

Нестационарные температурные поля в тонких составных пластинах и оболочках

*Харьковский национальный экономический университет
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»*

Дано решение неклассической спектральной задачи Штурма – Лиувилля на системе замкнутых петель, соединенных между собой в одной точке. Получены теорема о полноте системы собственных функций и формулы для коэффициентов разложения. Предложен метод нахождения точных решений нестационарных задач теплопроводности для тонких пластин и оболочек, опирающийся на указанную теорему. Отмечены возможные обобщения на другие родственные задачи.

Ключевые слова: неклассическая задача Штурма – Лиувилля, теорема о полноте, нестационарная задача теплопроводности, тонкие составные пластины и оболочки.

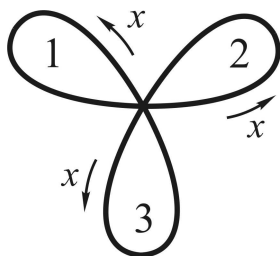
Расчету потенциальных полей в тонких цилиндрических, сферических и конических оболочках посвящены отдельные главы книги [1]. В работе [2] предложен метод решения некоторых новых задач об исследовании потенциальных полей в многолистных пластинах. Настоящая работа посвящена решению новых нестационарных задач теплопроводности для тонких составных оболочек и пластин. Рассмотрение этих задач стало возможным благодаря решенной авторами настоящей статьи неклассической векторной задаче Штурма – Лиувилля и теореме о разложении в ряды Фурье произвольной вектор-функции по собственным векторным функциям этой задачи. Проблемы расчета тепловых и электромагнитных полей возникают в теплофизике и энергетике [3, 4]. Предложенный в работе метод может быть использован при исследовании других задач математической физики.

1. Спектральная задача

Рассмотрим задачу о нахождении решения уравнения

$$y''(x) + \lambda^2 y(x) = 0, \quad 0 < x < l \quad (1.1)$$

на N замкнутых непересекающихся кривых (на рис. 1 их изображено три), соединенных в одной точке, при условиях



$$y_k(0) = y_k(l), \quad k = \overline{1, N}, \quad (1.2)$$

$$y_k(0) = y_{k+1}(0), \quad k = \overline{1, N-1}, \quad (1.3)$$

$$\sum_{k=1}^N \nu_k \cdot (y'_k(0) - y'_k(l)) = 0, \quad \nu_k > 0. \quad (1.4)$$

Рис. 1. Трехлепестковая роза

Здесь l – длина звена каждой петли, k – номер петли, x – дуговая координата, отсчитываемая от узла $x = 0$ против часовой стрелки, узел – общая точка петель.

Поставленную задачу будем трактовать как векторную задачу для N функций.

Первая задача – нахождение собственных значений и собственных функций задачи Штурма – Лиувилля (1.1) – (1.4). Вторая – установление полноты системы векторных собственных функций и нахождение коэффициентов разложения произвольной вектор-функции, заданной на совокупности связанных в одной точке петель, по системе собственных функций.

Положим

$$y_k(x) = A_k \cdot \sin \lambda x + B_k \cdot \cos \lambda x, \quad k = \overline{1, N}. \quad (1.5)$$

Условия сопряжения (1.2) – (1.4) приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} A_k \cdot \sin \lambda l - B_k \cdot (1 - \cos \lambda l) = 0, & k = \overline{1, N}, \\ B_k = B_{k+1}, & k = \overline{1, N-1}, \\ \sum_{k=1}^N \nu_k [A_k \cdot (1 - \cos \lambda l) + B_k \cdot \sin \lambda l] = 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Определитель этой системы $\Delta = 2^{N+1} \cdot N \cdot [\sin(\lambda l/2)]^{N+1} \cdot [\cos(\lambda l/2)]^{N-1}$.

