УДК 539.3
Ю.А. Щербакова

Равновесие круговой пластины, ослабленной несимметричным диаметральным разрезом

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Предложен метод исследования краевых задач теории упругости с несимметричным диаметральным разрезом, основанный на применении соотношений между базисными решениями уравнений равновесия в полярных и биполярных координатах. Реализация этого метода приводит к квазирегулярным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений второго рода с точно вычисляющимися и экспоненциально убывающими матричными элементами, что позволяет провести эффективный асимптотический и численный анализ напряженно деформированного состояния в зонах концентрации напряжений. Полученные результаты могут использоваться при исследовании на прочность деталей авиационной и космической техники.
Ключевые слова: координаты, трещина, пластина, уравнения равновесия, концентрация напряжений.

Введение

Предложен метод исследования краевых задач теории упругости для круговой пластины с несимметричным диаметральным разрезом (трещиной), основанный на применении соотношений между базисными решениями уравнения Ламе в полярных и биполярных координатах. Реализация этого метода приводит к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений второго рода с точно вычисляющимися и экспоненциально убывающими матричными коэффициентами, что позволяет провести эффективный анализ напряженно-деформированного состояния вблизи концентраторов напряжений.

Объектами особого внимания механики разрушения являются вершины трещин – места возникновения предельной концентрации напряжений и одновременно исходные точки развития этих трещин. Знание соответствующих коэффициентов интенсивности напряжений дает возможность изучить поведение тела с трещинами, в частности сформулировать условия локального разрушения материала [1].

В данной работе приведены новые соотношения между базисными решениями уравнения Лапласа и векторного уравнения Ламе в полярных и биполярных координатах. Рассмотрена первая краевая задача для упругой круговой пластины, ослабленной внутренним несимметричным разрезом. Разложением по малому геометрическому параметру получены асимптотические формулы для коэффициентов интенсивности нормальных напряжений.

Постановка задачи

Пусть (x,y), (x_1,y_1), (ρ_1,φ_1), (α,β), (α,σ) – декартовые, полярные и биполярные координаты, определяемые равенствами (рис. 1)

$$x_1 = x + h, \quad y_1 = y;$$

$$x_1 = \rho_1 cos\varphi_1, \quad y_1 = \rho_1 sin\varphi_1;$$

$$x = \frac{ash\alpha}{ch\alpha + cos\beta} = \frac{asha}{ch\alpha - cos\sigma}, \qquad y = \frac{asin\beta}{ch\alpha + cos\beta} = \frac{asin\sigma}{ch\alpha - cos\sigma},$$
$$(a > 0, h > 0, -\pi \le \beta, \ \ \sigma \le \pi, -\infty < \alpha < \infty).$$

Базисные решения уравнений Ламе

$$grad\, div\, \boldsymbol{u} + (1 - 2\nu)\Delta \boldsymbol{u} = 0 \qquad (1)$$

($\boldsymbol{u}$ – вектор упругих перемещений, ν – коэффициент Пуассона) в полярных и биполярных координатах, обладающие симметрией по координате y, выберем в форме вектор-функции

