УДК 629.764.01
А.Б. Савченко, В.Г. Сухоребрый, А.А. Цветкова

# Определение эффективности метода вариаций для проектной оценки вероятности устойчивости ракет

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»*

Осуществлено исследование эффективности метода вариаций для проектной оценки вероятности устойчивости ракет. Исследование проведено на примерах устойчивости ракеты, как твердого тела на низких частотах и устойчивости упругой ракеты. В качестве эталонных значений проектной оценки вероятности устойчивости ракет приняты значения, полученные методом статистического моделирования для доверительной вероятности $P_d$ = 0,95 и доверительного интервала $\pm 10$ %. Исследования показали неприемлемость использования метода вариаций для проектной оценки вероятности устойчивости ракет.
***Ключевые слова:*** ракета, система стабилизации, случайные возмущения, устойчивость, вероятность устойчивости, метод вариаций, статистическое моделирование.

## Постановка проблемы

В настоящее время проектная оценка вероятности устойчивости ракет может быть получена следующими методами:

- методом вероятностных границ [1];
- с помощью граничных моделей [2];
- методом ускоренного статистического моделирования [2];
- методом статистического моделирования.

Эти методы достаточно ресурсоемки и для ранних стадий проектирования зачастую приводят к неоправданно большим затратам ресурсов и времени. В то же время существует весьма простой, с малыми затратами ресурсов и времени, метод вариаций, с помощью которого успешно определяются потребные диапазоны отклонения управляющих органов [3]. При этом для решения задачи метод применяется как на ранних, так и на завершающих стадиях проектирования. Было бы весьма заманчивым использовать метод вариаций и для оценки вероятности устойчивости, хотя бы на ранних стадиях проектирования. Однако проблема заключается в том, что отклонения управляющих органов линейно связаны с доминирующими внешними возмущениями, а вариации параметров ракеты здесь оказываются второстепенными. При оценке устойчивости наоборот: влияние вариаций параметров ракеты и автомата стабилизации играют доминирующую роль, а их влияние - нелинейно.

## Объект и цель исследования

Движение статически неустойчивой упругой РН в канале рыскания, устойчивость которой обеспечивается автоматом стабилизации (АС), можно описать следующей упрощенной системой дифференциальных уравнений [1]:

$$\begin{aligned}
&\ddot{\psi} = a_{\psi\psi}\psi + a_{\psi\delta}\delta,\\
&\ddot{z} = a_{z\psi}\psi + a_{z\delta}\delta,\\
&\ddot{q} = a_{qq}q + a_{q\delta}\delta,\\
&\psi_d = \psi + a_{\delta q}q,\\
&T_2\ddot{\delta} + T_1\dot{\delta} + \delta = K_\psi\psi_d + K_{\dot{\psi}}\dot{\psi}_d - K_{\dot{Z}}\dot{z},
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\psi$ - отклонение угла рыскания ракеты как твердого тела от программного значения; $z$ - отклонение центра масс от программного значения; $\delta$ - угол отклонения управляющих органов; $q$ - координата, характеризующая поперечные упругие колебания корпуса ракеты в месте установки датчика угла рыскания; $\psi_d$ - угол рыскания, измеряемый датчиком угла; $a_{ij}$ - коэффициенты, зависящие от характеристик РН; $T_1, T_2$ - постоянные времени АС; $K_\phi$ - коэффициент усиления по каналу рыскания, $K_{\dot{\phi}} = T_d K_\phi$; $T_d$ - постоянная времени дифференцирования; $K_{\dot{Z}}$ - коэффициент усиления по скорости отклонения центра масс. Параметры $T_1, T_2$, $K_\phi$, $T_d$ имеют существенные случайные разбросы (превышающие 20 %).

Условия устойчивости системы (1) имеют следующий вид[1]:

$$\frac{(K_\phi |a_{Z\delta}| + |a_{Z\phi}|)K_{\dot{Z}} + a_{\phi\phi}K_\phi(T_d - T_1)}{|a_{\phi\delta}|K_\phi^2(T_d - T_1)} < 1\,; \tag{2}$$

$$\frac{|a_{\phi\delta}|T_2 T_d^2 K_\phi}{(T_d - T_1 + a_{\phi\phi}T_d T_2)T_1} < 1; \tag{3}$$

$$\frac{a_{q\delta}a_{\delta q}K_\phi T_d^2 T_2}{(|a_{qq}|T_2 T_d - T_d + T_1)T_1} < 1. \tag{4}$$

Условие устойчивости (2) характеризует ракету как твердое тело на низких частотах [1] – так называемую нижнюю границу; условие (3) характеризует ракету как твердое тело на высоких частотах – так называемую верхнюю границу; условие (4) характеризует упругую ракету на частотах упругих колебаний корпуса ракеты – так называемую упругую границу.

