

535  
A-95

ПЕРЕОБЛІК 20 <sup>19</sup>р.

ПРОБІРНИЙ  
1952 г.



ПРОФ. Н. И. АХИЕЗЕР

ПЕРЕОБЛІК 20 <sup>12</sup>р.

4920  
2+023

О ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПОТОКЕ  
ЧЕРЕЗ БЕСКОНЕЧНУЮ РЕШЕТКУ



НАУЧНЫЕ ЗАПИСКИ  
ВЫПУСК № 2

Научно-техническая библиотека "ХАИ"




kn0004220

## ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строчка	Напечатано	Следует
5	4 св.	согласуется	согласуются
11	16 св.	$\gamma = e^{-2i\delta} \cdot \frac{\cos \varepsilon - M}{\cos \varepsilon - \overline{M}}$	$1 = e^{-2i\delta} \cdot \frac{\cos \varepsilon - M}{\cos \varepsilon - \overline{M}}$
16	7 сн.	$\frac{\dots}{(t - t_0) \dots}$	$\frac{\dots}{(t_0 - t_0) \dots}$
28	8 сн.	} $\cos(2\theta_0 - \lambda)$	$\cos(2\theta_0 + \lambda)$
28	4 сн.		
33	2 сн.	$\frac{\dots e^{-i(\theta + \delta)}}{\dots}$	$\frac{\dots e^{-i(\theta_0 + \delta)}}{\dots}$
37	4 св.	$V_1 = V_1 \sin \theta_1$	$v_1 = V_1 \sin \theta_1$
37	5 св.	$V_0 = V_0 \sin \theta_0$	$v_0 = V_0 \sin \theta_0$
37	7 св.	$\dots = e^{\theta_0 + i\theta}$	$\dots = e^{\theta + i\theta}$
40	2 сн.	$\left\{ \frac{1}{\omega - \omega_1} + \alpha_0 + \dots \right.$	$\left\{ \frac{1}{\omega - \omega_0} + \alpha_0 + \dots \right.$
42	4 сн.	nino	того
44	8 сн.	$\left\{ \frac{1}{\omega - \omega_0} + \alpha_0 + \dots \right.$	$\left\{ \frac{1}{\omega - \omega_0} + \alpha_0 + \dots \right.$

## ВВЕДЕНИЕ

Под бесконечной решеткой (или просто решеткой) понимают совокупность всех контуров, которые получаются из некоторого одного, лежащего в плоскости, контура с помощью его смещений на целые кратности некоторого лежащего в той же плоскости вектора. При этом ставится естественное требование, чтобы никакие два контура решетки между собой не пересекались. В остальном же на контур никаких ограничений не накладывают; в частности контур может быть „выродившимся“, т. е. не ограничивать никакой области (отрезок прямой или кривой линии), причем в этом случае он рассматривается, как двухбереговый разрез. Каждый отдельный контур решетки часто называют пером решетки.

Изучение обтекания решетки представляет большой интерес в связи с приложениями к теории пропеллеров и турбин.

Эти приложения основаны на следующих соображениях: с большим приближением можно считать, что струя пропеллера имеет форму цилиндра, и что, если этот цилиндр разбить на бесконечно тонкие соосные цилиндрические слои, то жидкость из одного слоя в другой не переходит, так что в каждом слое имеет место свое поверхностное течение жидкости вокруг некоторых контуров (сечений лопастей пропеллера рассматриваемой цилиндрической поверхностью); если поэтому цилиндрическую поверхность слоя развернуть на плоскость и процесс разворачивания продолжить до бесконечности в обе стороны, то в плоскости получится решетка, а гидродинамическая задача нахождения потока в цилиндрическом слое сведется к определению потока через полученную решетку.

Как и в других плоских задачах гидро и аэродинамики можно искать обтекание решетки с отрывом струй и обтекание без отрыва струй (циркуляционное).

Впервые струйное обтекание решетки, пером которой является отрезок прямой линии и притом для одного частного случая направления набегающего потока, изучил Н. Е. Жуковский в замечательной работе „Видоизменение метода Кирхгоффа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока“<sup>1)</sup>.

Исследование Н. Е. Жуковского было обобщено в работе С. Чаплыгина и А. Минакова „Теоретический расчет действия турбины“, напечатанной в виде приложения к 3-му выпуску II тома собрания сочинений Н. Е. Жуковского<sup>2)</sup>. В этой работе также рассматривается

<sup>1)</sup> Московский математический сборник, том XV, 1890; Собрание сочинений, том II вып. 3, 1930.