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_{1,n}(\rho_1, \varphi_1) = {\rho_1}^{n-1}\left[cos(n\text{-}1)\varphi_1 \boldsymbol{e}_x - sin(n\text{-}1)\varphi_1 \boldsymbol{e}_y\right], \\ \boldsymbol{u}_{2,n}(\rho_1, \varphi_1) = 2(y\, grad - \chi \boldsymbol{e}_y)[{\rho_1}^{n+1} sin(n+1)\varphi_1] + (n+1\text{-}\ \chi)\boldsymbol{u}_{1,n+2}(\rho_1, \varphi_1), \\ \boldsymbol{u}_{3,n}(\rho_1, \varphi_1) = {\rho_1}^{-(n+1)}\left[cos(n+1)\varphi_1 \boldsymbol{e}_x + sin(n+1)\varphi_1 \boldsymbol{e}_y\right], \\ \boldsymbol{u}_{4,n}(\rho_1, \varphi_1) = 2(y\, grad - \chi\, \boldsymbol{e}_y)\left[{\rho_1}^{-(n-1)} sin(n\text{-}1)\varphi_1\right] + (n\text{-}1 + \chi)\boldsymbol{u}_{3,n-2}(\rho_1, \varphi_1); \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_1(\alpha, \beta; \tau) = \left(ch\, \tau\beta\, e^{i\tau\alpha} - 1\right)\boldsymbol{e}_x - i\, sh\, \tau\beta\, e^{i\tau\alpha} \boldsymbol{e}_y, \\ \boldsymbol{u}_2(\alpha, \beta; \tau) = \left(y\, grad - \chi \boldsymbol{e}_y\right) sh\, \tau\beta\, e^{i\tau\alpha}, \\ \boldsymbol{u}_3(\alpha, \sigma; \tau) = \left(ch\, \tau\sigma\, e^{i\tau\alpha} - 1\right)\boldsymbol{e}_x + i\, sh\, \tau\sigma\, e^{i\tau\alpha} \boldsymbol{e}_y, \\ \boldsymbol{u}_4(\alpha, \sigma; \tau) = 2(y\, grad - \chi\, \boldsymbol{e}_y)\ sh\, \tau\sigma\, e^{i\tau\alpha}; \end{cases} \qquad (3)$$

($\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$– орты декартовой системы координат, $\chi = 3 - 4\nu$).

Рассмотрим соотношения между базисными решениями уравнения Лапласа в полярных и биполярных координатах

$$\left.\begin{aligned} {\rho_1}^n cos\, n\varphi_1 &= h^n + (a + h)^n \int_{-\infty}^{\infty} C_n(\tau)(ch\tau\beta e^{i\tau\alpha} - 1)d\tau, \\ {\rho_1}^n sin\, n\varphi_1 &= i(a + h)^n \int_{-\infty}^{\infty} C_n(\tau) sh\tau\beta e^{i\tau\alpha}\, d\tau; \end{aligned}\right\} (|\beta| < \pi)$$

$$\left.\begin{aligned} ch\, \tau\sigma e^{i\tau\alpha} - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n(\tau)\, (a + h)^n {\rho_1}^{-n} cos\, n\varphi_1, \\ sh\, \tau\sigma e^{i\tau\alpha} &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n(\tau)\, (a + h)^n {\rho_1}^{-n} sin\, n\varphi_1, \end{aligned}\right\} (\rho_1 > a + h)$$

где

$$C_m(\tau) = -\frac{ima}{a+h}\frac{1}{sh\pi\tau} F\left(1-m, 1+i\tau; 2; \tfrac{2a}{a+h}\right) (m = 1,2,\dots),$$

$$D_m(\tau) = -\frac{2ia\tau}{a+h} F\left(1-m, 1-i\tau; 2; \tfrac{2a}{a+h}\right) (m = 1,2,\dots);$$

$$F(-n, b; c; z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k (b)_k}{k!\,(c)_k} z^k; \quad (a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} = (-1)^k \frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-a-k)},$$

$F(-n, b; c; z)$ – гипергеометрический полином [2], $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Получим связь между решениями (2), (3):

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_{1,n}(\rho_1, \varphi_1) = (a+h)^{n-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} C_{n-1}(\tau) \boldsymbol{u}_1(\alpha, \beta; \tau) d\tau + h^{n-1} \boldsymbol{e}_x \ (n = 2,3,\dots), \\ \boldsymbol{u}_{2,n}(\rho_1, \varphi_1) = i(a+h)^{n+1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} C_{n+1}(\tau) \left[2\boldsymbol{u}_2(\alpha, \beta; \tau) - \right. \\ \qquad \left. -i(n+1-\chi) \boldsymbol{u}_1(\alpha, \beta; \tau)\right] d\tau + (n+1-\chi) h^{n+1} \boldsymbol{e}_x (n = 0,1,2,\dots), \\ \boldsymbol{u}_3(\alpha, \sigma; \tau) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} D_{n+1}(\tau) (a+h)^{n+1} \boldsymbol{u}_{3,n}(\rho_1, \varphi_1), \\ \boldsymbol{u}_4(\alpha, \sigma; \tau) = -i \sum\limits_{n=2}^{\infty} D_{n-1}(\tau) (a+h)^{n-1} \boldsymbol{u}_{4,n}(\rho_1, \varphi_1) + \\ \qquad + i \sum\limits_{n=0}^{\infty} D_{n+1}(\tau) (a+h)^{n+1} (n+1+\chi) \boldsymbol{u}_{3,n}(\rho_1, \varphi_1). \end{cases} \quad (4)$$

Метод получения такого рода соотношений между базисными гармоническими функциями, рассматриваемыми в разных координатных системах, изложен в работе [3].