Собственными значениями будут

$$\lambda_n^{(1)} = \frac{2\pi n}{l}, \quad \lambda_n^{(2)} = \frac{2\pi(n+1/2)}{l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

Соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$\bar{y}_1(x, \lambda_n^{(1)}, \bar{A}, B) = \begin{pmatrix} A_1(n) \\ A_2(n) \\ \vdots \\ A_N(n) \end{pmatrix} \cdot \sin \lambda_n^{(1)} x + B(n) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \cos \lambda_n^{(1)} x, \quad (1.8)$$

$$\bar{y}_2(x, \lambda_n^{(2)}, \bar{C}) = \begin{pmatrix} C_1(n) \\ C_2(n) \\ \vdots \\ C_N(n) \end{pmatrix} \cdot \sin \lambda_n^{(2)} x, \quad \sum_{k=1}^N \nu_k \cdot C_k(n) = 0.$$

Пусть на каждой петле с номером k задана функция $f_k(x)$. Вектор-функцию $\bar{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x))^T$ представим в виде разложения по системе собственных векторов (1.8):

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_N(x) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{y}_1(x, \lambda_n^{(1)}, \bar{A}, B) + \bar{y}_2(x, \lambda_n^{(2)}, \bar{C})], \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.9)$$

Система функций $\{\sin \lambda_n^{(1)} x\}$ ортогональна и полна на $(0, l)$ в классе функций, нечетных по аргументу $t = x - l/2$. Поэтому выделим нечетную по t вектор-функцию $\bar{f}_H(x)$ из $\bar{f}(x)$ и разложим каждую из ее компонент по $\sin \lambda_n^{(1)} x$. Таким способом найдем коэффициенты $A_k(n)$:

$$f_{kH}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_k(n) \cdot \sin \lambda_n^{(1)} x, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$A_k(n) = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f_{kH}(x) \cdot \sin \lambda_n^{(1)} x dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.10)$$

где $f_{kH}(x)$ – нечетная по $(x - l/2)$ часть функции $f_k(x)$.

Из (1.9) находим

$$f_{kч}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(B(n) \cdot \cos \lambda_n^{(1)} x + C_k(n) \cdot \sin \lambda_n^{(2)} x \right), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.11)$$

где $f_{kч}(x)$ – четная по $t = x - l/2$ составляющая функции $f_k(x)$.

Здесь использован тот факт, что всякая заданная на $(0, l)$ функция может быть представлена в виде суммы четной и нечетной по $t = x - l/2$ функций.

Справа в равенстве (1.11) стоят четные по t функции. Из этого равенства с учетом того, что $\sum_{k=1}^N \nu_k \cdot C_k(n) = 0$, найдем:

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^N \nu_k \cdot f_{kч}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B(n) \cdot \cos \lambda_n^{(1)} x, \quad 0 \leq x \leq l/2; \quad (1.12)$$

$$B(0) = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} F(x) dx, \quad B(n) = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} F(x) \cos \lambda_n^{(1)} x dx; \quad (1.13)$$

$$m = \sum_{k=1}^N \nu_k, \quad F(x) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^N \nu_k \cdot f_{kч}(x).$$

После нахождения $B(n)$ из (1.11) с учетом (1.12) получим

$$f_{kч}(x) - F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_k(n) \cdot \sin \lambda_n^{(2)} x, \quad 0 \leq x \leq l/2. \quad (1.14)$$

Так как система функций $\{ \sin \lambda_n^{(2)} x \}$ ортогональна и полна на $(0, l/2)$, то из (1.14) определим

$$C_k(n) = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} (f_{kч}(x) - F(x)) \cdot \sin \lambda_n^{(2)} x dx. \quad (1.15)$$

Все неизвестные коэффициенты в (1.9) найдены.

Имеет место **теорема**: собственные значения задачи Штурма – Лиувилля (1.1) – (1.4) вещественны, система собственных векторных функций полна на множестве векторных функций, заданных на совокупности соединенных в одной точке петель. Коэффициенты разложения определяются по формулам (1.13), (1.15). Сходимость ряда (1.9) такая же, как и у обычного ряда Фурье по тригонометрической системе.

2. Задача теплопроводности для тонкой N -полостной цилиндрической оболочки конечной длины

Прямые цилиндры конечной длины h настолько тонкие, что температуру по толщине считаем постоянной. Поперечное сечение цилиндра представляет собой систему замкнутых линий длины l – „ N -лепестковую розу” (см. рис. 1). Температурное поле в каждой отдельной оболочке с номером k удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} = \frac{\partial u_k}{a^2 \partial t}, \quad k = \overline{1, N}, \quad (2.1)$$

где x – дуговая координата; y – координата по образующей цилиндра.

