УДК 514, 519.6

В. Ф. Сорокин

Экономичная форма представления В-сплайнов в инженерных приложениях

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»

Рассмотрена проблема повышения эффективности геометрического моделирования кривых и поверхностей сплайн-функциями в автоматизированных системах технологической подготовки производства. Отмечено, что в инженерных приложениях, связанных с созданием технологических систем реального времени, предпочтительно использование нерекурсивных форм представления базисных сплайнов. Приведен алгоритм получения экономичных с точки зрения вычислительных затрат уравнений В-сплайнов. Получены алгебраические уравнения базисных сплайнов до девятой степени включительно.

Ключевые слова: геометрическая модель, аппроксимация, полином, сплайн-функция.

В настоящее время в промышленности возросла потребность в повышении эффективности и качества производства сложнофасонных деталей. Проектирование этих деталей осуществляют с помощью систем автоматизированного проектирования, содержащих модуль геометрического моделирования поверхностей сплайн-функциями, а их изготовление так или иначе связано с применением систем ЧПУ, лучшие из которых позволяют задавать траектории движения инструмента с помощью сплайнов. Однако пока каноническая форма представления кривых сплайн-функциями отсутствует, что свидетельствует об актуальности продолжения исследований в этом направлении.

Идея аппроксимировать кривые кусочно-полиномиальными функциями, составленными из многочленов одной и той же невысокой степени, впервые появилась в статье Шёнберга, который и ввел сплайны в математику [1]. В дальнейшем сплайны подвергались многочисленным и всесторонним исследованиям. Соответствующая литература насчитывает тысячи наименований, в том числе множество монографий (см. [2–8] и имеющуюся там библиографию).

Сплайном степени n дефекта v называется кусочно-полиномиальная функция $S_n(x)$, состоящая из множества участков полиномов степени n, сопряженных на границах участков до $n - v$ производной включительно.

Всякий сплайн $S_n(x)$ может быть единственным образом записан в виде обобщенного многочлена

$$S_n(x)=\sum_i C_i B_n^i(x), \tag{1}$$

где C_i – действительные коэффициенты; $B_n^i(x)$ – базисные финитные функции [2].

Эти функции получили название *B-spline*, а формулу (1) называют представлением сплайна через В-сплайны.

Универсальное рекурсивное определение функций $B_n^i(x)$ было представлено независимо в работах [9] и [10] и имеет вид

$$B_n^i(x)=\frac{(x-x_i)}{(x_{i+n}-x_i)}\cdot B_{n-1}^i(x)+\frac{(x_{i+n+1}-x)}{(x_{i+n+1}-x_{i+1})}\cdot B_{n-1}^{i+1}(x), \tag{2}$$

где $B_0^i(x) = \begin{cases} 1 & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & x \notin [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$ – сплайн-функция нулевой степени.

Эту формулу Кокса – де Бора в настоящее время успешно используют для вычисления базисных функций в большинстве инженерных приложений.

В то же время нельзя не отметить, что рекурсивное вычисление функции (2) создает большую вычислительную нагрузку на компьютер, особенно при росте n. Поэтому во многих инженерных приложениях, связанных, например, с созданием систем реального времени, предпочтительно использовать явные, экономичные с точки зрения вычислительных затрат, выражения для функций $B_n^i(x)$ конкретной степени.

В работе [11] приведены нерекурсивные формулы для базисных функций $B_n^0(x)$ до третьей степени, в работе [12] – до пятой, а в работе [13] – до шестой. Однако математическое представление этих функций не оптимально с точки зрения минимизации вычислительных затрат.

По нашему мнению, самым экономичным представлением, которое предлагается считать каноническим представлением B-сплайна степени n, является базисная финитная функция $B_n(x)$, симметричная относительно оси ординат, с шагом между узлами сетки, равным единице.

В работе [14] показаны графики таких функций до шестой степени, однако не приводятся их математические выражения, а в работах [8, 15, 16, 17] представлены и формулы и графики, но только для B-сплайнов первой и третьей степени.

Поэтому **целью данной статьи** является получение экономичного (канонического) представления B-сплайнов до девятой степени включительно.

Искомое представление B-сплайна степени *n* будем строить, используя рекурсивную формулу (2). Механизм получения функции $B_n^i(x)$ на базе функций $B_{n-1}^i(x)$ и $B_{n-1}^{i+1}(x)$ для *n*=2 и *n*=5 проиллюстрирован графически на рис. 1 и 2. Очевидно, что этот же механизм можно использовать и для алгебраического вывода соответствующих формул.