Решение задачи

Применим разложения (4) к решению задачи о равновесии упругой круговой пластинки $0 \le \rho_1 \le R$, ослабленной разрезом (трещиной) $\beta = 0, (\sigma = \pm\pi)$. Пусть берега $\sigma = \pm\pi$ $(y = \pm 0, -a < x < a)$ этого разреза растягиваются равномерно распределенными нормальными усилиями интенсивности $\rho_0 = const$ $(\rho_0 > 0)$, а граничная линия $\rho_1 = R$ свободна от внешних усилий. Тогда граничные условия имеют вид

$$\sigma_y\big|_{\sigma=\pm\pi} = -p_0, \quad \tau_{xy}\big|_{\sigma=\pm\pi} = 0, \quad \sigma_{\rho_1}\big|_{\rho_1=R} = 0, \quad \tau_{\rho_1\varphi_1}\big|_{\rho_1=R} = 0. \quad (5)$$

С учетом симметрии задачи относительно Oy общее решение уравнения (1) представим в виде

$$\boldsymbol{u} = \sum_{n=2}^{\infty} B_n^{(1)} \boldsymbol{u}_{1,n}(\rho_1, \varphi_1) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(2)} \boldsymbol{u}_{2,n}(\rho_1, \varphi_1) + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} A_1(\tau)\, \boldsymbol{u}_3(\alpha, \sigma; \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} A_2(\tau)\, \boldsymbol{u}_4(\alpha, \sigma; \tau) d\tau. \tag{6}$$

Удовлетворяя условиям (5) на основе общего решения (6) и соотношений (4), исключая затем плотности интегралов $A_1(\tau)$, $A_2(\tau)$ и вводя безразмерные величины $b_n^{(1)}$, $b_n^{(2)}$, x_n по формулам

$$b_n^{(1)} = \frac{2G}{a\, p_0} R^{n-1} B_n^{(1)}, \quad b_n^{(2)} = \frac{2G}{a\, p_0}(n+1) R^{n+1} B_n^{(2)}, \quad x_n = b_{n+2}^{(1)} + \frac{n+2}{n+1} b_n^{(2)}$$

(G – модуль сдвига), после некоторых преобразований для отыскания величин x_n получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} d_{nk} x_k + f_n (n = 0,1,2, \dots), \tag{7}$$

в которой

$$d_{0k} = -3\lambda^{k+2}\left(2\lambda^2 I_{2,k} - I_{0,k}\right), \quad d_{1k} = -\lambda^{k+3}\left(10\lambda^2 I_{3,k} - 9 I_{1,k}\right)(k = 0,1,2, \dots),$$

$$f_0 = -6\lambda(2\lambda^2\omega_2 - \omega_0), \quad f_1 = -2\lambda^2(10\lambda^2\omega_3 - 9\omega_1);$$

$$d_{nk} = -\frac{1}{2}\lambda^{k+n}\left[(n+3)(n+4)\lambda^4 I_{n+2,k} - 2(n+2)^2\lambda^2 I_{n,k} + (n-1)(n+2) I_{n-2,k}\right],$$

$$f_n = -\lambda^{n-1}\left[(n+3)(n+4)\lambda^4\omega_{n+2} - 2(n+2)^2\lambda^2\omega_n + (n-1)(n+2)\omega_{n-2}\right];$$

$$(n = 2,3, \dots; \qquad k = 0,1,2, \dots)$$

$$I_{m,k} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_{m+1}(\tau) C_{k+1}(\tau)}{ch\, \pi\tau} d\tau, \quad \omega_n = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_{m+1}(\tau)}{sh\, 2\pi\tau} d\tau; \quad \lambda = \frac{a+h}{R} < 1.$$

