УДК 517.944 Т.В. Денисова, В.С. Проценко

Колебание многозвенных струн с разными звеньями

Харьковский национальный экономический университет
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

При классических гипотезах решены задачи о свободных малых колебаниях неоднородных многозвенных струн с разными по длине звеньями и различными условиями закрепления краев. Предложен метод нахождения точных решений этих задач, обобщающий классический метод Фурье.
Ключевые слова: свободные колебания, многозвенные струны, условия закрепления, начальные формы, задача Штурма – Лиувилля, полнота системы собственных вектор-функций.

Задача колебания многозвенных струн, звенья которых одинаковы как по длине, так и по материалу, из которых они изготовлены, изучалась в статье авторов [1]. Настоящая публикация посвящена обобщению результатов, полученных в [1], на многозвенные струны со звеньями разных длин, изготовленных из разных материалов и имеющих разные натяжения. Основное внимание уделено возможности разложения начальных форм струны по собственным формам колебания. Во всех рассмотренных ниже случаях установлена возможность такого разложения. С математической точки зрения установлена полнота системы собственных векторных функций некоторой специальной задачи Штурма – Лиувилля [2] в классе начальных вектор-функций задачи колебания.

1. Края звеньев струны закреплены

1.1. Трехзвенная струна (рис. 1) совершает малые колебания перпендикулярно плоскости, в которой она расположена. Примем, что натяжение в звеньях 2, 3 – T_0, в звене 1 – $T_1 = 2T_0 \cdot cos\,\alpha$, длина звеньев 2, 3 – R, звена 1 – R_1, т. е. звенья 2, 3 одинаковы. Начало отсчета длин поместим в узле струны $(x=0)$ [1].

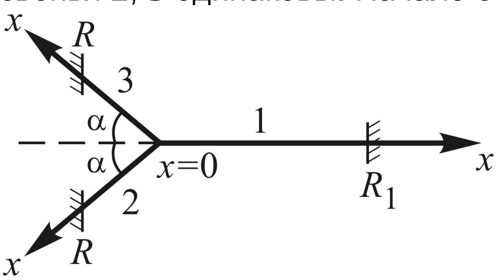

Рис. 1. Трехзвенная струна

Уравнение колебания имеет вид

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} = \frac{1}{a_k^2}\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2},\; a_k^2 = \frac{T_k}{\rho_k},\; k = 1,2,3, \tag{1.1}$$

где ρ_k – плотность распределения массы в k-м звене струны; $\rho_1 \neq \rho_2 = \rho_3 = \rho_0$.

Краевые условия:

$$u_k(R,t) = u_1(R_1,t) = 0,\; k = 2,3. \tag{1.2}$$

Начальные условия для простоты изложения примем такими:

$$u_k(x,0) = f_k(x),\quad u_k{}'_t(x,0) = 0. \tag{1.3}$$

В общем случае задача решается аналогично [1].

В узле струны, т. е. в точке $x=0$, имеем условия сопряжения

$$u_1(0,t) = u_2(0,t) = u_3(0,t),\quad T_0\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial x}\right) + T_1\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \tag{1.4}$$

В соответствии с методом разделения переменных выбираем решение

$$u_k(x,t)=e^{i\lambda t}\cdot v_k(x),$$

где функция $v_k(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2v_k}{dx^2}+\left(\frac{\lambda}{a_k}\right)^2 v_k=0, \qquad (1.5)$$

которое вытекает из (1.1).

Из (1.5) с учетом краевых условий (1.2) найдем

$$v_k(x)=A_k\cdot sin\frac{\lambda}{a_2}(x-R),\quad k=2{,}3,\quad v_1(x)=A_1\cdot sin\frac{\lambda}{a_1}(x-R_1).$$

Условия сопряжения (1.4) дают равенства

$$\begin{gathered}A_2\cdot sin\frac{\lambda}{a_2}R=A_3\cdot sin\frac{\lambda}{a_2}R,\quad A_2\cdot sin\frac{\lambda}{a_2}R=A_1\cdot sin\frac{\lambda}{a_1}R_1,\\ T_0a_2^{-1}(A_2+A_3)cos\frac{\lambda}{a_2}R+T_1a_1^{-1}A_1\,cos\frac{\lambda}{a_1}R_1=0.\end{gathered} \qquad (1.6)$$

Определитель этой системы, приравненный к нулю, распадается на два уравнения $(\nu=T_0a_1/(T_1a_2))$:

1) $sin\frac{\lambda}{a_2}R=0$ и 2) $2\nu\,sin\frac{\lambda}{a_1}R_1\cdot cos\frac{\lambda}{a_2}R+cos\frac{\lambda}{a_1}R_1\cdot sin\frac{\lambda}{a_2}R=0$. (1.7)

Рассматриваемая задача колебания имеет две серии собственных значений – корни уравнений (1.7). Обозначим их как $\lambda_n=\frac{n\pi a_2}{R}$ и r_n – положительные корни второго уравнения (1.7) и предположим, что множества $\{r_n\}$ и $\{\lambda_n\}$ не имеют общих элементов *).