Обычно на высоких частотах доминирует упругая граница [1], поэтому в дальнейших исследованиях будем рассматривать только условия (2) и (4) и их преобразованную форму, которая используется для построения области устойчивости:

$$\frac{K_{\psi}\left|a_{z\delta}\right|+\left|a_{z\psi}\right|}{\left|a_{\psi\delta}\right|K_{\psi}^{2}-a_{\psi\psi}K\psi_{\psi}}\cdot K_{\dot{z}}+T_{1}-T_{d}<0, \quad (5)$$

$$K_{\psi}-\frac{(\left|a_{qq}\right|T_{2}T_{d}-T_{d}+T_{1})T_{1}}{a_{q\delta}a_{\delta q}T_{d}^{2}T_{2}}<0. \quad (6)$$

На примере этих условий попытаемся оценить эффективность применения метода вариаций для получения проектной оценки вероятности устойчивости ракеты. В качестве эталонных оценок примем оценки вероятности устойчивости, полученные методом статистического моделирования. Вероятность потери устойчивости с помощью статистического моделирования определяется по формуле

$$Q_{y}^{*}=\frac{N_{0}}{N}, \quad (7)$$

где $N$ - общий объем статистического моделирования; $N_0$ - число нарушений условия устойчивости. В этом случае вероятность устойчивости $P_y^* = 1-Q_y^*$.

Значение $N_0$ определяется по выражению[2]

$$N_{0}=\frac{U_{d}^{2}}{\beta^{2}}, \quad (8)$$

где $U_d$ - безразмерный аргумент функции Гаусса для заданной доверительной вероятности; $\beta$ - доверительный интервал, который выражается в долях от значения $Q_y$.

В этом случае статистическое моделирование проводится до тех пор, пока значение $N_0$ не станет равным величине, определяемой формулой (8). При этом общий объем $N$ фиксируется таким, каким получится на момент достижения $N_0$ необходимого значения. Для исследований настоящей работы приняты $U_d$ = 2 (примерно соответствует доверительной вероятности 0,95) и $\beta$ = 0,1.

### *Метод вариаций*

Условия устойчивости (2) – (6) в общем виде могут быть представлены, как

$$\lambda(\eta)<\Lambda, \quad (7)$$

где $\lambda(\eta)$ - левая часть условий устойчивости, которую назовем критериальной функцией (КФ); $\eta$ - вектор параметров; $\Lambda$ - правая часть условий устойчивости ( в нашем случае - «1» или «0»). Вектор параметров $\eta$ может быть представлен в виде

$$\eta = \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ . \\ . \\ . \\ \eta_n \end{vmatrix}$$, где $\eta_i = a_i^0 + v_i \sigma_i$. Здесь $\sigma_i$ - с.к.о. параметра $\eta_i$, а $v_i$ является нормальным, нормированным, центрированным случайным числом с м.о., равным нулю и с.к.о., равным единице. Введем понятие $\eta^{(k)}$:

$$\eta^{(k)} = \begin{vmatrix} a_1^0 \\ a_2^0 \\ . \\ . \\ \eta_k \\ . \\ . \\ a_n^0 \end{vmatrix}$$. где $\eta_k = a_k^o \pm 3\sigma_k$, причем знак «+» или «-» выбирается таким образом, чтобы КФ увеличивалась. Значение КФ, где вектор $\eta = \eta^{(k)}$, обозначим: $\lambda_k = \lambda(\eta^{(k)})$. *к*–й вариацией КФ назовем $\Delta\lambda_k = \lambda_k - \lambda_0$, где $\lambda_0 = \lambda(\eta^{(0)})$ представляет собой номинальное значение КФ, а

$$\eta^{(0)} = \begin{vmatrix} a_1^0 \\ a_2^0 \\ . \\ . \\ . \\ a_n^0 \end{vmatrix}.$$

Метод вариаций имеет такую последовательность действий.