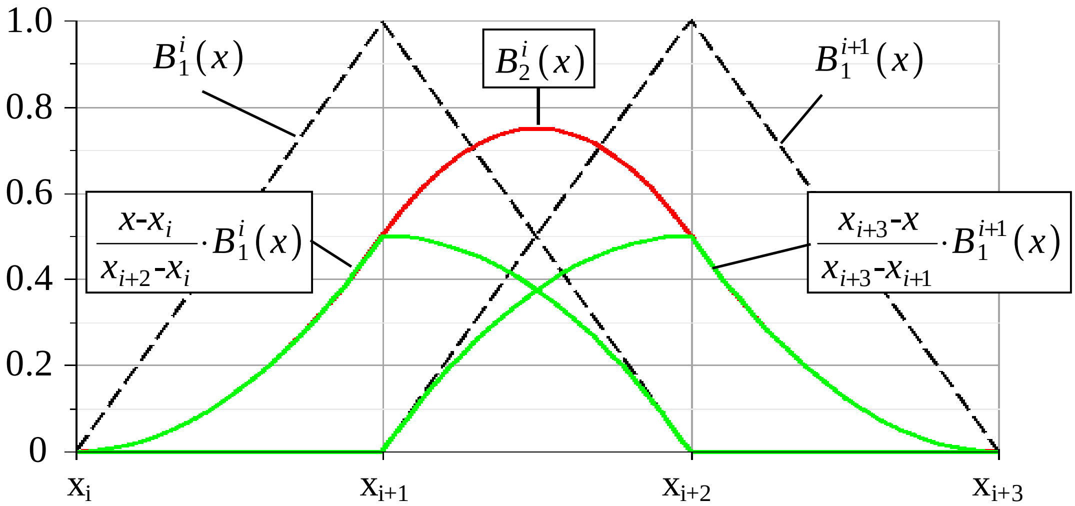

Рис. 1. Иллюстрация образования B-сплайна второй степени

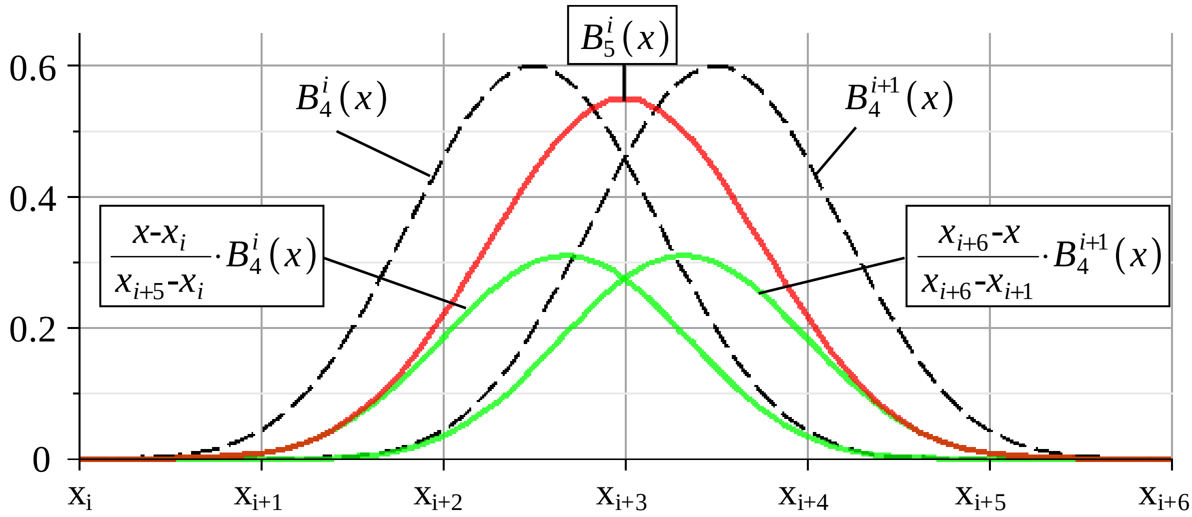

Рис. 2. Иллюстрация образования B-сплайна пятой степени

Рассмотрим равномерную сетку узлов с шагом, равным единице, т.е. $x_i = i$. В этом случае рекурсивная формула (2) примет вид

$$B_n^i(x) = \frac{(x-i)\cdot B_{n-1}^i(x) + (i+n+1-x)\cdot B_{n-1}^{i+1}(x)}{n} . \tag{3}$$

Эта функция симметрична относительно прямой $x=i+(n+1)/2$. Следовательно функцию $B_n(x)$, симметричную относительно оси ординат, получим из условия

$$B_n(x) = B_n^i\left(x+i+\frac{n+1}{2}\right) \tag{4}$$

Для упрощения дальнейших вычислений введем вспомогательную функцию $Q_n^i(x)$, которая также является сплайн-функцией степени n и определяется рекурсивной формулой

$$Q_n^i(x) = (x-i)\cdot Q_{n-1}^i(x) + (i+n+1-x)\cdot Q_{n-1}^{i+1}(x), \tag{5}$$

где $$Q_0^i(x) = \begin{cases} 1 & x \in [i, i+1] \\ 0 & x \notin [i, i+1] \end{cases}$$ – сплайн-функция нулевой степени. (6)

Последовательно применяя эту рекурсивную формулу, можно получить сплайн-функцию $Q_n^i(x)$ степени n, выраженную через сплайн-функцию $Q_0^i(x)$ нулевой степени, а именно:

$$Q_n^i(x) = \sum_{k=i}^{i+n-1} A_n^k(x)\cdot Q_0^k(x),$$

$$Q_n^{i+1}(x) = \sum_{k=i}^{i+n-1} A_n^k(x-1)\cdot Q_0^{k+1}(x) ,$$

где $A_n^k(x) = a_{k,n}\cdot x^n + a_{k,n-1}\cdot x^{n-1} + \ldots + a_{k,1}\cdot x + a_{k,0}$ – некоторый полином степени n.