В качестве краевых условий на линиях $y = 0$ и $y = h$ примем следующие:

$$u_k(x, 0, t) = f_k^{(0)}(x), \quad u_k(x, h, t) = f_k^{(h)}(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.2)$$

хотя и другие случаи исследуются аналогично.

Так как отдельные цилиндрические области соединены между собой по линии $x = 0$, $0 \leq y \leq h$, то на этой линии имеют место условия сопряжения полей

$$u_k(0, y, t) = u_{k+1}(0, y, t), \quad k = \overline{1, N-1}, \quad u_k(0, y, t) = u_k(l, y, t), \quad k = \overline{1, N}, \quad (2.3)$$

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial u_k}{\partial x} \Big|_{x=0} - \frac{\partial u_k}{\partial x} \Big|_{x=l} \right) \cdot v_k = 0, \quad (2.4)$$

где v_k – весовые коэффициенты для тепловых потоков.

В начальный момент $t = 0$ должны выполняться условия

$$u_k(x, y, 0) = g_k(x, y), \quad (x, y) \in S_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad (2.5)$$

где S_k – поверхность цилиндра с номером k .

Решение сформулированной задачи представим в виде суммы

$$u_k(x, y, t) = v_k(x, y) + w_k(x, y, t), \quad (2.6)$$

где $v_k(x, y)$ – решение стационарной задачи с краевыми условиями (2.2);

$w_k(x, y, t)$ – решение нестационарной задачи с нулевыми краевыми условиями и начальными условиями (2.5).

Для первой задачи положим $v_k(x, y) = e^{\lambda y} \cdot X_k(x)$. Тогда для $X_k(x)$ имеем задачу

$$\begin{aligned} X_k'' + \lambda^2 X_k &= 0, \quad X_k(0) = X_k(l), \quad k = \overline{1, N}, \\ X_k(0) &= X_{k+1}(0), \quad k = \overline{1, N-1}, \quad \sum_{k=1}^N (X_k'(0) - X_k'(l)) \cdot v_k = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

которая совпадает с рассмотренной ранее задачей (1.1) – (1.4).

Найденные в п. 1 результаты позволяют записать

$$\bar{v}(x, y) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\bar{y}_1(x, \lambda_n^{(1)}, \bar{A}, B) \cdot sh \lambda_n^{(1)} y + \bar{y}_1(x, \lambda_n^{(1)}, \bar{H}, K) \cdot ch \lambda_n^{(1)} y \right] +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\bar{y}_2(x, \lambda_n^{(2)}, \bar{C}) \cdot sh \lambda_n^{(2)} y + \bar{y}_2(x, \lambda_n^{(2)}, \bar{D}) \cdot ch \lambda_n^{(2)} y \right]. \quad (2.8)$$

Коэффициенты $\bar{C} = (C_1(n), C_2(n), \dots, C_N(n))$ и $\bar{D} = (D_1(n), D_2(n), \dots, D_N(n))$ в (2.8) связаны равенствами

$$\sum_{k=1}^N v_k \cdot C_k(n) = 0, \quad \sum_{k=1}^N v_k \cdot D_k(n) = 0.$$

Положим в (2.8) последовательно $y=0$ и $y=h$. В результате этого найдем

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left[\bar{y}_1(x, \lambda_n^{(1)}, \bar{H}, K) + \bar{y}_2(x, \lambda_n^{(2)}, \bar{D}) \right] = \overline{f^{(0)}}(x), \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \left[\bar{y}_1(x, \lambda_n^{(1)}, \bar{A}, B) \cdot sh \lambda_n^{(1)} h + \bar{y}_1(x, \lambda_n^{(1)}, \bar{H}, K) \cdot ch \lambda_n^{(1)} h \right] + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\bar{y}_2(x, \lambda_n^{(2)}, \bar{C}) \cdot sh \lambda_n^{(2)} h + \bar{y}_2(x, \lambda_n^{(2)}, \bar{D}) \cdot ch \lambda_n^{(2)} h \right] = \overline{f^{(h)}}(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (2.9) \end{aligned}$$

В последнем равенстве $\overline{f^{(0)}}(x)$ и $\overline{f^{(h)}}(x)$ – векторные функции, компонентами которых есть краевые функции $f_k^{(0)}(x)$ и $f_k^{(h)}(x)$.