1. Найти все вариации КФ $\Delta\lambda_k, k = \overline{1,n}$.
2. Найти полную вариацию КФ $\Delta\lambda = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\Delta\lambda_k)^2}$.

3. Найти с.к.о. КФ $\sigma_\lambda = \frac{\Delta\lambda}{3}$.
4. Считая КФ нормальной случайной величиной с м.о. $\lambda_0$ и с.к.о. $\sigma_\lambda$, определить вероятность устойчивости, для чего:
   - найти безразмерный аргумент функции Гаусса $U = \frac{\Lambda - \lambda_0}{\sigma_\lambda}$;
   - пользуясь таблицей функции Гаусса, найти вероятность устойчивости $P_y$.

***Результаты исследования***

Номинальные значения и случайные разбросы параметров, соответствующие времени полета t=70 с первой ступени ракеты-носителя (РН) «Циклон-3», представленные научно-производственным предприятием «Хартрон-Аркос», приведены в табл. 1.

Таблица 1

| *Параметр* | *Разброс* $\Delta_i$, *%* | *Значение* $a_i^0$ |
|---|---|---|
| $a_{z\psi}$ | *5* | *-36,09* |
| $a_{z\delta}$ | *5* | *-1,441* |
| $a_{\psi\psi}$ | *30* | *1,8113* |
| $a_{\psi\delta}$ | *10* | *-0,295* |
| $a_{qq}$ | *40* | *-233,7707* |
| $a_{q\delta}$ | *10* | *-2,42* |
| $a_{\delta q}$ | *20* | *-0,42* |
| $T_1$ | *40* | *0,1* |
| $T_2$ | *40* | *0,01* |
| $T_d$ | *20* | *0,5* |
| $K_z^{'}$ | *40* | *0,009* |
| $K_\psi$ | *30* | *10* |

Закон распределения случайных разбросов всех коэффициентов – нормальный.

Математическим ожиданием каждого коэффициента $m_i$ является значение этого коэффициента при нулевых разбросах $m_i = a_i^0$. Среднеквадратическое отклонение $\sigma_i$ для каждого коэффициента находят по формуле $\sigma_i = \frac{\Delta_i \cdot a_i^0}{300}$.

На рис. 1 – 4 приведены экранные формы результатов расчетов для условий (2), (5), (4) и (6) соответственно.