Собственные функции задачи Штурма – Лиувилля

$$\begin{gathered}y_k''+\left(\frac{\lambda}{a_k}\right)^2 y_k=0,\quad y_1(R_1)=y_2(R)=y_3(R)=0,\quad a_2=a_3\neq a_1,\\ y_1(0)=y_2(0)=y_3(0),\quad T_0[y_2'(0)+y_3'(0)]+T_1y_1'(0)=0\end{gathered}$$

(их будем рассматривать как вектор-функции) таковы:

$$\begin{gathered}y_1(x,\lambda_n)=\begin{pmatrix}0\\A_2\\A_3\end{pmatrix}sin\frac{\lambda_n}{a_2}(x-R),\quad A_2+A_3=0;\\ y_2(x,r_n)=\begin{cases}sin\frac{r_n}{a_2}R\cdot sin\frac{r_n}{a_1}(x-R_1), & 0\le x\le R_1,\\ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}sin\frac{r_n}{a_1}R_1\cdot sin\frac{r_n}{a_2}(x-R), & 0\le x\le R.\end{cases}\end{gathered} \qquad (1.8)$$

* Найденные ниже решения остаются справедливыми и в случае, когда уравнения (1.7) имеют общие корни, однако этот факт требует более глубокого исследования. На нем мы не останавливаемся в настоящей публикации. Это замечание относится также и к другим задачам, рассмотренным ниже.

Решение задачи колебания с учетом (1.3) можно представить в виде

$$(u_1,u_2,u_3)^T = \sum_{n=1}^{\infty}\left(y_1(x,\lambda_n)\cdot cos\,\lambda_n t + c_n y_2(x,r_n)\cdot cos\,r_n t\right), \tag{1.9}$$

где c_n и $A_2(n)$ – произвольные постоянные, подлежащие определению из начальных условий.

Положим в (1.9) $t=0$ и воспользуемся первым начальным условием (1.3). В результате получим равенство (второе условие (1.3) удовлетворяется автоматически)

$$\left(f_1(x), f_2(x), f_3(x)\right)^T = \sum_{n=1}^{\infty}\left(y_1(x,\lambda_n) + c_n y_2(x,r_n)\right). \tag{1.10}$$

Сложим две последние строки в (1.10) и учтем, что $A_1 + A_2 = 0$. Это дает возможность записать

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \frac{1}{2}\left(f_2(x)+f_3(x)\right)\end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \begin{pmatrix} sin\frac{r_n}{a_2}R\cdot sin\frac{r_n}{a_1}(x-R_1) \\ sin\frac{r_n}{a_1}R_1\cdot sin\frac{r_n}{a_2}(x-R)\end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} x\in(0,R_1), \\ x\in(0,R). \end{matrix}$$

Положим $x=-x_1$, когда $x\in(0,R_1)$, и $x=x_1$, когда $x\in(0,R)$. Тогда последнее равенство будет таким:

$$\left(f_1(-x_1), \frac{1}{2}\left(f_2(x_1)+f_3(x_1)\right)\right)^T = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cdot z(x_1,r_n), \quad -R_1 < x_1 < R, \tag{1.11}$$

где $z(x_1,r_n) = \begin{cases} -sin\frac{r_n}{a_2}R\cdot sin\frac{r_n}{a_1}(x_1+R_1), & x_1\in(-R_1,0), \\ sin\frac{r_n}{a_1}R_1\cdot sin\frac{r_n}{a_2}(x_1-R), & x_1\in(0,R). \end{cases}$

Функция $z(x,r_n)$, как это легко проверить, является собственной функцией задачи Штурма – Лиувилля:

$$z'' + (\lambda/a_k)^2 z = 0, \quad x\in(-R_1,R),$$
$$z(-R_1) = z(R) = 0, \quad z(-0) = z(+0), \quad z'(-0) = 2\nu_1 z'(+0), \quad \nu_1 = T_0/T_1.$$

Задачи такого типа изучены в работе [3], где установлены ортогональность с весом собственных функций $z(x,r_n)$ и их полнота.