С учетом (5) формула (3) примет вид

$$B_n^i(x) = \frac{1}{n!}\cdot Q_n^i(x) . \tag{7}$$

Чтобы вывести явные выражения для базисных сплайнов различных степеней, нам достаточно рассмотреть случай, когда $i = 0$. Тогда с учетом (4) и (3) окончательно получим искомую формулу для вычисления базисного сплайна

$$B_n(x)=B_n^0\left(x+\frac{n+1}{2}\right), \tag{8}$$

где
$$B_n^0(x)=\frac{1}{n!}\cdot\left[x\cdot Q_{n-1}^0(x)+(n+1-x)\cdot Q_{n-1}^1(x)\right]. \tag{9}$$

Эта функция является В-сплайном и обладает рядом важных свойств, используемых в теории приближений, а именно:

1. $B_n(x)$ – финитная функция, не равная нулю на ограниченном участке оси абсцисс:

$$B_n(x)=\begin{cases} >0 & x\in[-(n+1)/2,(n+1)/2] \\ \equiv 0 & x\notin[-(n+1)/2,(n+1)/2] \end{cases}.$$

2. $B_n(x)$ – четная функция, симметричная относительно оси ординат:

$$B_n(-x) = B_n(x).$$

3. Сумма $n+1$ полиномов, из которых «склеена» функция $B_n(x)$, образует прямую линию, параллельную оси абсцисс, на расстоянии от неё, равном единице.

$$\sum_{i=0}^{n} B_n[x-i+(n-1)/2] = \sum_{i=-(n-1)/2}^{(n+1)/2} B_n[x-i] \equiv 1, \quad \forall x \in [0,1].$$

4. Площадь фигуры, ограниченной функцией $B_n(x)$, равна единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B_n(x)\,dx = \int_{-(n+1)/2}^{(n+1)/2} B_n(x)\,dx \equiv 1.$$

Используя приведенный алгоритм, получим экономичные с точки зрения вычислительных затрат алгебраические уравнения В-сплайнов $B_n(x)$ для $n=\overline{1,\,9}$.

***n*=1.** Применив формулу (5), запишем: $Q_1^0(x)=x\cdot Q_0^0(x)+(2\text{-}x)\cdot Q_0^1(x)$.
Откуда с учетом (6) и (8) получим

$$B_1^0(x) = \begin{cases} x & 0\le x<1 \\ 2-x & 1\le x\le 2 \\ 0 & x\notin[0,2] \end{cases}; \qquad B_1(x)=B_1^0(x+1)=\begin{cases} 1-|x| & |x|<1 \\ 0 & |x|\ge 1 \end{cases}. \tag{10}$$

***n*=2.** Для В-сплайна второй степени $B_2(x)=B_2^0(x+1.5)$ и вывод экономичного представления будет иметь вид

$$Q_2^0(x)=x\cdot Q_1^0+(3\text{-}x)\cdot Q_1^1=x\cdot\left[x\cdot Q_0^0+(2\text{-}x)\cdot Q_0^1\right]+(3\text{-}x)\cdot\left[(x\text{-}1)\cdot Q_0^1+(3\text{-}x)\cdot Q_0^2\right]=$$
$$=x^2\cdot Q_0^0+\left(\text{-}2x^2+6x\text{-}3\right)\cdot Q_0^1+(3\text{-}x)^2\cdot Q_0^2;$$

$$B_2^0(x)=\frac{1}{2}\cdot\begin{cases} x^2 & 0\le x<1 \\ -2x^2+6x\text{-}3 & 1\le x<2 \\ (3\text{-}x)^2 & 2\le x\le 3 \\ 0 & x\notin[0,3] \end{cases};\qquad B_2(x)=\frac{1}{2}\cdot\begin{cases} 1.5\text{-}2\cdot x^2 & |x|<0.5 \\ (1.5\text{-}|x|)^2 & 0.5\le|x|<1.5 \\ 0 & |x|\ge 1.5 \end{cases}. \qquad (11)$$