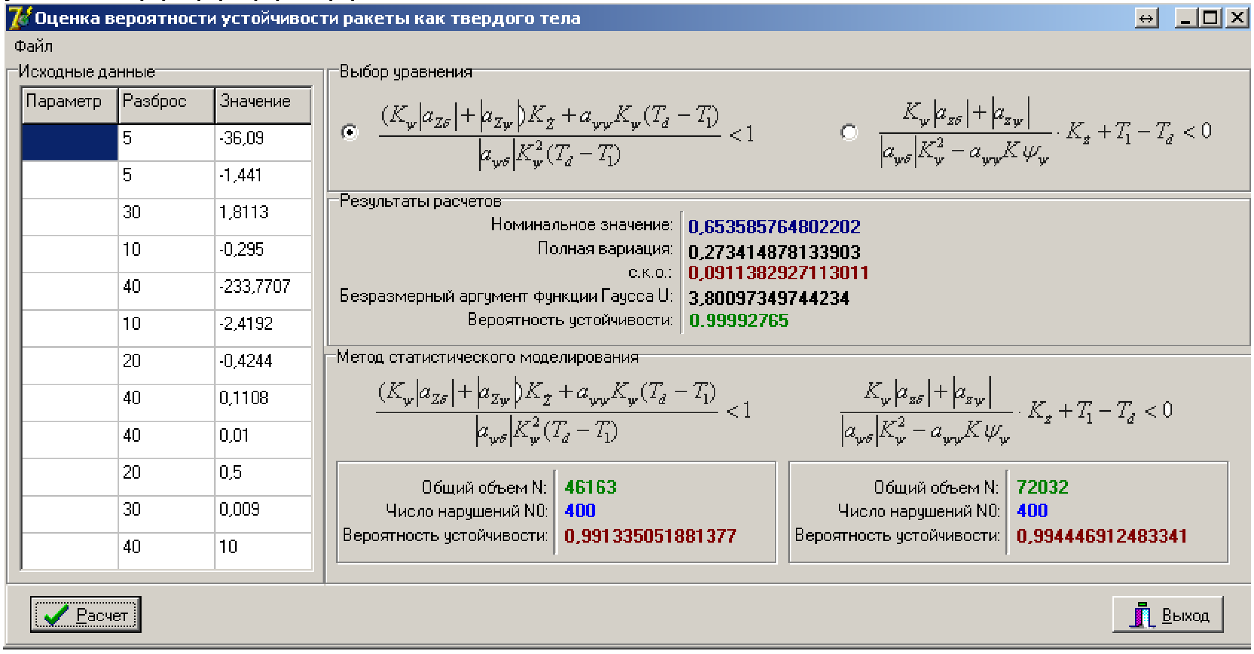


Рис. 1. Исследование условия (2)

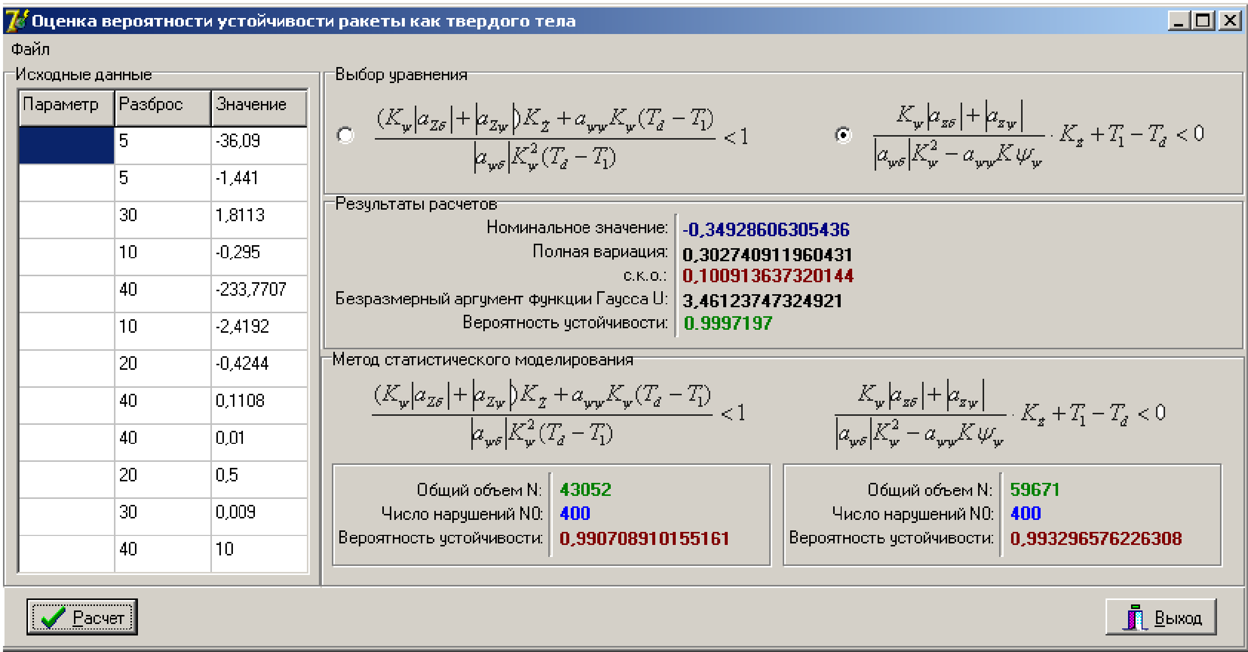


Рис. 2. Исследование условия (5)