Коэффициенты c_n находим из (1.11) с учетом того, что вес $\rho(x_1)$ определяется равенством

$$\rho(x_1) = \begin{cases} a_1^{-2}, & x_1\in(-R_1,0), \\ a_2^{-2}\cdot 2\nu_1, & x_1\in(0,R). \end{cases}$$

Далее из (1.10) и (1.11) получаем

$$\begin{pmatrix} f_2(x)-f_3(x) \\ f_3(x)-f_2(x)\end{pmatrix} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix} A_2(n) \\ A_3(n)\end{pmatrix}\cdot sin\frac{r_n}{a_2}(x-R), \quad x\in(0,R).$$

Так как система функций $\left\{sin\frac{n\pi}{R}(x-R)\right\}$ ортогональна и полна на $(0,R)$, то $A_2(n)=-A_3(n)$ находим по формулам Эйлера.

Вывод. Трехзвенная струна с двумя одинаковыми звеньями имеет две серии собственных частот: с частотами λ_n совершают колебания одинаковые звенья, как закрепленные в точках $x=0$ и $x=R$; с частотами r_n колеблются все три звена как одно целое. Система собственных векторных функций задачи $y_1(x,\lambda_n)$ и $y_2(x,r_n)$ является полной в классе функций, определяющих начальную форму струны. Случай задания начальных скоростей струны изучается аналогично [1].

1.2. Для четырехзвенной струны (рис. 2), у которой звенья 1, 3 и 2, 4 имеют соответственно плотности ρ_1 и ρ_2, натяжения T_1 и T_2, длины R_1 и R_2, условия сопряжения в точке $x=0$ таковы:

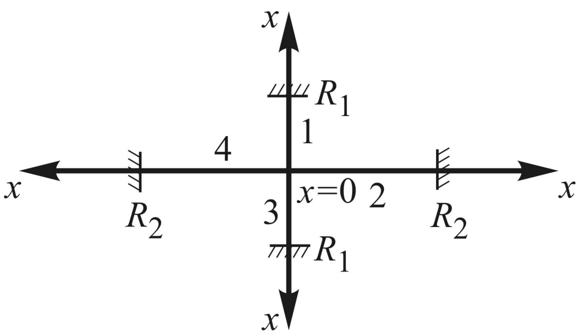

Рис. 2. Четырехзвенная струна

$$u_k(0,t)=u_{k+1}(0,t),\quad k=1,2,3,$$
$$T_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)+T_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_4}{\partial x}\right)=0. \tag{1.12}$$

В качестве начальных условий примем условия (1.3) ($k=\overline{1,4}$).

Эта задача имеет три серии собственных значений, которые являются корнями уравнений $\left(a_k^2=T_k/\rho_k\right)$:

$$1)\ sin\frac{\lambda_n}{a_1}R_1=0,\quad 2)\ sin\frac{r_n}{a_2}R_2=0,$$

$$3)\ \mu cos\frac{s_n}{a_1}R_1\cdot sin\frac{s_n}{a_2}R_2+sin\frac{s_n}{a_1}R_1\cdot cos\frac{s_n}{a_2}R_2=0,\quad \mu=\frac{T_1a_2}{T_2a_1}. \tag{1.13}$$

В первом случае $\lambda_n=n\pi a_1/R_1$, $A_2=A_4=0$, $A_1+A_3=0$, собственная функция $y_1(x,\lambda_n)=(A_1(n),0,A_3(n),0)^T\cdot sin\lambda_n(x-R_1)$.

Во втором случае $r_n=n\pi a_2/R_2$, $A_1=A_3=0$, $A_2+A_4=0$, собственная функция $y_2(x,r_n)=(0,A_2(n),0,A_4(n))^T\cdot sin\, r_n(x-R_2)$.

В третьем случае s_n – положительные корни уравнения (1.13), $A_1=A_3$, $A_2=A_4$, $A_2=A_1\cdot sin\frac{s_n}{a_1}R_1\bigg/sin\frac{s_n}{a_2}R_2$, собственная функция

$$y_3(x,s_n)=\left[m_2\,sin\frac{s_n}{a_1}(x-R_1),m_1\,sin\frac{s_n}{a_2}(x-R_2),m_2\,sin\frac{s_n}{a_1}(x-R_1),m_1\,sin\frac{s_n}{a_2}(x-R_2)\right]^T,$$

где $m_1=sin\frac{s_n}{a_1}R_1$, $m_2=sin\frac{s_n}{a_2}R_2$.