***n*=3.** Для B-сплайна третьей степени $B_3(x)=B_3^0(x+2)$ и вывод экономичного представления будет иметь вид

$$Q_3^0(x)=x\cdot Q_2^0+(4-x)\cdot Q_2^1=x\cdot\left[x^2\cdot Q_0^0+\left(-2x^2+6x-3\right)\cdot Q_0^1+(3-x)^2\cdot Q_0^2\right]+$$
$$+(4-x)\cdot\left[(x-1)^2\cdot Q_0^1+\left(-2(x-1)^2+6(x-1)-3\right)\cdot Q_0^2+(4-x)^2\cdot Q_0^3\right]=$$
$$=x^3\cdot Q_0^0+\left(-3x^3+12x^2-12x+4\right)\cdot Q_0^1+\left(3x^3-24x^2+60x-44\right)\cdot Q_0^2+(4-x)^3\cdot Q_0^3;$$

$$B_3^0(x)=\frac{1}{6}\cdot\begin{cases} x^3 & 0\le x<1 \\ \text{-}3x^3+12x^2\text{-}12x+4 & 1\le x<2 \\ 3x^3\text{-}24x^2+60x\text{-}44 & 2\le x<3 \\ (4\text{-}x)^3 & 3\le x\le 4 \\ 0 & x\notin[0,4] \end{cases};\qquad B_3(x)=\frac{1}{6}\cdot\begin{cases} 4\text{-}3\cdot(2\text{-}|x|)\cdot x^2 & |x|<1 \\ (2\text{-}|x|)^3 & 1\le|x|<2 \\ 0 & |x|\ge 2 \end{cases}; \qquad (12)$$

Формулы (10), (11), (12) для первых трех степеней базисных сплайн-функций совпадают с формулами, приведенными в работах [8, 11 – 13, 15 – 17], что подтверждает достоверность данного алгоритма.

Для увеличения компактности математических преобразований при выводе формул для $n\ge 4$ введем обозначения $\boldsymbol{y=x-1}$ и $\boldsymbol{x_a=|x|-a}$.

***n*=4.** Для B-сплайна четвертой степени при $B_4(x)=B_4^0(x+2.5)$ вывод экономичного представления имеет вид

$$Q_4^0(x)=x\cdot Q_3^0+(5-x)\cdot Q_3^1=$$
$$=x\cdot\left[x^3\cdot Q_0^0+\left(-3x^3+12x^2-12x+4\right)\cdot Q_0^1+\left(3x^3-24x^2+60x-44\right)\cdot Q_0^2+(4-x)^3\cdot Q_0^3\right]+$$
$$+(5-x)\cdot\left[y^3\cdot Q_0^1+\left(-3y^3+12y^2-12y+4\right)\cdot Q_0^2+\left(3y^3-24y^2+60y-44\right)\cdot Q_0^3+(4-y)^3\cdot Q_0^4\right]=$$
$$=x^4\cdot Q_0^0+\left(-4x^4+20x^3-30x^2+20x-5\right)\cdot Q_0^1+\left(6x^4-60x^3+210x^2-300x+155\right)\cdot Q_0^2+$$
$$+\left(-4x^4+60x^3-330x^2+780x-655\right)\cdot Q_0^3+(5-x)^3\cdot Q_0^4;$$

$$B_4^0(x)=\frac{1}{4!}\cdot\begin{cases} x^4 & 0\le x<1 \\ -4x^4+20x^3-30x^2+20x-5 & 1\le x<2 \\ 6x^4-60x^3+210x^2-300x+155 & 2\le x<3 \\ -4x^4+60x^3-330x^2+780x-655 & 3\le x<4 \\ (5-x)^4 & 4\le x\le 5 \\ 0 & x\notin[0,5] \end{cases};$$

$$B_4(x)=\frac{1}{4!}\cdot\begin{cases}14.375+6\cdot x^4-15\cdot x^2 & |x|<0.5\\ 11-4\cdot x_{0.5}^4-6\cdot x_{0.5}^2+12\cdot\left(x_{0.5}^3-x_{0.5}\right) & 0.5\le|x|<1.5\\ (2.5-|x|)^4 & 1.5\le|x|<2.5\\ 0 & |x|\ge 2.5\end{cases}. \qquad (13)$$

***n*=5.** Для В-сплайна пятой степени $B_5(x)=B_5^0(x+3)$:

$$Q_5^0(x)=x\cdot Q_4^0+(6-x)\cdot Q_4^1=$$
$$=x\cdot\left[\begin{array}{l}x^4\cdot Q_0^0+\left(-4x^4+20x^3-30x^2+20x-5\right)\cdot Q_0^1+\left(6x^4-60x^3+210x^2-300x+155\right)\cdot Q_0^2+\\ +\left(-4x^4+60x^3-330x^2+780x-655\right)\cdot Q_0^3+(5-x)^4\cdot Q_0^4\end{array}\right]+$$
$$+(6-x)\cdot\left[\begin{array}{l}y^4\cdot Q_0^1+\left(-4y^4+20y^3-30y^2+20y-5\right)\cdot Q_0^2+\left(6y^4-60y^3+210y^2-300y+155\right)\cdot Q_0^3+\\ +\left(-4y^4+60y^3-330y^2+780y-655\right)\cdot Q_0^4+(5-y)^4\cdot Q_0^5\end{array}\right]=$$
$$=x^5Q_0^0+\left(-5x^5+30x^4-60x^3+60x^2-30x+6\right)Q_0^1+\left(10x^5-120x^4+540x^3-1140x^2+1170x-474\right)Q_0^2+$$
$$+\left(-10x^5+180x^4-1260x^3+4260x^2-6930x+4386\right)\cdot Q_0^3+$$
$$+\left(5x^5-120x^4+1140x^3-5340x^2+12270x-10974\right)\cdot Q_0^4+(6-x)^5\cdot Q_0^5;$$