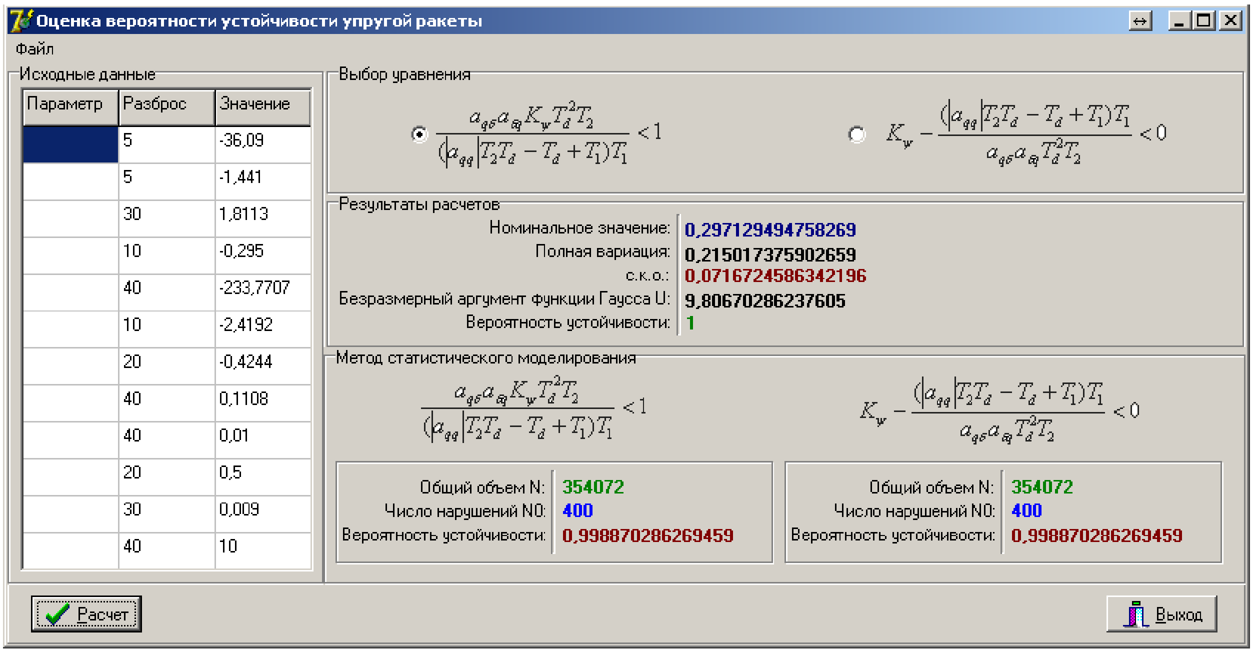


Рис. 3. Исследование условия (4)

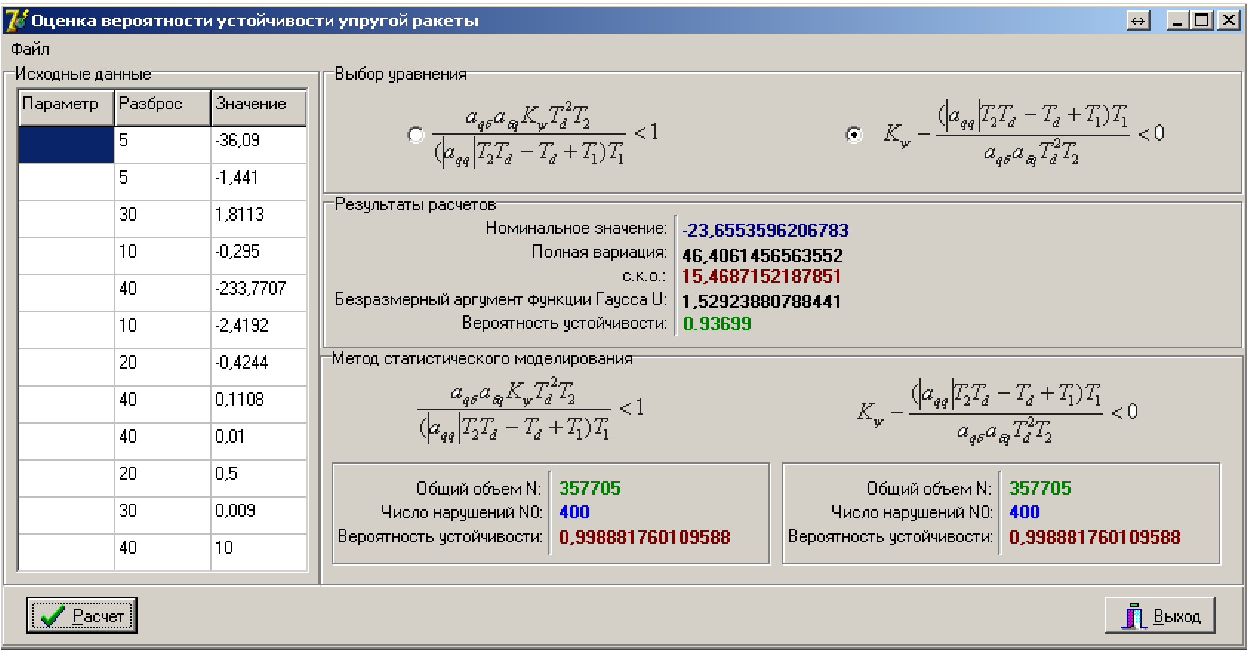


Рис. 4. Исследование условия (6)