Каждое из равенств (2.9) представляет собой равенство (1.9). По предложенной ранее в п. 1 методике определяем коэффициенты $H_k(n)$, $K(n)$, $D_k(n)$ и $A_k(n) \cdot sh \lambda_n^{(1)} h + H_k(n) \cdot ch \lambda_n^{(1)} h$, $B(n) \cdot sh \lambda_n^{(1)} h + K(n) \cdot ch \lambda_n^{(1)} h$, $C_k(n) \cdot sh \lambda_n^{(2)} h + D_k(n) \cdot ch \lambda_n^{(2)} h$ по формулам (1.10), (1.13), (1.15).

Таким образом, решения $v_k(x, y)$ найдены.

Для построения $w_k(x, y, t)$ сделаем подстановку в (2.1):

$$w_k(x, y, t) = X_k(x) \cdot e^{-\gamma^2 a^2 t} \cdot \sin \delta_m y, \quad \delta_m = m\pi/h. \quad (2.10)$$

В результате получим для $X_k(x)$ уравнение и условия сопряжения (2.7). Заметим, что $w_k(x, y, t)$ в виде (2.10) удовлетворяет нулевым краевым условиям при $y=0$ и $y=h$.

Функцию $\bar{w}(x, y, t)$ в соответствии с (2.10) запишем в виде

$$\begin{aligned} \bar{w}(x, y, t) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\delta_m^2 a^2 t} \cdot \sin \delta_m y \left\{ \bar{a}(m, n) \sin \lambda_n^{(1)} x + \bar{b}(m, n) \cos \lambda_n^{(1)} x \right\} \times \\ &\times e^{-r_n^2 t} + \bar{e}(m, n) \cdot \sin \lambda_n^{(2)} x \cdot e^{-s_n^2 t} \Big\}, \quad (2.11) \end{aligned}$$

$$\bar{a}(m, n) = (a_1, a_2, \dots, a_N)^T, \quad \bar{b}(m, n) = b(n)(1 \ 1 \ \dots \ 1)^T, \quad \bar{e}(m, n) = (e_1, e_2, \dots, e_N)^T,$$

$$\lambda_n^{(1)} = \frac{2\pi}{l}n, \quad \lambda_n^{(2)} = \frac{2\pi}{l}(n+1/2), \quad \sum_{k=1}^N e_k(m,n) \cdot \nu_k = 0, \quad r_n = a\lambda_n^{(1)}, \quad s_n = a\lambda_n^{(2)}.$$

При $t = 0$ из (2.6), (2.11) находим

$$\begin{pmatrix} \bar{g}_1(x,y) \\ \bar{g}_2(x,y) \\ \vdots \\ \bar{g}_N(x,y) \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \delta_m y \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} a_1(m,n) \\ a_2(m,n) \\ \vdots \\ a_N(m,n) \end{bmatrix} \cdot \sin \lambda_n^{(1)} x + b_{mn} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \cos \lambda_n^{(1)} x + \\ + \begin{bmatrix} e_1(m,n) \\ e_2(m,n) \\ \vdots \\ e_N(m,n) \end{bmatrix} \cdot \sin \lambda_n^{(2)} x, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (2.12)$$

где $a_k(m,n)$, b_{mn} , $e_k(m,n)$ подлежат определению, $\bar{g}_k(x,y) = g_k(x,y) - v_k(x,y)$.

