

## Равновесие ортотропной пластины, ослабленной двумя конечными прямолинейными разрезами

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»*

Предложен аналитический метод решения краевых задач теории упругости для тонкой ортотропной пластины, ослабленной двумя конечными прямолинейными разрезами. Он основан на применении соотношений между базисными решениями уравнения Лапласа в различных эллиптических системах координат и приводит к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений второго рода с экспоненциально убывающими матричными коэффициентами, что позволяет выполнить эффективный анализ напряженно-деформированного состояния вблизи концентраторов напряжений, в частности, получить простые асимптотические формулы для коэффициентов интенсивности нормальных напряжений.

**Ключевые слова:** ортотропная пластина, разрез, система координат, гармоническая функция, коэффициент.

### Введение

Объектами особого внимания являются вершины трещин (разрезов), т.е. места возникновения наибольшей концентрации напряжений и исходные точки дальнейшего разрушения материала. Наиболее важные параметры в механике разрушения – коэффициенты интенсивности напряжений, знание которых позволяет изучить поведение тела с трещинами, в частности, сформулировать критерий локального разрушения материала [1].

Исследование соответствующих краевых задач непосредственно связано с математической проблемой расчета ответственных элементов авиационных и несущих строительных конструкций, обладающих прочностной надежностью при наличии в материале исходных дефектов (трещин, полостей, включений и т.п.).

Начала реализуемого здесь подхода заложены в работах [2, 3], где получены новые общие решения уравнений равновесия двумерных (плоских) задач теории упругости для ортотропных тел, ограниченных координатными линиями декартовой, параболической и эллиптической систем координат.

### 1. Общие положения

Пусть  $\delta_1, \delta_2$  ( $\delta_j > 0, j = 1, 2$ ) – безразмерные величины, определяемые формулами

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 = \omega = \frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12}, \quad \delta_1^2 \delta_2^2 = \gamma = \frac{E_1}{E_2}, \quad (\omega > 0, \omega^2 - 4\gamma \geq 0), \quad (1)$$

где  $E_1 = E_x$ ;  $E_2 = E_y$  – модули упругости материала на растяжение (сжатие) в направлении осей  $x$  и  $y$ ;  $G_{12} = G_{xy}$  – модуль сдвига в плоскости  $Oxy$ ;  $\nu_{12} = \nu_{xy}$ ,  $\nu_{21} = \nu_{yx}$  – коэффициенты Пуассона. В силу симметрии формул (1) относительно  $\delta_1, \delta_2$  имеем

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{\omega + \sqrt{\omega^2 - 4\gamma}}{2}}, \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - 4\gamma}}{2}}$$

либо

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - 4\gamma}}{2}}, \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{\omega + \sqrt{\omega^2 - 4\gamma}}{2}}.$$

Частные решения двумерных уравнений равновесия ортотропных в осях  $x$  и  $y$  пластин можно представить в виде [2, 3]

$$\tau_{xy}^{(j)} = -\frac{a}{\delta_j} \frac{\partial I_j}{\partial y} = -a \frac{\partial I_j}{\partial y_j}, \quad \sigma_x^{(j)} = -a \delta_j \frac{\partial I_j}{\partial x}, \quad \sigma_y^{(j)} = \frac{a}{\delta_j} \frac{\partial I_j}{\partial x} = -\delta_j^{-2} \sigma_x^{(j)}; \quad (2)$$

$$u_x^{(j)} = -\frac{a(\delta_j^2 + \nu_{12})}{\delta_j E_1} I_j, \quad u_y^{(j)} = \frac{a \delta_j (\delta_{3-j}^2 + \nu_{12})}{E_1} \int \frac{\partial I_j}{\partial x} dy \quad (j=1,2), \quad (3)$$

где  $I_j = I_j(x, y_j)$  – гармонические функции переменных  $x, y_j = \delta_j y$ ,  $a$  – параметр, определяемый выбором исходной криволинейной системы координат.

При этом в формулах (3)  $I_j$  и  $\delta_j \int \frac{\partial I_j}{\partial x} dy$  – сопряженные гармонические функции переменных  $x, y_j$ .