Существенно, что коэффициенты интенсивности нормальных напряжений

$$K_I^+ = \lim_{\substack{x \to a \\ (x > a)}} \left[\sigma_y \sqrt{2(x-a)}\right]_{\sigma=0}, \quad K_I^- = \lim_{\substack{x \to -a \\ (x < -a)}} \left[\sigma_y \sqrt{-2(x+a)}\right]_{\sigma=0}$$

выражаются непосредственно через решение системы (7):

$$K_I^{\pm} = p_0\sqrt{a}\left[1 - \frac{1}{1+\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1) x_k \lambda^{k+1} F\left(-k, 1 \mp \frac{1}{2}; 2; \tfrac{2}{1+\varepsilon}\right)\right], \quad \varepsilon = \frac{h}{a}.$$

Используя равенства [2, 4]

$$sh\,\pi x = \frac{\pi x}{\Gamma(1-ix)\Gamma(1+ix)},\ ch\,\pi x = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-ix\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+ix\right)},$$

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s)ds = $$
$$= 2\pi i\frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta)},$$

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(\gamma+s)}(-z)^s ds = 2\pi i\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta;\gamma;z),$$

для вычисления коэффициентов $I_{m,k}$, ω_m получаем простые формулы

$$I_{m,k} = \frac{k+1}{(1+\varepsilon)^2}\sum_{j=0}^{m}\frac{(-m)_j\left(\frac{3}{2}\right)_j}{j!\,(2)_j}\left(\frac{2}{1+\varepsilon}\right)^j\sum_{s=0}^{k}\frac{(-k)_s\left(\frac{3}{2}\right)_s}{s!\,(2)_s(j+s+2)}\left(\frac{2}{1+\varepsilon}\right)^s,$$

$$\omega_m = -\frac{1}{2}(1+\varepsilon)I_{m,0} = -\frac{1}{2(1+\varepsilon)}\sum_{j=0}^{m}\frac{(-m)_j\left(\frac{3}{2}\right)_j}{j!\,(2)_j(j+2)}\left(\frac{2}{1+\varepsilon}\right)^j. \tag{8}$$

Анализ величин (8) на основе интегрального представления

$$I_{m,k} = \frac{k+1}{(1+\varepsilon)^2}\int_0^1 xF\left(-m,\frac{3}{2};2;\tfrac{2x}{1+\varepsilon}\right)F\left(-k,\frac{3}{2};2;\tfrac{2x}{1+\varepsilon}\right)dx$$

и неравенств

$$\left|1-\frac{2xt}{1+\varepsilon}\right| \le 1 \quad (0 \le x,t \le 1),$$

$$\left|F\left(-n,\frac{3}{2};2;\tfrac{2x}{1+\varepsilon}\right)\right| = \left|\frac{2}{\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{t}{1-t}}\left(1-\frac{2xt}{1+\varepsilon}\right)^n dt\right| \le \frac{2}{\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{t}{1-t}}dt = 1$$

показывает, что

$$|I_{m,k}| \le \frac{k+1}{2(1+\varepsilon)^2},\quad |\omega_m| = \frac{1}{4(1+\varepsilon)}(m=0,1,2,\ldots). \tag{9}$$

Из оценок (9) следует, что при $0<\lambda<1$

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty}|d_{nk}| \to 0 \quad (n\to\infty),\quad f_n \to 0 \quad (n\to\infty),$$

т.е. бесконечная система (7) квазирегулярна при $0<\lambda<1$ и вполне регулярна при $0<\lambda\le\lambda_0<1$ для некоторого $\lambda_0 \in (0;1)$. Ограничение $0<\lambda<1$ на возможные значения параметра λ естественным образом связано с формулировкой рассматриваемой задачи и означает, что окружность $\rho_1 = R$ (внешняя граница пластинки) не касается трещины $\sigma = \pm\pi$ и не пересекает с ней.