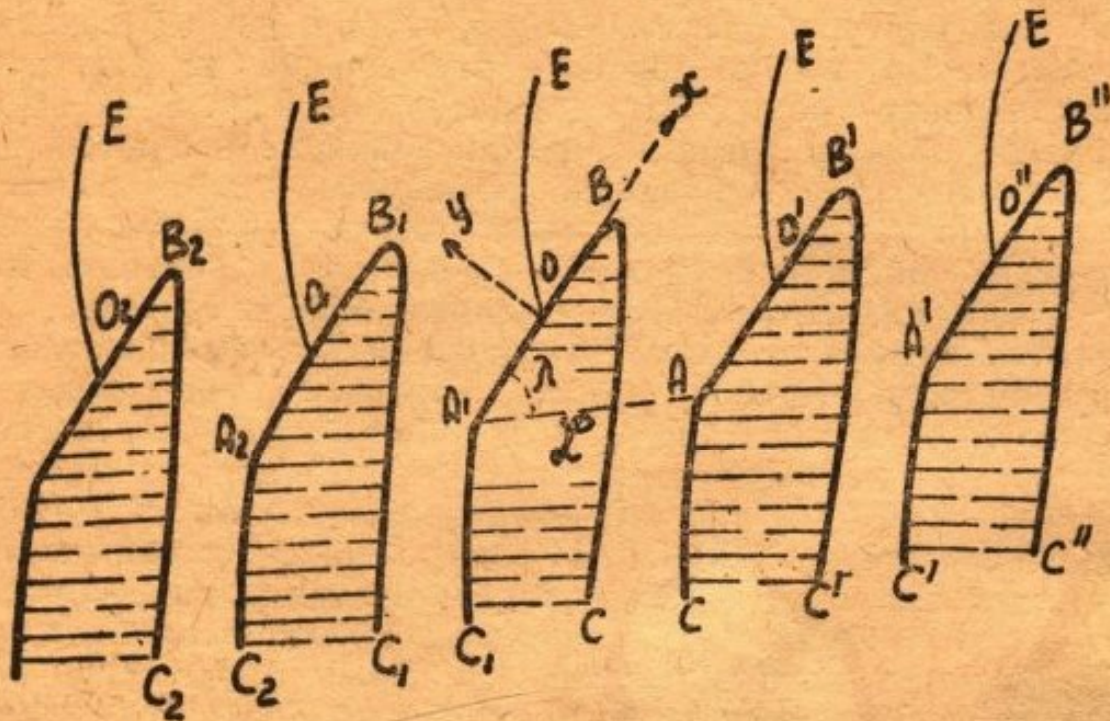
<sup>2)</sup> См. также статью „К теории турбин“ в 1-ом томе собрания сочинений С. А. Чаплыгина.

решетка, перо которой есть отрезок прямой линии, но не делается никаких ограничений относительно направления набегающего потока.

Как Н. Е. Жуковский, так и С. Чаплыгин и А. Минаков исходили из схемы Kirchhoff'a, т. е. предполагали, что струи отрываются от обоих ребер перьев (см. черт. 1).

Других исследований по обтеканию решетки с отрывом струй нам неизвестно.

Что касается обтекания решетки без отрыва струй, то здесь начало исследованиям положили Kutta<sup>3)</sup>, Blasius<sup>4)</sup>, С. Чаплыгин<sup>5)</sup> и Grammel<sup>6)</sup>, при чем общее решение задачи об обтекании решетки без отрыва струй в случае прямолинейного пера дал С. Чаплыгин;



Черт. 1

позднее и независимо от С. Чаплыгина ту же задачу более простым методом решил Е. Копиг<sup>7)</sup>.

Как С. Чаплыгин<sup>5)</sup>, так и Е. Копиг<sup>7)</sup>, определяют величину циркуляции вокруг одного пера решетки из условия конечности скорости в точках...  $A_1, A, A', \dots$  что же касается передних кромок...  $B_1, B, B', \dots$  то в них, как и при аналогичном обтекании одного крыла получается бесконечная скорость. Известно, что, несмотря на это, некоторые результаты, к которым приводит теория циркуляции-

<sup>3)</sup> Ueber ebene Zirculationsströmung nebst „flugtechnischen Anwendungen (Sitzungsberichte der Münchener Akademie, 1911).

<sup>4)</sup> Stromfunktion für Strömung durch Turbinenschaufeln (Zeitschrift für Math. und Physik, 1912).

<sup>5)</sup> Теория решетчатого крыла (Московский Математический Сборник, XXIX, 1914), см. также 2-ой том собрания сочинений С. Чаплыгина.

<sup>6)</sup> Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges, 1917.

<sup>7)</sup> ZAMM, 1922.

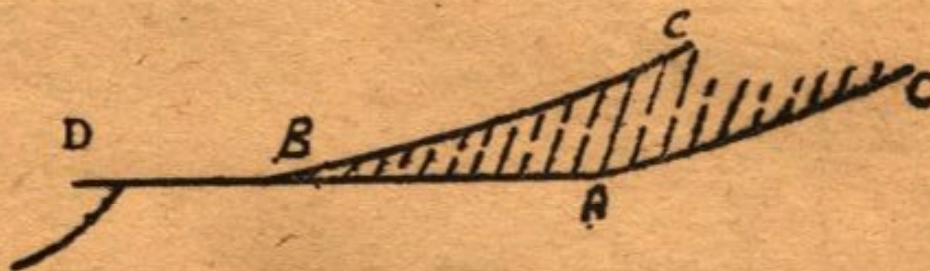
онного обтекания пластинки, в частности формула Н. Е. Жуковского для подъемной силы.

$$P = \rho \pi V_0^2 \sin \alpha$$

хорошо согласуется с опытом.