Общее решение составляем из найденных собственных функций:

$$\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)^T=\sum_{n=1}^{\infty}\left(y_1(x,\lambda_n)\cos\lambda_n t+y_2(x,r_n)\cos r_n t+c_n y_3(x,s_n)\cos s_n t\right). \quad (1.14)$$

В равенстве (1.14) положим $t=0$, после чего сначала сложим первую и третью, а затем – вторую и четвертую строки. С учетом зависимостей $A_1(n)+A_3(n)=0$, $A_2(n)+A_4(n)=0$ найдем

$$\begin{pmatrix}F_{13}(x)\\ F_{24}(x)\end{pmatrix}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\begin{pmatrix}m_2\sin\dfrac{s_n}{a_1}(x-R_1)\\ m_1\sin\dfrac{s_n}{a_2}(x-R_2)\end{pmatrix}\begin{matrix}, \quad x\in(0,R_1),\\[2ex] , \quad x\in(0,R_2),\end{matrix} \quad (1.15)$$

где $F_{13}(x)=\frac{1}{2}(f_1(x)+f_3(x))$, $\quad F_{24}(x)=\frac{1}{2}(f_2(x)+f_4(x))$.

Если сделать замену $x=-x_1$ на $(0,R_1)$ и $x=x_1$ на $(0,R_2)$, то равенство (1.15) преобразуется в равенство

$$F(x_1)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n z(x_1,s_n), \quad -R_1\le x_1\le R_2, \quad (1.16)$$

где $F(x_1)=F_{13}(-x_1)$, когда $x_1\in(-R_1,0)$ и $F(x_1)=F_{24}(x_1)$, когда $x_1\in(0,R_2)$.

Функция $z(x,s_n)$ в (1.16), как это легко проверить, является собственной функцией задачи Штурма – Лиувилля:

$$z''+\left(\frac{\lambda}{a_k}\right)^2 z=0,\ k=1, \text{ когда } x\in(-R_1,0), \text{ и } k=2, \text{ когда } x\in(0,R_2),$$

$$z(-R_1)=z(R_2)=0, \quad z(-0)=z(+0), \quad T_1z'(-0)=T_2z'(+0).$$

Собственные функции этой задачи ортогональны на $(-R_1,R_2)$ с весом [3]

$$\rho(x_1)=\begin{cases}a_1^{-2}, & x\in(-R_1,0),\\ \mu_1a_2^{-1}, & x\in(0,R_2),\ \mu_1=T_2/T_1\end{cases}$$

и образуют на $(-R_1,R_2)$ полную систему функций.

Коэффициенты c_n находим из (1.16). Для нахождения $A_k(n)$ воспользуемся равенствами

$$f_k(x)-F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_k(n)\sin\frac{n\pi}{R_k}(x-R_k), \quad 0\le x\le R_k, \quad k=1,2, \quad (1.17)$$

вытекающими из (1.14) при $t=0$ и из (1.15). Из этих равенств $A_k(n)$ находятся по обычным формулам из тригонометрических рядов.

Вывод. Задача колебания четырехзвенной струны имеет три серии частот: с частотами λ_n колеблются звенья 1, 3, с частотами r_n – звенья 2, 4. Эти формы колебаний соответствуют закреплению звеньев струны в точке $x=0$. С частотой s_n колеблется вся струна как единое целое. Система собственных векторных функций задачи является полной в классе векторных функций, определяющих начальную форму струны.

Замечание 1. При $\rho_1 = \rho_2$, $T_1 = T_2$ (однородная струна) уравнение (1.13) переходит в $sin\, sl = 0$, $l = (R_1 + R_2)/a$ и $s_n = \pi n/l$. В этом случае коэффициенты c_n из (1.16) находим также просто, как и $A_k(n)$ из (1.17).

Замечание 2. Метод решения легко обобщается на любое четное количество звеньев двух разновидностей.