Положим

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)}, \quad \sigma_x = \sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)}, \quad \sigma_y = \sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)},$$

$$u_x = u_x^{(1)} + u_x^{(2)}, \quad u_y = u_y^{(1)} + u_y^{(2)}. \quad (4)$$

При  $\delta_1 \neq \delta_2$  ( $\omega^2 \neq 4\gamma$ ) представления (4) являются общими (функции  $I_j$  линейно независимы). В случае  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$  ( $\omega^2 = 4\gamma$ ) функции  $I_1, I_2$  образуют линейно зависимую систему и тогда надо либо построить решение уравнений равновесия, не выражающееся линейно через уже имеющееся решение (построенное с помощью гармонической функции  $I_1$ ), либо в исходной краевой задаче ( $\delta_1 \neq \delta_2$ ) осуществить предельный переход  $\delta_2 \rightarrow \delta_1 = \delta$ .

Общие решения (4) в сочетании с методом Фурье позволяют получить простые выражения для проекций вектора перемещений и вектора напряжений на границах ортотропных эллиптических пластин и тем самым точно удовлетворить граничным условиям основных краевых задач.

## 2. Вычисление проекций вектора напряжений на оси декартовой системы координат

Пусть  $\langle x, y \rangle, \langle \xi, \theta \rangle$  – исходная декартова и эллиптическая системы координат, связанные соотношениями

$$x = ash\xi \sin \theta, \quad y = ach\xi \cos \theta \quad (0 \leq \xi < \infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi). \quad (5)$$

Уравнение  $\xi = \xi_0 = const$  определяет вытянутый вдоль оси  $Oy$  эллипс

$$\frac{x^2}{(ash\xi_0)^2} + \frac{y^2}{(ach\xi_0)^2} = 1. \quad (6)$$

При  $\delta_1 \neq \delta_2$  каждую из гармонических функций  $I_j$  ( $j=1,2$ ) будем рассматривать как функцию эллиптических координат  $\xi_j, \theta_j$ , определяемых формулами

$$x_j = x = a_j sh\xi_j \sin \theta_j, \quad y_j = \delta_j y = a_j ch\xi_j \cos \theta_j \quad (0 \leq \xi_j < \infty, 0 \leq \theta_j \leq 2\pi). \quad (7)$$

Уравнение  $\xi_j = \xi_{j0} = const$  ( $j=1,2$ ) определяет эллипс

$$\frac{x_j^2}{(a_j sh\xi_{j0})^2} + \frac{y_j^2}{(a_j ch\xi_{j0})^2} = \frac{x^2}{(a_j sh\xi_{j0})^2} + \frac{(\delta_j y)^2}{(a_j ch\xi_{j0})^2} = 1 \quad (j=1,2), \quad (8)$$

совпадающий с исходным эллипсом (6) при условии, что

$$a_j sh\xi_{j0} = ash\xi_0, \quad a_j ch\xi_{j0} = \delta_j ach\xi_0 \quad (j=1,2). \quad (9)$$

Тогда из соотношений (5), (7), (9) следует, что на границах  $\xi = \xi_0$ ,  $\xi_j = \xi_{j0}$  эллиптических областей  $\xi_0 < \xi < \infty$ ,  $\xi_{j0} < \xi_j < \infty$  выполняются равенства

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta. \quad (10)$$

Коэффициенты Ламе эллиптических систем координат  $\langle \xi, \theta \rangle$ ,  $\langle \xi_j, \theta_j \rangle$  имеют вид

$H_\xi = H_\theta = ah$ ,  $h = \sqrt{ch^2\xi - \cos^2\theta}$ ;  $H_{\xi_j} = H_{\theta_j} = a_j h_j$ ,  $h_j = \sqrt{ch^2\xi_j - \cos^2\theta_j}$ , а направляющие косинусы единичных внешних нормалей  $\vec{n} = n_x \vec{e}_x + n_y \vec{e}_y$ ,  $\vec{n}_j = n_x^{(j)} \vec{e}_x + n_y^{(j)} \vec{e}_y$  к границам (6), (8) эллиптических областей  $\xi_0 < \xi < \infty$ ,  $\xi_{j0} < \xi_j < \infty$  определяются формулами