Из (2.12) получаем

$$\begin{pmatrix} g_1^{(m)}(x) \\ g_2^{(m)}(x) \\ \vdots \\ g_N^{(m)}(x) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \cdot \sin \lambda_n^{(1)} x + b_{mn} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \cos \lambda_n^{(1)} x + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{pmatrix} \cdot \sin \lambda_n^{(2)} x, \quad (2.13)$$

$$0 \leq x \leq l,$$

$$g_k^{(m)}(x) = \frac{2}{h} \int_0^h \bar{g}_k(x,\xi) \cdot \sin \delta_m \xi d\xi, \quad \sum_{k=1}^N \nu_k \cdot e_k(m,n) = 0.$$

Равенство (2.13) есть равенство (1.9). В силу доказанной в п. 1 полноты системы собственных векторных функций (1.8) из (2.13) находим коэффициенты $a_k(m,n)$, b_{mn} , $e_k(m,n)$. Для этого следует воспользоваться формулами (1.10), (1.13), (1.15). Вторая часть задачи решена.

В конечном итоге формулы (2.7), (2.11) дают в сумме решение исходной задачи теплопроводности.

3. Задача теплопроводности для многолистной пластины, составленной из N полукругов

Стационарная часть решения этой задачи, т.е. функции $v_k(\rho, \varphi)$, приведены в работе [2]. Нестационарное слагаемое, т.е. функция $\bar{w}(x, y, t)$, может быть представлена в случае краевых условий Дирихле в виде

$$\bar{w}(\rho, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\lambda_{mn}\rho}{R}\right) \cdot e^{-\lambda_{mn}^2 a^2 t} \begin{bmatrix} A_1(n,m) \\ A_2(n,m) \\ \vdots \\ A_N(n,m) \end{bmatrix} \sin n\varphi + B_{nm} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cos n\varphi, \quad (3.1)$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi,$$

где $J_n(x)$ – функция Бесселя;

R – радиус полукругов;

λ_{mn} – положительные корни уравнения $J_n(\lambda) = 0$.

Коэффициенты $A_k(n, m)$ связаны между собой равенством [2]

$$v_1 A_1 + v_2 A_2 + \dots + v_N A_N = 0. \quad (3.2)$$

Начальное условие приводит к ряду

$$\bar{g}_k(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(\lambda_{mn}\rho/R) [A_k(n, m) \sin n\varphi + B(n, m) \cos n\varphi], \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad (3.3)$$

где $\bar{g}_k(\rho, \varphi) = g_k(\rho, \varphi) - v_k(\rho, \varphi)$.

Обозначим в (3.3)

$$f_k^{sn}(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} J_n(\lambda_{mn}\rho/R) \cdot A_k(n, m), \quad f^{cn}(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} J_n(\lambda_{mn}\rho/R) B(n, m). \quad (3.4)$$

Тогда (3.3) перейдет в равенство

$$\bar{g}_k(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_k^{sn}(\rho) \sin n\varphi + f^{cn}(\rho) \cos n\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \quad (3.5)$$

$$\sum_{k=1}^N f_k^{sn}(\rho) \cdot v_k = 0. \quad (3.6)$$

Обращаем ряд (3.5) с условием (3.6) по методике работы [2]. В результате этого найдем

$$f^{c0}(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(\rho, \theta) d\theta, \quad f^{cn}(\rho) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(\rho, \theta) \cos n\theta d\theta, \\ F(\rho, \theta) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^N \bar{g}_k(\rho, \theta) \cdot v_k, \quad m = \sum_{k=1}^N v_k, \quad (3.7) \\ f_k^{sn}(\rho) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [\bar{g}_k(\rho, \theta) - F(\rho, \theta)] \sin n\theta d\theta.$$

Равенство (3.6) будет удовлетворяться за счет выбора $F(\rho, \theta)$ [2]. После этого обращаем ряды (3.4) [5]. Имеем выражения для коэффициентов $A_k(n, m)$, $B(n, m)$:

$$\begin{pmatrix} A_k \\ B \end{pmatrix} = \frac{2}{R^2 J_{n+1}^2(\lambda_{mn})} \int_0^R \begin{pmatrix} f_k^{sn}(\rho) \\ f^{cn}(\rho) \end{pmatrix} \cdot \rho \cdot J_n(\lambda_{mn}\rho/R) d\rho, \quad (3.8)$$

где подынтегральные функции определены равенствами (3.7).

Окончательные выражения для $A_k(n, m)$, $B(n, m)$ получим после подстановки в (3.8) функций $f_k^{sn}(\rho)$, $f^{cn}(\rho)$, найденных по формуле (3.7). Этим решение задачи завершено.