$$B_5^0(x)=\frac{1}{5!}\cdot\begin{cases}x^5 & 0\le x<1\\ -5x^5+30x^4-60x^3+60x^2-30x+6 & 1\le x<2\\ 10x^5-120x^4+540x^3-1140x^2+1170x-474 & 2\le x<3\\ -10x^5+180x^4-1260x^3+4260x^2-6930x+4386 & 3\le x<4\\ 5x^5-120x^4+1140x^3-5340x^2+12270x-10974 & 4\le x<5\\ (6-x)^5 & 5\le x\le 6\\ 0 & x\notin[0,6]\end{cases};$$

$$B_5(x)=\frac{1}{5!}\cdot\begin{cases}66+10\cdot(3-|x|)\cdot x^4-60\cdot x^2 & |x|<1\\ 26-20\cdot\left(x_1^4-x_1^2\right)+5\cdot\left(x_1^4+4\cdot x_1^2-10\right)\cdot x_1 & 1\le|x|<2\\ (3-|x|)^5 & 2\le|x|<3\\ 0 & |x|\ge 3\end{cases}. \qquad (14)$$

Далее промежуточные выкладки опущены из-за громоздкости.

***n*=6.** Для В-сплайна шестой степени $B_6(x)=B_6^0(x+3.5)$;

$$B_6^0(x)=\frac{1}{6!}\cdot\begin{cases} x^6 & 0\le x<1 \\ -6x^6+42x^5-105x^4+140x^3-105x^2+42x-7 & 1\le x<2 \\ 15x^6-210x^5+1155x^4-3220x^3+4935x^2-3990x+1337 & 2\le x<3 \\ -20x^6+420x^5-3570x^4+15680x^3-37590x^2+47040x-24178 & 3\le x<4 \\ 15x^6-420x^5+4830x^4-29120x^3+96810x^2-168000x+119182 & 4\le x<5 \\ -6x^6+210x^5-3045x^4+23380x^3-100065x^2+225750x-208943 & 5\le x<6 \\ (7-x)^6 & 6\le x\le 7 \end{cases};$$

$$B_6(x)=\frac{1}{6!}\cdot\begin{cases} 367.9375-20x^6-105\cdot x^4+288.75\cdot x^2 & |x|<0.5 \\ 302+15\cdot\left(x_{0.5}^4+2\cdot x_{0.5}^2-10\right)\cdot x_{0.5}^2-20\cdot\left(3x_{0.5}^4-8\cdot x_{0.5}^2+12\right)\cdot x_{0.5} & 0.5\le|x|<1.5 \\ 57-3\cdot\left(2x_{1.5}^4+15\cdot x_{1.5}^2-45\right)\cdot x^2+10\cdot\left(3x_{1.5}^4-2\cdot x_{1.5}^2-15\right)\cdot x_{1.5} & 1.5\le|x|<2.5 \\ (3.5-|x|)^6 & 2.5\le|x|<3.5 \\ 0 & |x|\ge 3.5 \end{cases}; \quad (15)$$

***n*=7.** Для B-сплайна седьмой степени. $B_7(x)=B_7^0(x+4)$;

$$B_7(x)=\frac{1}{7!}\begin{cases} 2416-35\cdot\left((4-|x|)\cdot x^4-16\cdot x^2+48\right)\cdot x^2 & |x|<1 \\ 1191+105\cdot\left(x_1^4-3\cdot x_1^2+3\right)\cdot x_1^2-7\cdot\left(3\cdot x_1^6+15\cdot x_1^4-95\cdot x_1^2+245\right)\cdot x_1 & 1\le|x|<2 \\ 120-42\cdot\left(x_2^4-12\right)\cdot x_2^2+7\cdot\left(x_2^6+12\cdot x_2^4-40\cdot x_2^2-56\right)\cdot x_2 & 2\le|x|<3 \\ (4-|x|)^7 & 3\le|x|<4 \\ 0 & |x|\ge 4 \end{cases}. \quad (16)$$