2. Края звеньев струны не закреплены

В случае, когда края звеньев струны свободно могут скользить без трения вдоль направления, перпендикулярного к плоскости расположения струны, краевые условия имеют вид [2]

$$\partial u_k / \partial x = 0, \quad x = R_k. \tag{2.1}$$

2.1. Ради простоты будем рассматривать трехзвенную струну (рис. 1) с начальными условиями, такими же, как и в п. 1. Для функций v_k имеем выражения

$$v_k^{(x)} = A_k \cos\frac{\lambda}{a_2}(x - R), \quad k = 2,3; \quad v_1(x) = A_1 \cos\frac{\lambda}{a_1}(x - R_1). \tag{2.2}$$

Задача имеет две серии собственных значений: λ_n – корни уравнения $cos(\lambda R/a_2) = 0$ и r_n – корни уравнения

$$2\nu \sin\frac{rR}{a_2}\cos\frac{rR_1}{a_1} + \cos\frac{rR}{a_2}\sin\frac{rR_1}{a_1} = 0, \quad \nu = \frac{T_0 a_1}{T_1 a_2} \tag{2.3}$$

и два семейства отвечающих им собственных функций

$$y_1(x,\lambda_n) = (0, A_2, A_3)^T \cos\frac{\lambda_n}{a_2}(x - R), \quad A_2(n) + A_3(n) = 0,$$

$$y_2(x,r_n) = \left[m\cos\frac{r_n}{a_1}(x - R_1),\, m_1\cos\frac{r_n}{a_1}(x - R),\, m_1\cos\frac{r_n}{a_1}(x - R)\right]^T,$$

$$m = \cos\frac{r_n}{a_2}R, \quad m_1 = \cos\frac{r_n}{a_1}R_1.$$

Решение задачи колебания будет иметь вид (1.9). Так же, как и в п. 1.1, исключаем коэффициенты $A_2(n)$, $A_3(n)$ из равенств, полученных вследствие начальных условий задачи. Для определения коэффициентов c_n получим равенство

$$F(x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n w(x_1, r_n), \quad -R_1 < x_1 < R, \tag{2.4}$$

где $F(x_1) = f_1(-x_1)$, когда $x_1 \in (-R_1, 0)$, и $F(x_1) = \frac{1}{2}(f_2(x_1) + f_3(x_1))$, когда $x_1 \in (0, R)$;

$$w(x_1, r) = \begin{cases} \cos\frac{r}{a_2}R \cdot \cos\frac{r}{a_1}(x_1 + R_1) \text{ на } (-R_1, 0), \\ \cos\frac{r}{a_1}R_1 \cdot \cos\frac{r}{a_2}(x_1 - R) \text{ на } (0, R). \end{cases}$$

Свойство ортогональности с весом [3] системы функций $w(x,r)$ на $(-R_1,R)$ позволяет найти коэффициенты c_n. Из равенства

$$f_2(x)-F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_2(n)cos\frac{\lambda_n}{a_2}(x-R),\quad x\in(0,R)$$

находим $A_2(n)$, а значит, и $A_3(n)$, т.к. $A_2(n)+A_3(n)=0$.

Вывод. Звенья 2, 3 колеблются с частотами λ_n как закрепленные в точке $x=0$ и свободные по краям. С частотой r_n колеблется вся струна как единое целое. Система собственных функций задачи полна на множестве начальных функций.

2.2. Четырехзвенная струна (рис. 2) – с краевыми условиями (2.1), все остальные предположения такие же, как и в п. 1.2.

Задача имеет три серии собственных значений, которые являются корнями уравнений:

1) $cos\,\lambda R_1/a_1=0$, 2) $cos\,rR_2/a_2=0$,

3) $\mu\,sin\frac{s}{a_1}R_1\cdot cos\frac{s}{a_2}R_2+cos\frac{s}{a_1}R_1\cdot sin\frac{s}{a_2}R_2=0$, $\mu=\frac{T_1a_2}{T_2a_1}$ (2.5)

и, соответственно, три серии собственных вектор-функций:

$$y_1(x,\lambda_n)=(A_1(n),0,A_3(n),0)^T\,cos\frac{\lambda_n}{a_1}(x-R_1),$$

$$y_2(x,r_n)=(0,A_2(n),0,A_4(n))^T\,cos\frac{r_n}{a_2}(x-R_2),\tag{2.6}$$

$$y_3(x,s_n)=\left[m_2\,cos\frac{s_n}{a_1}(x-R_1),m_1\,cos\frac{s_n}{a_2}(x-R_2),m_2\,cos\frac{s_n}{a_1}(x-R_1),m_1\,cos\frac{s_n}{a_2}(x-R_2)\right]^T,$$

$$m_1=cos\,s_nR_1/a_1,\quad m_1=cos\,s_nR_2/a_2.$$

Общее решение задачи колебания будет иметь вид (1.14). С помощью того же приема, что и в п. 1.2, коэффициенты c_n определяем из равенства

$$F(x_1)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nw(x_1,s_n),\quad -R_1<x_1<R_2,\tag{2.7}$$