$$n_x = -\frac{ch\xi_0 \sin \theta}{h_0}, \quad n_y = -\frac{sh\xi_0 \cos \theta}{h_0}; \quad n_x^{(j)} = -\frac{ch\xi_{j0} \sin \theta_j}{\delta_j h_{j0}}, \quad n_y^{(j)} = -\frac{sh\xi_{j0} \cos \theta_j}{h_{j0}};$$

$$h_0 = \sqrt{ch^2\xi_0 - \cos^2\theta}, \quad h_{j0} = \sqrt{\left(\frac{ch\xi_{j0}}{\delta_j}\right)^2 \sin^2\theta_j + sh^2\xi_{j0} \cos^2\theta_j}.$$

Из равенств (9), (10) следует, что на граничных линиях  $\xi = \xi_0$ ,  $\xi_j = \xi_{j0}$

$$a_1 h_{10} = a_2 h_{20} = ah_0, \quad n_x^{(j)} = n_x, n_y^{(j)} = n_y. \quad (11)$$

Если на контуре (границе) пластины задан вектор напряжений  $\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$ , то его проекции на оси декартовой системы координат выражаются формулами  $F_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y$ ,  $F_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y$ .

Найдем проекции  $F_x^{(j)} = \sigma_x^{(j)} n_x^{(j)} + \tau_{xy}^{(j)} n_y^{(j)}$ ,  $F_y^{(j)} = \tau_{xy}^{(j)} n_x^{(j)} + \sigma_y^{(j)} n_y^{(j)}$  векторов напряжений  $\vec{F}_j = F_x^{(j)} \vec{e}_x + F_y^{(j)} \vec{e}_y$  на границах  $\xi_j = \xi_{j0}$ , соответствующие частным решениям (2). Используя равенства

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial x} = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j} = \frac{ch \xi_j \sin \theta_j}{a_j h_j^2}, \quad \frac{\partial \xi_j}{\partial y} = \delta_j \frac{\partial \xi_j}{\partial y_j} = \frac{\delta_j sh \xi_j \cos \theta_j}{a_j h_j^2},$$

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial x} = \frac{\partial \theta_j}{\partial x_j} = \frac{sh \xi_j \cos \theta_j}{a_j h_j^2}, \quad \frac{\partial \theta_j}{\partial y} = \delta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial y_j} = -\frac{\delta_j ch \xi_j \sin \theta_j}{a_j h_j^2},$$

имеем

$$\tau_{xy}^{(j)} = -\frac{a}{a_j h_j^2} \left( sh \xi_j \cos \theta_j \frac{\partial I_j}{\partial \xi_j} - ch \xi_j \sin \theta_j \frac{\partial I_j}{\partial \theta_j} \right),$$

$$\sigma_x^{(j)} = -\frac{a \delta_j}{a_j h_j^2} \left( ch \xi_j \sin \theta_j \frac{\partial I_j}{\partial \xi_j} + sh \xi_j \cos \theta_j \frac{\partial I_j}{\partial \theta_j} \right), \quad \sigma_y^{(j)} = -\frac{1}{\delta_j^2} \sigma_x^{(j)},$$

и тогда на основании (9) - (11)

$$\begin{Bmatrix} F_x^{(j)} \\ F_y^{(j)} \end{Bmatrix} = \pm \frac{1}{h_0 h_j^2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial I_j}{\partial \xi_j} \\ \frac{1}{\delta_j} \frac{\partial I_j}{\partial \theta_j} \end{Bmatrix} \left( ch^2 \xi_j \sin^2 \theta_j + sh^2 \xi_j \cos^2 \theta_j \right) \quad (\xi_j = \xi_{j0}, \theta_j = \theta).$$

С учетом равенства  $ch^2 \xi_j \sin^2 \theta_j + sh^2 \xi_j \cos^2 \theta_j = h_j^2$  получаем простые формулы