***n*=8.** Для B-сплайна восьмой степени. $B_8(x)=B_8^0(x+4.5)$;

$$B_8(x)=\frac{1}{8!}\begin{cases} 18261+99/128+\left(70\cdot x^6-630\cdot x^4+3386.25\cdot x^2-11379.375\right)\cdot x^2 & |x|<0.5 \\ 15619-56\left(x_{0.5}^6+2.5\left(x_{0.5}^4-9.5x_{0.5}^2+49\right)\right)x_{0.5}^2+280\left(x_{0.5}^6-5x_{0.5}^4+19x_{0.5}^2-35\right)x_{0.5} & 0.5\le|x|<1.5 \\ 4293+28\cdot\left(x_{1.5}^6+9\cdot\left(x_{1.5}^4-7.5\cdot x_{1.5}^2+21\right)\right)\cdot x_{1.5}^2-168\cdot\left(x_{1.5}^6-3\cdot x_{1.5}^4-3\cdot x_{1.5}^2+51\right)\cdot x_{1.5} & 1.5\le|x|<2.5 \\ 247-8\cdot\left(x_{2.5}^6+17.5\cdot\left(x_{2.5}^4-3.5\cdot x_{2.5}^2-11\right)\right)\cdot x_{2.5}^2+56\cdot\left(x_{2.5}^6+x_{2.5}^4-23\cdot x_{2.5}^2-17\right)\cdot x_{2.5} & 2.5\le|x|<3.5 \\ (4.5-|x|)^8 & 3.5\le|x|<4.5 \\ 0 & |x|\ge 4.5 \end{cases} \quad (17)$$

***n*=9.** Для B-сплайна девятой степени. $B_9(x)=B_9^0(x+5)$;

$$B_9(x)=\frac{1}{9!}\begin{cases} 156190-42\cdot\left(3\cdot(|x|-5)\cdot x^6+100\cdot x^4-570\cdot x^2+2100\right)\cdot x^2 & 0\le|x|<1 \\ 88234-84\cdot\left(\left(6x_1^6-34\cdot x_1^4+129\cdot x_1^2-66\right)\cdot x_1^2-\left(x_1^8+6x_1^6-69x_1^4+434x_1^2-1213.5\right)\cdot x_1\right) & 1\le|x|<2 \\ 14608+84\left(3x_2^6-8x_2^4-48x_2^2+408\right)x_2^2-12\left(3x_2^8+42x_2^6-357x_2^4+938x_2^2+3034.5\right)x_2 & 2\le|x|<3 \\ 502-24\cdot\left(3x_3^6+7x_3^4-115.5x_3^2-177\right)\cdot x_3^2+9\cdot\left(x_3^8+24x_3^6-84x_3^4-504x_3^2-246\right)\cdot x_3 & 3\le|x|<4 \\ (5-|x|)^9 & 4\le|x|<5 \\ 0 & |x|\ge 5 \end{cases} \quad (18)$$

Графики B-сплайнов $B_n(x)$ и $B_n^0(x)$ $n=\overline{1,\,9}$ показаны на рис. 3. и 4.

Для увеличения наглядности графики $B_n(x)$ при $n \geq 6$ показаны на интервале [-3, 3].