Для удобства сравнения результатов в табл. 1 приведены вероятности потери устойчивости для рассмотренных условий и погрешности метода вариаций. В таблице приняты следующие обозначения:

- $Q_y^*$ - вероятность потери устойчивости, полученная с помощью статистического моделирования;
- $Q_y^v$ - вероятность потери устойчивости, полученная метом вариаций;
- $\Delta Q_y$ - погрешность вероятности потери устойчивости, полученной методом вариаций: $\Delta Q_y = Q_y^v - Q_y^*$;
- $\varepsilon_Q$ - погрешность вероятности потери устойчивости, полученной методом вариаций: $\varepsilon_Q = \dfrac{\Delta Q_y}{Q_y^*}$.

Таблица 1

| Вероятность потери устойчивости | Ракета, как твердое тело | | Упругая ракета | |
|---|---|---|---|---|
| условие | (2) | (5) | (4) | (6) |
| $Q_y^*$ | 0,0087 | 0,0064 | 0,00113 | 0,00112 |
| $Q_y^v$ | 0,000072 | 0,00028 | 0,00 | 0,063 |
| $\Delta Q_y$ | - 0,008628 | - 0,00612 | - 0,00113 | 0,06188 |
| $\varepsilon_Q$ | - 0,992 | - 0,956 | - 1 | 55,25 |

Анализ результатов проведенных исследований показывает, что использование метода вариаций для проектной оценки вероятности потери устойчивости ракет приводит к большим погрешностям.

## Вывод

Для получения проектной оценки вероятности устойчивости систем стабилизации ракет метод вариаций является неприемлемым даже на ранних стадиях проектирования.

## Список литературы

1. Айзенберг, Я.Е. Проектирование систем стабилизации носителей космических аппаратов [Текст]/ Я.Е. Айзенберг, В.Г. Сухоребрый. - М.: Машиностроение, 1986. – 220 с.
2. Лежнина, М.В. Проектная оценка вероятности достижения объектами аэрокосмической техники предельных состояний [Текст]/ М.В. Лежнина, В.Г. Сухоребрый – Х.: НАКУ «ХАИ», 2005. – 184 с.
3. Ракета как объект управления: [Текст] учебник / И.М Игдалов., Л.Д Кучма., Н.В Поляков., Ю.Д Шептун.; под ред. акад. С.Н. Конюхова. – Д.: АРТ-ПРЕСС, 2004. – 544 с.

**Рецензент:** д.т.н., проф., зав. каф. Е.А. Дружинин, Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Поступила в редакцию 17.05.2013

# Визначення ефективності методу варіацій для проектного оцінювуання ймовірності стійкості ракет

Здійснено дослідження ефективності методу варіацій для проектного оцінювання ймовірності стійкості ракет. Дослідження проведено на прикладах стійкості ракети як твердого тіла на низьких частотах і стійкості пружної ракети. За еталонні значення проектного оцінювання ймовірності стійкості ракет прийнято значення, отримані методом статистичного моделювання для довірчої ймовірності $P_d$ = 0,95 і довірчого інтервалу 10 %. Дослідження показали неприйнятність використання методу варіацій для проектного оцінювання ймовірності стійкості ракет.

***Ключові слова:*** ракета, система стабілізації, випадкові збурення, стійкість, ймовірність стійкості, метод варіацій, статистичне моделювання.

# Determination of the effectiveness of the method of variations to assess the likelihood of project sustainability missiles

A study of the effectiveness of the variational method for estimating the probability of project sustainability missiles. The study was conducted on the stability of the rocket examples, as a solid body at low frequencies and elastic stability of the rocket. As a reference value estimates of the probability of project sustainability missiles adopted the values obtained by statistical modeling for confidence $P_d$ = 0.95 and 10% confidence interval. Studies have shown the unacceptability of the use of the variational method for estimating the probability of project sustainability missiles.

***Keywords:*** rocket, stability, random perturbations, the stability, the likelihood of sustainability, the method of variations, statistical modeling.