где $F(x_1)=\frac{1}{2}(f_1(-x_1)+f_3(-x_1))$, когда $x_1\in(-R_1,0)$, и $F(x_1)=\frac{1}{2}(f_2(x_1)+f_4(x_1))$, когда $x_1\in(0,R_2)$;

$$w(x_1,s_n)=\begin{cases}m_2\,cos[\,s_n(x_1+R_1)/a_1\,], & x_1\in(-R_1,0),\\ m_1\,cos[\,s_n(x_1-R_2)/a_2\,], & x_1\in(0,R_2).\end{cases}$$

Собственные функции $w(x_1,s_n)$ ортогональны с весом [3] и образуют полную на $(-R_1,R_2)$ систему функций. Поэтому коэффициенты разложения (2.7) находим по известным формулам теории рядов Фурье. Оставшиеся неизвестные $A_k(n)$ определяются из равенств (1.17), в которых синусы следует заменить на косинусы.

Вывод. Звенья 1, 3 совершают колебания с частотой λ_n, звенья 2, 4 – с частотой r_n. Вся струна как единое целое колеблется с частотой s_n. Система векторных собственных функций полна в классе векторных начальных функций.

3. Смешанные условия закрепления звеньев

В этом пункте рассмотрим задачи, в которых одни края звеньев закреплены, другие – могут свободно перемещаться, как в п. 2. В первом случае краевые условия будут иметь вид (1.2), во втором – (2.1).

3.1. Трехзвенную струну (см. рис. 1) будем рассматривать в системах координат с началами отсчета в концах звеньев 2 и 3. При таком их расположении узел будет в точке $x = R$, конец звена 1 – в точке $x = l = R + R_1$. Как и в п. 1.1, будем считать звенья 2 и 3 одинаковыми.

Условие сопряжения звеньев в узле, т.е. в точке $x = R$, будет таким:

$$T_0\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial x}\right) = T_1\frac{\partial u_1}{\partial x}. \tag{3.1}$$

Принимаем, что звенья 1, 2 закреплены по краям, звено 3 имеет свободный край. Все остальные предположения остаются прежними.

С учетом краевых условий найдем

$$v_1(x) = A_1 \cdot sin\frac{\lambda}{a_1}(x-l), \quad v_2(x) = A_2 \cdot sin\frac{\lambda}{a_2}x, \quad v_3(x) = A_3 \cdot cos\frac{\lambda}{a_2}x.$$

Условия сопряжения (1.2), (3.1) позволяют записать систему уравнений, из которой получаем

$$A_2 = A_3 \cdot cos\frac{\lambda}{a_2}R \Big/ sin\frac{\lambda}{a_2}R, \quad A_1 = -A_3 \cdot cos\frac{\lambda}{a_2}R \Big/ sin\frac{\lambda}{a_1}R,$$

$$\nu\, sin\frac{2\lambda}{a_2}R \cdot cos\frac{\lambda}{a_1}R_1 + 2\,sin\frac{\lambda}{a_1}R_1 \cdot cos\frac{2\lambda}{a_2}R = 0, \quad \nu = \frac{T_0 a_1}{T_1 a_2}. \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2) определяет собственные значения задачи.

Собственные функции такие:

$$y(x,\lambda) = \left(h_1 \cdot cos\frac{\lambda}{a_2}x, h_2 \cdot sin\frac{\lambda}{a_2}x, h_3 \cdot sin\frac{\lambda}{a_1}(x-l)\right)^T,$$

$$h_1 = sin\frac{\lambda}{a_2}R \cdot sin\frac{\lambda}{a_1}R_1,\ h_2 = cos\frac{\lambda}{a_2}R \cdot sin\frac{\lambda}{a_1}R_1,\ h_3 = -\frac{1}{2}sin\frac{2\lambda}{a_2}R,$$

где λ – положительный корень уравнения (3.2).