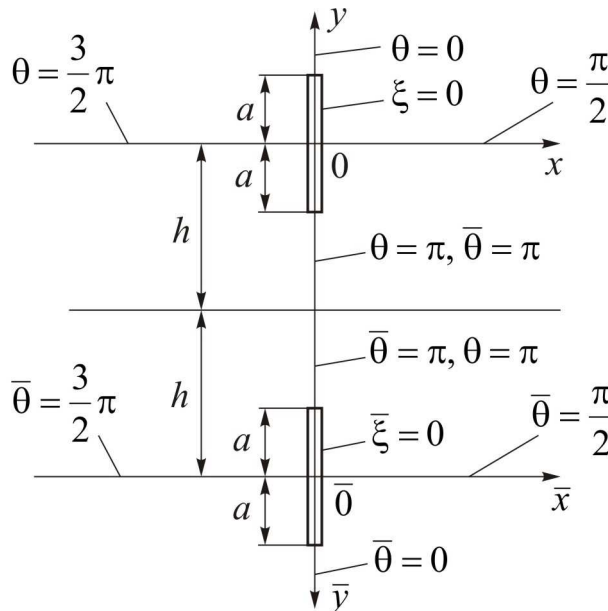
$$F_{x/\xi_j = \xi_{j0}}^{(j)} = \frac{1}{h_0} \frac{\partial I_j}{\partial \xi_j} / \xi_j = \xi_{j0}, \quad F_{y/\xi_j = \xi_{j0}}^{(j)} = -\frac{1}{\delta_j h_0} \frac{\partial I_j}{\partial \theta_j} / \xi_j = \xi_{j0}; \quad (12)$$

$$F_{x/\xi = \xi_0} = F_{x/\xi_1 = \xi_{10}}^{(1)} + F_{x/\xi_2 = \xi_{20}}^{(2)}, \quad F_{y/\xi = \xi_0} = F_{y/\xi_1 = \xi_{10}}^{(1)} + F_{y/\xi_2 = \xi_{20}}^{(2)}. \quad (13)$$

В предельном случае  $\xi_0 = 0 (\xi_{j0} = 0)$  эллипсы  $\xi = \xi_0$ ,  $\xi_j = \xi_{j0}$  вырождаются в один и тот же разрез  $x = \pm 0, |y| \leq a$ , причем  $a_j = \delta_j a$  на основании (9),  $h_0 = |\sin \theta|$ .

### 3. Симметричный вариант равновесия пластины

В качестве приложения приведенных общих результатов рассмотрим первую основную краевую задачу для бесконечной ортотропной пластины, ослабленной двумя разрезами длины  $2a$  на оси анизотропии  $Oy$  (рисунок).



Геометрия пластины

Введем дополнительно координатные системы  $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ ,  $\langle \bar{x}_j, \bar{y}_j \rangle$ ,  $\langle \bar{\xi}, \bar{\theta} \rangle$ ,  $\langle \bar{\xi}_j, \bar{\theta}_j \rangle$ , связанные с координатными системами  $\langle x, y \rangle$ ,  $\langle x_j, y_j \rangle$ ,  $\langle \xi, \theta \rangle$ ,  $\langle \xi_j, \theta_j \rangle$  соотношениями

$$\begin{aligned} \bar{x}_j &= x_j = x = \bar{x}, \bar{y} = -y - 2h, \bar{y}_j = \delta_j \bar{y} = -y_j - 2\delta_j h; \\ \bar{x}_j &= a_j sh \bar{\xi}_j \sin \bar{\theta}_j, \bar{y}_j = a_j ch \bar{\xi}_j \cos \bar{\theta}_j \quad (0 \leq \bar{\xi}_j < \infty, 0 \leq \bar{\theta}_j \leq 2\pi). \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть берега разрезов  $x = \pm 0, -a < y < a, (\xi = 0, \xi_j = 0), \bar{x} = \pm 0, -a < \bar{y} < a, (\bar{\xi} = 0, \bar{\xi}_j = 0)$  подвержены действию равномерно распределенной нормальной нагрузки интенсивности  $\sigma_0 = const (\sigma_0 > 0)$ . В силу симметрии задачи относительно оси  $Oy (\bar{O}\bar{y})$  и прямой  $y = -h (\bar{y} = -h)$  достаточно удовлетворить граничным условиям

$$F_{x/\xi=\xi_0} = \sigma_0, \quad F_{y/\xi=\xi_0} = 0 \quad (0 < \theta < \pi). \quad (15)$$