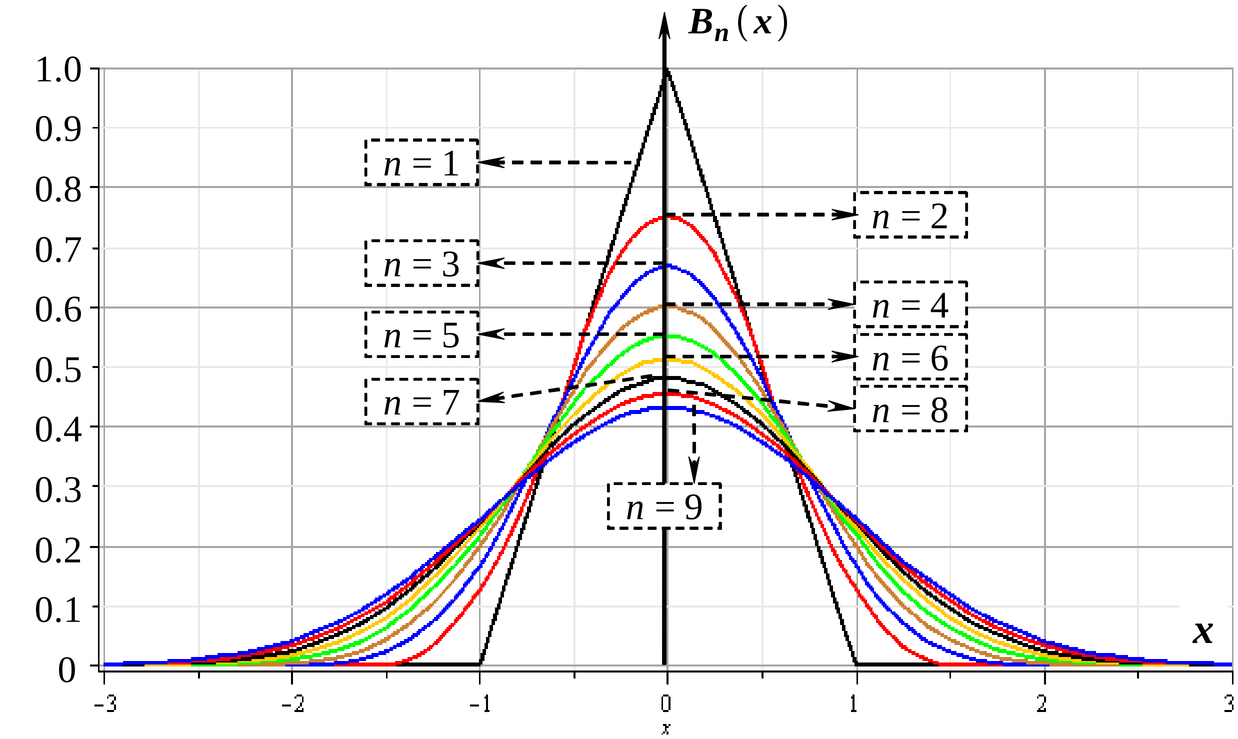

Рис. 3. Симметричное представление базисных В-сплайнов

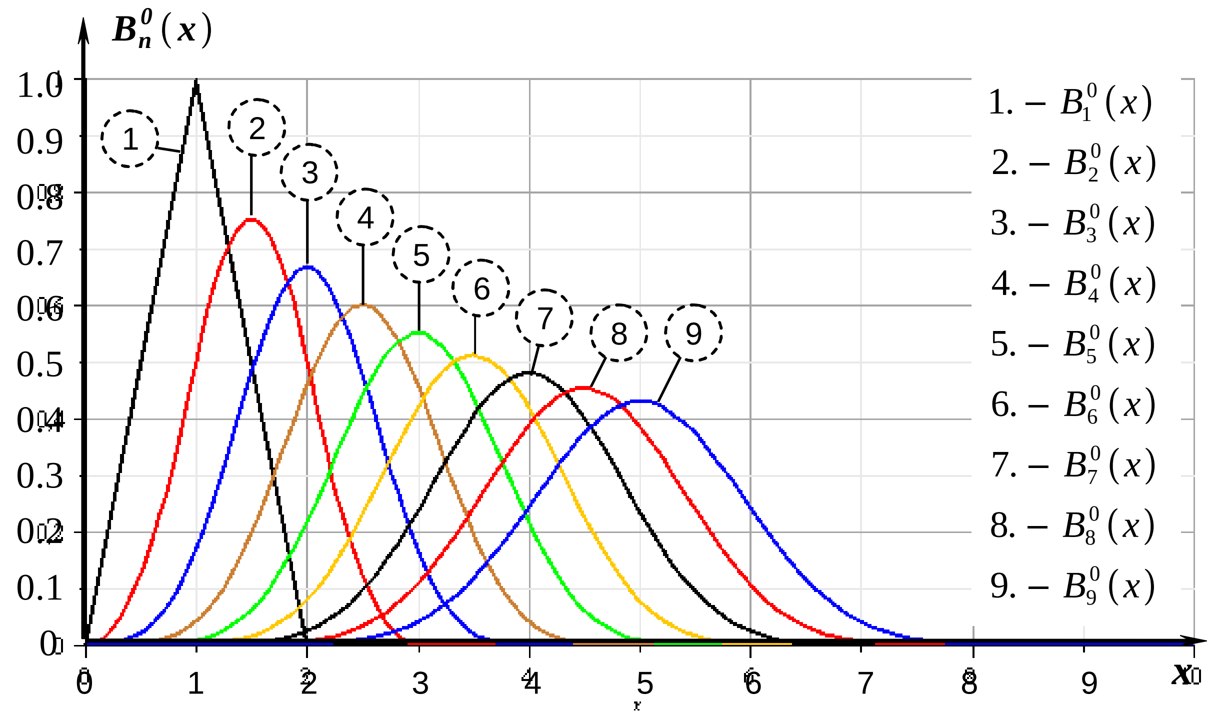

Рис. 4. Несимметричное представление В-сплайнов

Несмотря на некоторую громоздкость формул (13) – (18) (особенно при увеличении n), для вычисления значений этих функций требуется небольшое количество арифметических операций (см. таблицу).

Количество арифметических операций при вычислении B-сплайна

Степень B-сплайна	Сложений и вычитаний	Умножений и делений	Всего
$n=1$	1	0	1
$n=2$	1	3	4
$n=3$	2	4	6
$n=4$	5	6	11
$n=5$	6	8	14
$n=6$	7	9	16
$n=7$	8	11	19
$n=8$	9	12	21
$n=9$	10	13	23

Выводы

В результате проделанной работы получено алгебраическое (нерекурсивное), экономичное с точки зрения вычислительных затрат представление базисных сплайнов до девятой степени включительно.

