради упрощения задачи положим $a_k = a$, но v_k – разные. Решение для $X_k(x)$ с учетом условий сопряжения в двух узлах принимаем в виде

$$X_k(x) = A_k \cdot \sin \lambda_n x + B \cdot \cos \lambda_n x, \quad k = \overline{1, N}, \quad \lambda_n = n\pi/l, \quad l = \pi R. \quad (4.4)$$

$$\text{Тогда } u_k(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_k(n) \cdot \sin \lambda_n x + B(n) \cdot \cos \lambda_n x) \cdot e^{-\lambda_n^2 a^2 t}, \quad k = \overline{1, N}.$$

Из начального условия получаем

$$f_k(x) = F(x) + \varphi_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_k(n) \cdot \sin \lambda_n x + B(n) \cdot \cos \lambda_n x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4.5)$$

$$\text{где } F(x) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^N v_k \cdot f_k(x), \quad \varphi_k(x) = f_k(x) - F(x), \quad m = \sum_{k=1}^N v_k,$$

$$v_1 \varphi_1(x) + v_2 \varphi_2(x) + \dots + v_N \varphi_N(x) \equiv 0 \quad \text{на } 0 \leq x \leq l.$$

В левой части (4.5) предварительно проведена симметризация системы функций $f_k(x)$ в соответствии с условиями сопряжения в точках $x=0$ и $x=l$

$$\sum_{k=1}^N v_k X'_k(0) = \sum_{k=1}^N v_k X'_k(l) = 0 \quad \text{или} \quad \text{вытекающим из них условием}$$

$$v_1 A_1 + v_2 A_2 + \dots + v_N A_N = 0.$$

Функцию $F(x)$ разложим по $\cos(nx/R)$, а $\varphi_k(x)$ – по $\sin(nx/R)$:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B(n) \cdot \cos(nx/R), \quad \varphi_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_k(n) \cdot \sin(nx/R).$$

Коэффициенты $A_k(n)$ и $B(n)$ находятся элементарно. Полнота системы собственных функций задачи теплопроводности очевидна.

Так же просто решается задача в случае, когда звенья стержневой системы – не полуокружности, а равные дуги окружностей одного радиуса.

Выводы

1. Классический метод разделения переменных Фурье распространен на новый класс нестационарных задач теплопроводности для неоднородных стержней, составленных из прямолинейных и круговых звеньев.

2. В каждой из рассмотренных задач указан прием разложения векторных начальных функций по векторным собственным функциям неклассических задач Штурма – Лиувилля.

3. Дан положительный ответ на вопрос о полноте системы векторных соб-

ственных функций новых спектральных задач и сходимости разложений по этим системам.

4. Результаты остаются справедливыми для случая произвольно изогнутых звеньев.

Список литературы

1. Кошляков, Н.С. Основные дифференциальные уравнения математической физики [Текст] / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.Н. Смирнов. – М.: Физматгиз, 1962. – 712 с.

2. Дульнев, Г.Н. Методы расчета теплового режима приборов [Текст] / Г.Н. Дульнев, В.Г. Парфенов, А.В. Сигалов. – М.: Радио и связь, 1990. – 312 с.

3. Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел [Текст] / Г. Карслоу, Д. Егер. – М.: Наука, 1964. – 487 с.

4. Проценко, В.С. Некоторые обобщения в теории ортогональных разложений [Текст] / В.С. Проценко // Математические методы анализа динамических систем. – Х.: ХАИ. – 1977. – Вып. 1. – С. 3 – 13.

5. Ефимова, И.Т. Об одном обобщении интегральной теоремы Фурье и её приложениях [Текст] / И.Т. Ефимова, Я.С. Уфлянд // ПММ. – 1969. – Т.33. – Вып. 5. – С. 941 – 944.

Рецензент: д-р. физ.-мат. наук, проф. В.А. Меньшиков, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков

Поступила в редакцию 10.01.12

Метод Фур'є у нестационарних задачах теплопровідності багатоконпонентних стрижневих систем

Отримано розв'язки нового класу задач про розрахунок теплових нестационарних полів у стрижневих системах, які складені з різнорідних ланок. Самі ланки являють собою відрізки прямих або кола. На такі стрижневі системи розповсюджено класичний метод розділення змінних Фур'є.

Ключові слова: багатоконпонентні стрижневі системи, метод Фур'є, нестационарне теплове поле, початкові умови, розкладання в ряди за власними векторними функціями.

Fourier method in the nonstationary thermoconductivity problems of multicomponent bar systems

The solutions of a new class of problems on the calculation of nonstationary thermal fields in the bar systems, composed of heterogeneous links, are obtained. The links themselves are segments of straight lines or circles. Classical Fourier method of separation of variables is extended to on such bar systems.

Keywords: multicomponent bar systems, Fourier method, nonstationary thermal field, initial conditions, expansion in a series on the vector eigenfunctions.