Гармонические функции  $I_j$ , учитывающие симметрию задачи, имеют вид

$$I_j = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(j)} \left( e^{-n\xi_j} \sin n\theta_j + e^{-n\bar{\xi}_j} \sin n\bar{\theta}_j \right) \quad (j=1,2). \quad (16)$$

Для удовлетворения граничным условиям (15) воспользуемся формулой сложения гармонических функций

$$e^{-k\bar{\xi}_j} e^{ik\bar{\theta}_j} = \frac{1}{2} \bar{d}_{0k} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{d}_{nk} \operatorname{chn}(\xi_j + i\theta_j) \quad (ach\xi_j < 2h - a), \quad (17)$$

где  $\bar{d}_{nk} = 2k(-1)^{n+k} \int_0^{\infty} \lambda^{-1} e^{-2\lambda h} I_n(\lambda a) I_k(\lambda a) d\lambda$ , а  $I_n(z)$  – модифицированная функция Бесселя.

Методика получения такого рода соотношений между базисными гармоническими функциями, рассматриваемыми в различных координатных системах, изложена в работе [4].

Отделяя в (17) мнимую и действительную части, имеем

$$e^{-k\bar{\xi}_j} \sin k\bar{\theta}_j = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{d}_{nk} \operatorname{shn}\xi_j \sin \theta_j, \quad (18)$$

$$e^{-k\bar{\xi}_j} \cos k\bar{\theta}_j = \frac{1}{2} \bar{d}_{0k} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{d}_{nk} \operatorname{chn}\xi_j \cos n\theta_j. \quad (19)$$

На основании (16), (18)

$$\begin{aligned} I_j &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(j)} e^{-n\xi_j} \sin n\theta_j + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(j)} e^{-k\bar{\xi}_j} \sin k\bar{\theta}_j = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n^{(j)} e^{-n\xi_j} + \operatorname{shn}\xi_j \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(j)} \bar{d}_{nk} \right] \sin n\theta_j. \end{aligned} \quad (20)$$

Удовлетворяя теперь граничным условиям (15) с помощью гармонических функций (20), равенств (10) и представлений (12), (13) при  $\xi_0 = 0, \bar{\xi}_{j0} = 0$ , получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} A_n^{(1)} + A_n^{(2)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_k^{(1)} + A_k^{(2)} \right] \bar{d}_{nk} + \bar{f}_n \quad (n=1,2,\dots); \\ \frac{1}{\delta_1} A_n^{(1)} + \frac{1}{\delta_2} A_n^{(2)} &= 0; \bar{f}_1 = -\sigma_0, \bar{f}_n = 0 \quad (n=2,3,\dots). \end{aligned}$$

Полагая здесь  $A_n^{(1)} + A_n^{(2)} = (-1)^n \sigma_0 x_n$ , для нахождения искомым коэффициентов

$$A_n^{(1)} = (-1)^n \frac{\sigma_0 \delta_1}{\delta_1 - \delta_2} x_n; A_n^{(2)} = (-1)^{n-1} \frac{\sigma_0 \delta_2}{\delta_1 - \delta_2} x_n$$

получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно  $x_n$

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} d_{nk} x_k + g_n \quad (n=1,2,\dots);$$

$$d_{nk} = 2k \int_0^{\infty} \lambda^{-1} e^{-2\lambda h} I_n(\lambda a) I_k(\lambda a) d\lambda; \quad g_1 = 1, \quad g_n = 0 \quad (n=2,3,\dots). \quad (21)$$

Для исследования свойств системы (21) проведем оценку величин

$$S_{nk} = \frac{d_{nk}}{2k} = \int_0^{\infty} \lambda^{-1} e^{-2\lambda h} I_n(\lambda a) I_k(\lambda a) d\lambda > 0. \quad (22)$$