Общее решение задачи имеет вид

$$(u_3, u_2, u_1)^T = \sum_{n=1}^{\infty} B_n y(x,\lambda_n) cos\,\lambda_n t.$$

Из начальных условий найдем

$$\left(f_3(x), f_2(x), f_1(x)\right)^T = \sum_{n=1}^{\infty} B_n y(x,\lambda_n). \tag{3.3}$$

Из (3.3) надо найти неизвестные B_n. Для этого в (3.3) вычтем первую строку из второй, затем эти строки сложим. В результате получим равенство

$$\begin{pmatrix} F(x) \\ 2f_1(x) \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \begin{pmatrix} sin\dfrac{\lambda_n}{a_1}R_1 \cdot sin\dfrac{\lambda_n}{a_2}(x \mp R) \\ -sin\dfrac{2\lambda_n}{a_2}R \cdot sin\dfrac{\lambda_n}{a_1}(x-l) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} x \in (0,R), \\ x \in (R,l), \end{matrix} \tag{3.4}$$

где обозначено $F(x) = f_2(x) - f_3(x)$ при знаке минус в (3.4) и $F(x) = f_2(x) + f_3(x)$ – при знаке плюс.

Положим в первой строке $x = -x_1$, во второй и третьей – $x = x_1$. Тогда (3.4) перейдет в равенство

$$\begin{pmatrix} F(-x_1) \\ 2f_1(x_1) \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot z(x_1, \lambda_n), \tag{3.5}$$

где обозначено

$$z(x,\lambda) = \begin{cases} sin\dfrac{\lambda}{a_1}R_1 \cdot sin\dfrac{\lambda}{a_2}(x_1+R), & x_1 \in (-R,R), \\ -sin\dfrac{2\lambda}{a_2}R \cdot sin\dfrac{\lambda}{a_1}(x_1-l), & x_1 \in (R,l). \end{cases}$$

Функция $z(x,\lambda_n)$, где λ_n – корни уравнения (3.2), есть собственная функция задачи Штурма – Лиувилля:

$$z'' + (\lambda / a_k)^2 z = 0, \quad z(-R) = z(l) = 0,$$
$$z(R-0) = z(R+0), \quad z'(R-0) = (2T_1/T_0)z'(R+0).$$

Полнота и ортогональность с весом системы этих функций следует из работы [3]. Пользуясь свойством ортогональности, находим B_n.

Вывод. Струна совершает колебания с частотами λ_n как одно целое. При $R = R_1$, $a_1 = a_2$ появляется вторая серия частот $r_n = n\pi a_2/R$. Одинаково закрепленные звенья будут, кроме того, колебаться как закрепленные в точке $x = R$.

3.2. Для четырехзвенной струны (см. рис. 2) примем закрепленными звенья 2, 3, 4 и свободным – край звена 1. Отсчет длин будем проводить от краев звеньев длины R_1, там $x = 0$, в узле $x = R_1$, на краю горизонтальных звеньев $x = l = R_1 + R_2$. Все остальное в постановке этой задачи такое же, как в п. 1.2.

Согласно краевым условиям имеем:

$$v_1(x) = A_1 \cdot cos[\,\lambda x / a_1\,], \quad v_3(x) = A_3 \cdot sin[\,\lambda x / a_1\,], \quad x \in (0, R_1),$$
$$v_{2,4}(x) = A_{2,4} \cdot sin\frac{\lambda}{a_2}(x-l), \quad x \in (R_1, l).$$

Условия сопряжения приводят к уравнениям для собственных значений:

1) $sin\dfrac{\lambda}{a_2}R_2 = 0, \quad \lambda_n = n\pi a_2/R_2$;

2) $\mu\, sin\dfrac{\lambda}{a_2}R_2 \cdot cos\dfrac{2\lambda}{a_1}R_1 + cos\dfrac{\lambda}{a_2}R_2 \cdot sin\dfrac{2\lambda}{a_1}R_1 = 0, \quad \mu = \dfrac{T_1 a_2}{T_2 a_1}.$ (3.6)

Соответствующие собственные функции таковы:

$$y_1(x,\lambda_n)=(0,A_2,0,A_4)^T \sin\frac{\lambda_n}{a_2}(x-l), \quad A_2+A_4=0,$$

$$y_2(x,r_n)=\left[s_1 s_2 \cos\frac{r_n}{a_1}x, -c_1 s_1 \sin\frac{r_n}{a_2}(x-l), c_1 s_2 \sin\frac{r_n}{a_1}x, -c_1 s_1 \sin\frac{r_n}{a_2}(x-l)\right]^T,$$

где r_n – положительные корни уравнения (3.6); $s_k=\sin\frac{r_n}{a_k}R_k$; $c_k=\cos\frac{r_n}{a_k}R_k$.