Решая бесконечную систему (7) методом малого параметра и ограничиваясь при этом членами до порядка $O(\lambda^7)$ для величин x_n и коэффициентов интенсивности $K_I^{\pm}$, получаем значения

$$x_0 = -\frac{3}{2(1+\varepsilon)}\lambda + \frac{6\varepsilon^2 - 3}{2(1+\varepsilon)^3}\lambda^3 + O(\lambda^7),$$

$$x_1 = -\frac{9\varepsilon}{2(1+\varepsilon)^2}\lambda^2 + \frac{5\varepsilon^3 - 3\varepsilon}{(1+\varepsilon)^4}\lambda^4 + O(\lambda^6),$$

$$x_2 = \frac{1}{1+\varepsilon}\lambda - \frac{1+16\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon)^3}\lambda^3 + O(\lambda^5), \qquad x_3 = \frac{5\varepsilon}{2(1+\varepsilon)^2}\lambda^2 + O(\lambda^4),$$

$$K_I^{\pm} = p_0\sqrt{a}\left[1 + \frac{3}{2(1+\varepsilon)^2}\lambda^2 + \frac{6\varepsilon^2 \pm 3}{2(1+\varepsilon)^4}\lambda^4 + \right.$$
$$\left. + \frac{3 \pm 3\varepsilon + 18\varepsilon^2 \pm 16\varepsilon^3 + 16\varepsilon^4}{4(1+\varepsilon)^6}\lambda^6\right] + O(\lambda^8).$$

Частный случай $h = 0$ $(\varepsilon = 0)$ дает известную формулу [5]

$$K_I = K_I^{\pm} = p_0\sqrt{a}\left[1 + \tfrac{3}{2}\lambda^2 + \tfrac{3}{4}\lambda^6\right] + O(\lambda^8).$$

Список литераторы

1. Сиратори, М. Вычислительная механика разрушения [Текст]/ М. Сиратори, Т. Мацусита. – М.: Мир, 1986. – 334 с.
2. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра [Текст]/ Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1965. – 294 с.
3. Проценко, В.С. О совместном применении декартовых и биполярных координат к решению краевых задач теории потенциала и теории упругости [Текст]/ В.С. Проценко, А.И. Соловьев// Прикладная математика и механика. – 1984. – Т. 48, № 6. – С. 973-982.
4. Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Дополнительные главы [Текст]/ А.П. Прудников, Ю.А. Брычков. О.И. Маричев. – М.: Наука, 1986. – 800 с.
5. Панасюк, В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках [Текст]/ В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацышин. – К.: Наук. думка, 1976. – 443 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор В.С. Проценко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.

Поступила в редакцию 15.01.14

Рівновага кругової пластини, послабленої несиметричним діаметральним розрізом

Запропоновано метод дослідження крайових задач теорії пружності з несиметричним діаметральним розрізом, який ґрунтується на застосуванні співвідношень між базисними розв'язками рівнянь рівноваги в полярних і біполярних координатах. Реалізація цього методу приводить до квазірегулярних нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду з матричними елементами, які точно обчислюються та експоненціально спадають, що дозволяє провести ефективний асимптотичний та чисельний аналіз пружно-деформованого стану в зонах концентраціїнапружень. Отримані результати можуть застосовуватись при дослідженні на міцність деталей авіаційної та космічної техніки.

Ключові слова: координати, тріщина, пластина, рівняння рівноваги, концентрація пружень.

Equilibrium of the circular plate, weakened by asymmetrical diametrical section

Is proposed the method of investigating the boundary-value problems of the theory of elasticity with the asymmetrical diametrical section, based on the application of relationships between the basic solutions of the equations of equilibrium in the polar and bipolar coordinates. The application of this method reduces to the quasi-regular infinite systems of the linear algebraic equations of the second kind with the accurately calculated and exponentially diminishing matrix elements, that makes it possible to carry out effective asymptotic and numerical analysis of the tensely-deformed statein the zones of stress concentration. The obtained results can be used with a study for the strength of different components of aviation and space equipment.

Keywords: coordinate, crack, plate, the equation of equilibrium, stress concentration.