На основании неравенства Коши-Буняковского для функций  $f_n(\lambda) = \lambda^{-0,5} e^{-\lambda h} I_n(\lambda a) \in L_2(0, \infty); f_k(\lambda) = \lambda^{-0,5} e^{-\lambda h} I_k(\lambda a) \in L_2(0, \infty)$  имеем  $(f_n, f_k)^2 \leq \|f_n\|^2 \|f_k\|^2; \|f_m\|^2 = \int_0^{\infty} f_m^2(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} \lambda^{-1} e^{-2\lambda h} I_m^2(\lambda a) d\lambda$ . С учетом значений интегралов [5]

$$\int_0^a \frac{I_\nu(cx)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{\pi}{2} I_{\nu/2}^2\left(\frac{ac}{2}\right); \int_0^{\infty} \lambda^{-1} e^{-\lambda p} I_\nu(c\lambda) d\lambda = \frac{c^\nu}{\nu} \left(p + \sqrt{p^2 - c^2}\right)^{-\nu}$$

получаем последовательно

$$I_m^2(\lambda a) = \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{I_{2m}(2\lambda x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx; \quad \|f_m\|^2 = \frac{2^{2m} a}{\pi m} \int_0^a \frac{x^{2m} dx}{\sqrt{a^2 - x^2} \left(2h + \sqrt{4h^2 - 4x^2}\right)^{2m}} <$$

$$< \frac{\varepsilon^{2m}}{\pi m \left(1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}\right)^{2m}} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{\varepsilon^{2m}}{4m \left(1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}\right)^{2m}} \quad (m=1,2,\dots);$$

$$\|f_m\| < \frac{\varepsilon^m}{2\sqrt{m} \left(1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}\right)^m} \quad \left(\varepsilon = \frac{a}{h}\right);$$

$$S_{nk} = (f_n, f_k) \leq \|f_n\| \|f_k\| < \frac{\varepsilon^{n+k}}{4\sqrt{nk} \left(1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}\right)^{n+k}} < \frac{\varepsilon^{n+k}}{4\sqrt{nk}} \quad (0 < \varepsilon < 1). \quad (23)$$

Поскольку последовательность  $\{g_n\} \in l_2$ , а из оценок (23) следует, что

$\sum_{n,k=1}^{\infty} d_{nk}^2 < \infty$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ), то почти для всех значений  $\varepsilon \in (0,1)$  решение

бесконечной системы (21) в гильбертовом пространстве числовых последовательностей  $l_2$  существует, единственно и может быть найдено методом редукции [6].

Используя теперь равенства [5]

$$\sum_{k=1}^{\infty} kI_k(\lambda a) = \frac{1}{2} \lambda a \sum_{j=0}^1 I_j(\lambda a), \quad \int_0^{\infty} e^{-px} I_\nu(cx) dx = \frac{c^\nu}{\sqrt{p^2 - c^2} \left(p + \sqrt{p^2 - c^2}\right)^\nu}$$

и оценки  $I_1(\lambda a) < I_0(\lambda a) \leq e^{\lambda a}$ , для всех значений  $\varepsilon \in (0,1)$  имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_{nk} < 2a \int_0^{\infty} e^{-\lambda(2h-a)} I_n(\lambda a) d\lambda = \frac{\varepsilon^{n+1}}{\sqrt{1-\varepsilon} (1 + \sqrt{1-\varepsilon})^{2n}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Отсюда следует квазирегулярность бесконечной системы для любого значения параметра  $\varepsilon \in (0,1)$ . Кроме того, при любом  $n = 1, 2, \dots$  справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_{nk} < \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon} (1 + \sqrt{1-\varepsilon})^2} < 1 \quad \left(0 < \varepsilon < \frac{3\sqrt{5}-5}{2}\right),$$

означающая, что бесконечная система (21) вполне регулярна при  $0 < \varepsilon < 0,85$ . Это свойство обеспечивает существование и единственность решения системы (21) и позволяет для нахождения ее решения применить методы последовательных приближений и малого параметра.