4. Замечания и выводы

Замечание 1. Предложенным методом могут быть точно решены нестационарные задачи для тонких цилиндрических пластин и оболочек, поперечные сечения которых изображены на рис. 1 (а, б, в, г) в статье авторов [6]. Это следует из того, что в работе [6] найдены полные системы собственных функций соответствующих спектральных задач и формулы для коэффициентов разложения.

Замечание 2. С помощью приема симметризации системы функций [2] могут быть решены задачи с внутренними источниками тепла.

Замечание 3. Цилиндры могут быть полубесконечными или бесконечными, а вместо краевых условий Дирихле – краевые условия других типов [7].

Замечание 4. Вместо полукругов могут быть круговые полукольца [2] или прямоугольные листы [7].

Выводы

1. Рассмотрен новый класс задач нестационарной теплопроводности для составных пластин и оболочек.

2. Найдены собственные векторные функции задачи Штурма – Лиувилля для системы петель, соединенных в одной точке.

3. Установлены полнота системы векторных собственных функций и сходимость рядов Фурье по такой системе.

4. Найдены формулы для коэффициентов ряда Фурье по системе векторных собственных функций.

5. Получены точные решения нестационарных задач теплопроводности для составных цилиндров и многолистных составных пластин.

6. Указаны возможные обобщения и приложения к другим задачам.

Список литературы

1. Иоссель, Ю.Я. Расчет потенциальных полей в энергетике [Текст] / Ю.Я. Иоссель. – Л. : Энергия, 1978. – 350 с.

2. Проценко, В.С. Расчет потенциального поля в тонких многолистных пластинах, состоящих из круговых полуколец [Текст] / В.С. Проценко, Т.В. Денисова // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. ст. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ» – Вып. 46. – Х., 2010. – С. 189 – 198.

3. Дульнев, Г.Н. Теплообмен в радиоэлектронных аппаратах [Текст] / Г.Н. Дульнев, Э.М. Семяшкин. – Л. : Энергия, 1968. – 359 с.

4. Бухгольц, Г. Расчет электрических и магнитных полей [Текст] / Г. Бухгольц. – М. : Изд-во иностр. лит., 1961. – 712 с.

5. Толстов, Г.П. Ряды Фурье [Текст] / Г.П. Толстов. – М. : Наука, 1980. – 384 с.

6. Денисова, Т.В. Метод Фурье в нестационарных задачах теплопроводности многокомпонентных стержневых систем [Текст] / Т.В. Денисова, В.С. Проценко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. ст. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ» – Вып. 53. – Х., 2012. – С. 79 – 93.

7. Денисова, Т.В. Задачи идентификации и управления для многокомпонентных систем с распределенными параметрами [Текст] / Т.В. Денисова, В.С. Проценко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. ст. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ» – Вып. 45. – Х., 2010. – С. 215 – 232.

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. В.А. Меньшиков, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков

Поступила в редакцию 04.09.2012

Нестационарні температурні поля в тонких складених платівках і оболонках

Подано розв'язок неklasичної спектральної задачі Штурма – Ліувілля на системі замкнених петель, з'єднаних між собою в одній точці. Одержано теорему про повноту системи власних функцій і формули для коефіцієнтів розвинення в ряд. Запропоновано метод одержання точних розв'язків нестационарних задач теплопровідності для тонких платівок і оболонок, який спирається на зазначену теорему. Відмічено можливі узагальнення на інші споріднені задачі.

Ключові слова: неklasична задача Штурма – Ліувілля, теорема про повноту, нестационарні задачі теплопровідності, тонкі складені платівки і оболонки.

The nonstationary temperature fields in thin compound plates and shells

The solution of non-classical Sturm – Liouville spectral problem on the system of closed loops, which are connected to each other at one point, is given. A theorem on the completeness of the eigenfunctions and the formulas for the expansion coefficients are obtained. A method for finding of exact solutions of nonstationary thermal conductivity problems for thin plates and shells, based on this theorem, is proposed. Possible generalizations to other related problems are marked.

Keywords: non-classical Sturm – Liouville problem, theorem on the completeness, nonstationary thermal conductivity problem, thin compound plates and shells.