Решение задачи колебания с учетом начальных условий имеет вид

$$\vec{u}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(y_1(x,\lambda_n)\cos\lambda_n t+B_n y_2(x,r_n)\cos r_n t\right). \quad (3.7)$$

При $t=0$ равенство (3.7) переходит в равенство

$$\left(f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x)\right)^T=\sum_{n=1}^{\infty}\left(y_1(x,\lambda_n)+B_n y_2(x,r_n)\right), \quad (3.8)$$

из которого надо найти B_n и $A_2(n)$, $A_4(n)$.

Методом, изложенным в п. 3.1, получаем

$$F(x_1)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cdot z(x_1,r_n), \quad -R_1<x_1<R_2, \quad (3.9)$$

где $F(x_1)=\begin{cases} f_1(-x_1)-f_3(-x_1), & x_1\in(-R_1,0), \\ f_1(x_1)+f_3(x_1), & x_1\in(0,R_1), \\ f_2(x_1)+f_4(x_1), & x_1\in(R_1,l); \end{cases}$

$$z(x,r_n)=\begin{cases} \sin\frac{r_n}{a_2}R_2\cdot\sin\frac{r_n}{a_1}(x_1+R_1), & x_1\in(-R_1,R_1), \\ \sin\frac{2r_n}{a_1}R_1\cdot\sin\frac{r_n}{a_2}(l-x_1), & x_1\in(R_1,l). \end{cases} \quad (3.10)$$

Функция $z(x,r_n)$ есть собственная функция задачи Штурма – Лиувилля:

$$z''+\left(\frac{r}{a_k}\right)^2 z=0, \quad z(-R_1)=z(l)=0,$$

$$z(R_1-0)=z(R_1+0), \quad T_1 z'(R_1-0)=T_2 z'(R_1+0).$$

Коэффициенты B_n, $A_2(n)$, $A_4(n)$ находим так же, как и в предыдущих пунктах.

Вывод. С частотой λ_n совершают колебания только звенья 2, 4, вся струна как единое целое колеблется с частотой r_n. Система собственных векторных функций задачи является полной.

Предлагаем решить задачу о колебании четырехзвенной струны, у которой звенья 1 и 2 свободны, а звенья 3 и 4 закреплены.

Заключение

1. Показано, что методом Фурье могут быть решены задачи о свободных колебаниях многозвенных струн с различными длинами, изготовленных из различных материалов, имеющих разные натяжения и разные условия закрепления краёв.

2. Установлена полнота векторных собственных функций в классе вектор-функций из начальных условий задач.

3. Выявлены особенности свободных колебаний звеньев струны.

4. Ради простоты и ясности изложения рассмотрены струны с тремя и четырьмя звеньями. Метод может быть распространен на случай любого количества звеньев, но двух разных видов.

Список литературы

1. Денисова, Т.В. О колебании многозвенных струн [Текст] / Т.В. Денисова, В.С. Проценко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 49. – Х., 2011. – С. 148 – 161.

2. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 735 с.

3. Проценко, В.С. Некоторые обобщения в теории ортогональных разложений [Текст] / В.С. Проценко // Математические методы анализа динамических систем. – Х. : ХАИ. – 1977. – Вып. 1. – С. 3 – 13.

Рецензент: д-р. физ.-мат. наук, проф. В.А. Меньшиков, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков

Поступила в редакцию 22.01.13

Коливання багатоланкових струн з різними ланками

При класичних гіпотезах розв’язано задачі про малі вільні коливання неоднорідних багатоланкових струн з різними умовами закріплення кінців ланок. Запропоновано метод відшукання точних розв’язків цих задач, який узагальнює класичний метод Фур’є.

Ключові слова: вільні коливання, багатоланкові струни, умови закріплення, початкові форми, задача Штурма – Ліувілля, повнота системи власних векторних функцій.

Vibration of multilink strings with a different links

In classic hypothesis the tasks on free and small vibrations of heterogeneous multilink strings with different length links and different fixing conditions of edges are solved. The method of obtaining exact solutions of these tasks, which generalizes the classical Fourier method, is offered.

Keywords: free vibrations, multilink strings, fixing conditions, initial form, Sturm – Liouville problem, completeness of system of the vector eigenfunctions.