Используя значение интеграла [5]

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-px} I_\mu(bx) I_\nu(cx) dx = \frac{b^\mu c^\nu p^{-\alpha-\mu-\nu}}{2^{\mu+\nu} \Gamma(\nu+1)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+\mu+\nu+2s)}{s! \Gamma(\mu+s+1)} \left(\frac{b}{2p}\right)^{2s} F\left(-s, -\mu-s; \nu+1; \frac{c^2}{b^2}\right)$$

( $\Gamma(z)$  – гамма-функция,  $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$  – гипергеометрическая функция) при  $\alpha = 0, p = 2h, b = c = a, \mu = n, \nu = k$  и равенства

$$\Gamma(m+1) = m! \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad F(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)},$$



для величин (22) получим разложение в ряд по степеням  $\varepsilon = \frac{a}{h}$

$$S_{nk} = \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{n+k} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(n+k+2s-1)!(n+k+2s)!}{s!(n+s)!(k+s)!(n+k+s)!} \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{2s}.$$

Рассмотрим вопрос о характере распределения нормальных напряжений вблизи концов разрезов и вычислении соответствующих коэффициентов интенсивности.

Используя представления

$$\sigma_{x/\theta_j=0}^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty} nA_n^{(j)} \left( -\frac{e^{-n\xi_j}}{sh\xi_j} + (-1)^n \frac{e^{-n\bar{\xi}_j}}{sh\bar{\xi}_j} \right), \quad \sigma_{y/\theta_j=0}^{(j)} = -\frac{1}{\delta_j^2} \sigma_{x/\theta_j=0}^{(j)};$$

$$\sigma_{x/\theta_j=\pi}^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty} nA_n^{(j)} (-1)^n \left( \frac{e^{-n\xi_j}}{sh\xi_j} + \frac{e^{-n\bar{\xi}_j}}{sh\bar{\xi}_j} \right), \quad \sigma_{y/\theta_j=\pi}^{(j)} = -\frac{1}{\delta_j^2} \sigma_{x/\theta_j=\pi}^{(j)};$$

$$\sigma_{x/\theta=0,\theta=\pi} = \sigma_x^{(1)}|_{\theta_1=0,\theta_1=\pi} + \sigma_x^{(2)}|_{\theta_2=0,\theta_2=\pi};$$

$$\sigma_{y/\theta=0,\theta=\pi} = \sigma_y^{(1)}|_{\theta_1=0,\theta_1=\pi} + \sigma_y^{(2)}|_{\theta_2=0,\theta_2=\pi}$$

и учитывая, что  $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ ,  $\bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_2 = \bar{\xi}$ ,  $ach\bar{\xi} = ach\xi + 2h$  при  $\theta = 0$  ( $\theta_j = 0, \bar{\theta} = \pi, \bar{\theta}_j = \pi$ ) и при  $\theta = \pi$  ( $\theta_j = \pi, \bar{\theta} = \pi, \bar{\theta}_j = \pi$ ) (т.е. при  $x = 0, y > a$  и при  $x = 0, y < -a$ ), убеждаемся, что вблизи концов разреза  $x = 0, y = \pm a$  ( $\xi = 0; \theta = 0, \theta = \pi$ ) поведение нормальных напряжений  $\sigma_x, \sigma_y$  при  $\theta = 0, \theta = \pi$  характеризуется асимптотическими равенствами

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{matrix} \right\}_{|\theta=0} \approx \frac{\sigma_0}{sh\xi} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{\delta_1\delta_2} \end{matrix} \right\} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx_n e^{-n\xi} \quad (\xi \rightarrow 0 (y \rightarrow a));$$

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{matrix} \right\}_{|\theta=\pi} \approx \frac{\sigma_0}{sh\xi} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{\delta_1\delta_2} \end{matrix} \right\} \sum_{n=1}^{\infty} nx_n e^{-n\xi} \quad (\xi \rightarrow 0 (y \rightarrow a));$$

$$ch\xi = \frac{|y|}{a}, sh\xi = \frac{1}{a} \sqrt{y^2 - a^2}, e^{-\xi} = \frac{a}{|y| + \sqrt{y^2 - a^2}} \quad (x = 0, |y| > a).$$

При этом коэффициенты интенсивности нормальных напряжений

$$K_I^{\pm} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ \sigma_x \sqrt{2(\pm y - a)} \right]_{|\theta=\theta_{\pm}} = \sigma_0 \sqrt{a} \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^{n-1} nx_n \left( \theta_{\pm} = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \right).$$