Данное представление имеет большое практическое значение, так как:

– может использоваться в инженерных приложениях, связанных с созданием автоматизированных систем реального времени;

– допускает в случае необходимости увеличение степени аппроксимирующей сплайн-функции без значительного увеличения вычислительных затрат.

Список литературы

1. *Schoenberg, I. J.* Contributions to problem of approximation of equidistant data by analytic functions [Text] / I. J. Schoenberg // Quarterly of Applied Mathematics, 1946. – № 4. – Parts A and B. – P. 45 – 99, 112 – 141.
2. *Завьялов, Ю. С* Методы сплайн-функций [Текст] / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
3. *Де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам [Текст]: пер. с англ / К. Де Бор. – М.: Радио и связь, 1985. – 304 с.
4. *Piegle, L.* The NURBS book [Text] / L. Piegle, W. Tiller. – Berlin: Springer, 1997. – 578 p.
5. *Чуи, К.* Введение в вэйвлеты [Текст]: пер. с англ / К. Чуи. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
6. *Квасов, Б. И.* Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами [Текст] / Б. И. Квасов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 360 с.
7. *Schumaker, L. L.* Spline functions. Basic theory: Third edition [Text] / L. L. Schumaker. – New York: Cambridge University Press, 2007. – 582 p.
8. *Мацевитый, Ю. М.* Сплайн идентификация теплофизических процессов [Текст] / Ю. М. Мацевитый, Е. Н. Бут. – К.: Наук. думка, 2010. – 240 с.
9. *Cox M. G.* The Numerical Evaluation of B-Splines [Text] / M. G. Cox // Journal Inst. Maths. Applies, 1972. – № 10. – P. 134 – 149.
10. *De Boor, C.* On calculation with B-splines [Text] / C. De Boor // Journal of Approximation Theory, 1972. – № 6. – P. 50 – 62.
11. Buss, S. R. 3-D Computer Graphics. A Mathematical Introduction with OpenGL [Text] / Samuel R. Buss. – New York: Cambridge University Press, 2003. – 371 p.

12. *Демьянович, Ю. К.* Всплески и минимальные сплайны [Текст]: курс лекций / Ю. К. Демьянович. – СПб.: Санкт-Петербургский гос. ун-т, 2003. – 203 с.
13. *Salomon, D.* Curves and Surfaces for Computer Graphics [Text] / D. Salomon. – Northridge: Springer, 2006. – 460 p.
14. *Cashman, T. J.* NURBS-compatible subdivision surfaces: dissertation is submitted for the degree of Doctor of Philosophy / Thomas J. Cashman. –University of Cambridge, 2010. – 99 p.
15. *Сорокин, В. Ф.* Геометрическое моделирование сеточных функций методом оптимального отображения в пространство В-сплайнов [Текст] / В. Ф. Сорокин // Алгоритмическое обеспечение машинно-ориентируемого производства: всес. науч.-техн. сов., 18-22 сент. 1989 г.: тез. докл. – Х.: ХАИ, 1989. – С. 4 – 5.
16. *Сорокин, В. Ф.* Модифицированный метод приближения функций В-сплайнами [Текст] / В. Ф. Сорокин, В. А. Леховицер, Е. Н. Бут // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. ГАКУ «ХАИ». – Вып 3. – Х., 1999. – С. 28 – 38.
17. *Сорокин, В. Ф.* Математическая модель сложнофасонной поверхности для адаптивного программного управления металлообрабатывающим оборудованием [Текст] / В. Ф. Сорокин // Технологические системы. – 2002. – № 5 (16). – С. 44 – 51.

Рецензент: д. т. н., проф., гл. науч. сотр. Раисов Ю. А., ИПМмаш им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступила в редакцию 02.07.12

Економічна форма подання В-сплайнів в інженерних застосуваннях

Розглянуто проблему підвищення ефективності геометричного моделювання кривих і поверхонь сплайн-функціями в автоматизованих системах технологічної підготовки виробництва. Зазначено, що в інженерних застосуваннях, пов'язаних зі створенням технологічних систем реального часу, кращим є використання нерекурсивних форм подання базисних сплайнів. Наведено алгоритм одержання економічних з погляду обчислювальних витрат рівнянь В-сплайнів. Отримано алгебричні рівняння базисних сплайнів до дев'ятого ступеня включно.

Ключові слова: геометрична модель, апроксимація, поліном, сплайн-функція.

B-splines representation economical form in engineering applications

Effectiveness increase problem of geometric modeling of curves and surfaces by spline-functions in computer-aided systems of technological preproduction is considered. There is noted that use of nonrecursive forms of basic splines representation is preferable in engineering applications for real time technological systems. B-splines equations creation algorithm is shown. These equations are economical from the point of view of calculations number. Algebraic equations of basic splines to the ninth degree inclusive are created.

Keywords: geometric model, approximation, polynomial, spline-function.