Решая бесконечную систему (21) методом малого параметра и ограничиваясь членами до порядка  $\varepsilon^6$ , получаем

$$x_1 = 1 + \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \frac{1}{16}\varepsilon^4 + \frac{1}{64}\varepsilon^6 + O(\varepsilon^8), \quad x_2 = \frac{1}{32}\varepsilon^3 + \frac{3}{128}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^7),$$

$$x_3 = \frac{1}{128}\varepsilon^4 + \frac{17}{2048}\varepsilon^6 + O(\varepsilon^8), \quad x_4 = \frac{1}{512}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^7), \quad x_5 = \frac{1}{2048}\varepsilon^6 + O(\varepsilon^8),$$

$$K_I^\pm = \sigma_0 \sqrt{a} \left( 1 + \frac{1}{8}\varepsilon^2 \mp \frac{1}{16}\varepsilon^3 + \frac{11}{128}\varepsilon^4 \mp \frac{7}{128}\varepsilon^5 + \frac{11}{256}\varepsilon^6 \right) + O(\varepsilon^7).$$

В заключение отметим, что предложенный аналитический метод в сочетании с формулой разложения (19) позволяет реализовать и антисимметричный вариант задачи, а в общем случае разбиение исходной краевой задачи на симметричную и антисимметричную по координате  $x(\bar{x})$  позволяет исследовать ее при произвольных по  $x(\bar{x})$  граничных условиях на берегах разрезом.

### Список литературы

1. Сиратори, М. Вычислительная механика разрушения [Текст] / М. Сиратори, Т. Миеси, Х. Мацусита. – М.: Мир, 1986. – 334 с.
2. Соловьев, А.И. Краевые задачи теории упругости для ортотропных пластин, ограниченных координатными линиями декартовой и параболической систем координат [Текст] / А.И. Соловьев // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 2(70). – Х., 2012. – С. 117-127.
3. Соловьев, А.И. О совместном применении декартовых и эллиптических координат к решению краевых задач теории упругости для ортотропных пластин [Текст] / А.И. Соловьев, А.В. Головченко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 53. – Х., 2012. – С. 101-110.
4. Проценко, В.С. О совместном применении декартовых и биполярных координат к решению краевых задач теории потенциала и теории упругости [Текст] / В.С. Проценко, А.И. Соловьев // Прикладная математика и механика. – 1984. – Т. 48, № 6. – С. 973 – 982.,
5. Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Специальные функции [Текст] / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 752 с.
6. Канторович, Л.В. Функциональный анализ [Текст] / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1984. – 752 с.

**Рецензент:** д.т.н., профессор М.Л. Угрюмов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.

Поступила в редакцию 11.02.13

## **Рівновага ортотропної пластини, яка ослаблена двома скінченними прямолінійними розрізами**

Запропоновано аналітичний метод розв'язання крайових задач теорії пружності для тонкої ортотропної пластини, яка ослаблена двома скінченними прямолінійними розрізами. За допомогою співвідношень між базисними розв'язками рівняння Лапласа отримано нескінченну систему лінійних алгебричних рівнянь другого роду з матричними коефіцієнтами, які зменшуються експоненціально. Це дозволило провести ефективний аналіз напружено-деформованого стану в околі концентраторів напружень, зокрема, отримати прості асимптотичні формули для коефіцієнтів інтенсивності нормальних напружень

**Ключові слова:** ортотропна пластини, розріз, система координат, гармонічна функція, коефіцієнт.

## **Equilibrium of orthotropic plate weakened by two finite rectilinear sections**

Analytical method of solving the boundary-value problems of theory of elasticity for thin orthotropic plate weakened by two finite rectilinear sections is suggested. It is based on applying the ratio between Laplace equation basic solutions in different elliptic coordinate systems and leads to infinite systems of linear algebraic equations of the second kind with exponentially decreasing matrix coefficients. That allows to carry out an effective analysis of deflected mode near to stress concentrators and derive simple asymptotic formulae for normal stress intensity factors in particular.

**Keywords:** orthotropic plate, section, coordinate system, harmonic function, coefficient.