Но если не стараться устранить при математическом исследовании вопроса обращения скорости в бесконечность в передней кромке крыла, имеющего форму пластинки, то представляется возможность исследовать еще одну форму обтекания, которую можно назвать промежуточной между двумя первыми.

Схема этого обтекания принадлежит С. Чаплыгину и А. Лаврентьеву<sup>\*)</sup> и состоит в следующем: отрыв струй имеет место, во-первых, в задней кромке А, а во-вторых, в некоторой точке В на задней поверхности пластинки; что же касается передней кромки D, то она обтекается без отрыва струи и, следовательно, в ней образуется бесконечная скорость.



Черт. 2

Эта схема является особенно приемлемой в связи с тем, что реальное обтекание крыла вязкой жидкостью всегда сопровождается отрывом поверхностного слоя. Сравнение черт. 2 с фотографиями реальных потоков показывает, что схема С. Чаплыгина и А. Лаврентьева может рассматриваться, как безусловное приближение к действительности.

А priori следует ожидать, что положение точки В должно для данной пластинки вполне определяться углом атаки, подобно тому, как углом атаки в циркуляционном обтекании вполне определяется величина циркуляции.

Но если гипотеза Чаплыгина — Жуковского дает способ для определения циркуляции в случае обтекания без отрыва струй, то в новой схеме струйного обтекания подобной гипотезы авторы схемы не устанавливали.

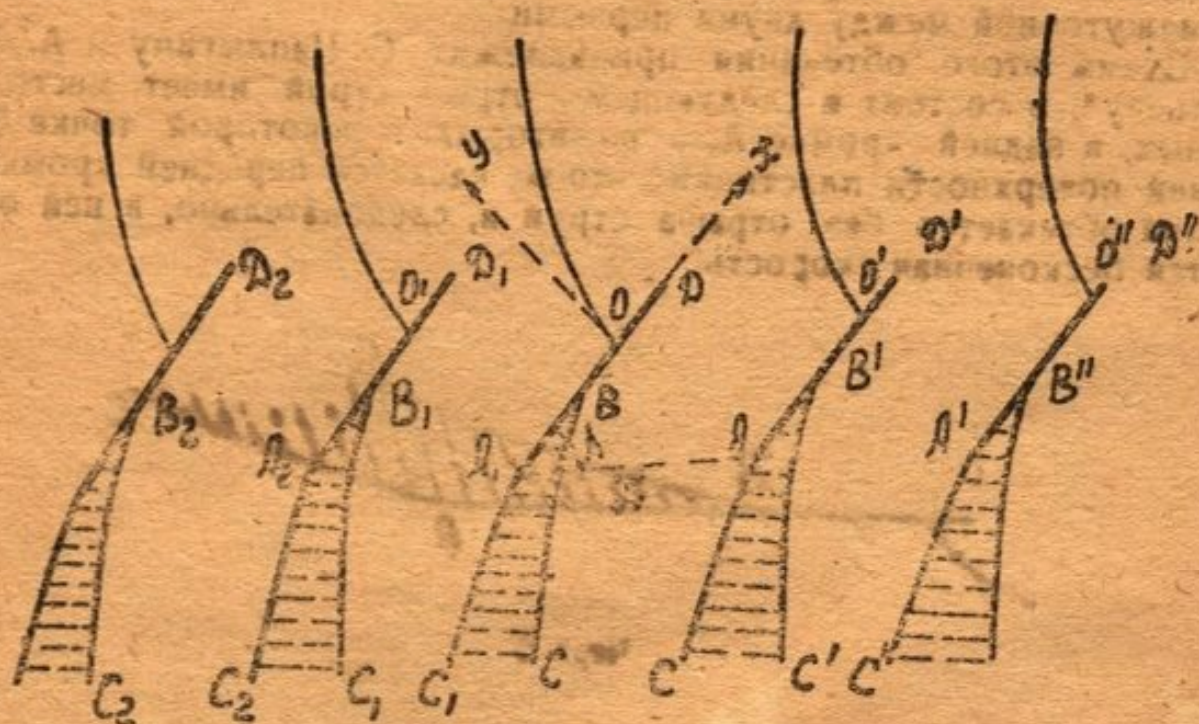
Ниже мы даем решение задачи об обтекании пластинки по схеме Чаплыгина — Лаврентьева и в качестве упомянутой гипотезы приви-

<sup>\*)</sup> С. Чаплыгин и А. Лаврентьев. О подъемной силе и сопротивлении длинного плоского крыла в предположении срыва с его верхней поверхности; Труды ЦАГИ, вып. 123, 1933.

См. также С. Schmieden, Über die Eindeutigkeit der Lösungen in der Theorie der unsteady Strömungen; Ingenieur-Archiv, 1932; стр. 356—371.

маем, что линии ограничивающие мертвую зону не имеют точек перегиба. При этом предположении получается, что для малых углов атаки формула для силы соответствует опытам даже лучше, чем формула Н. Е. Жуковского. Затем мы изучаем также и обтекание решетки с прямолинейным пером согласно новой схеме (черт. 3).

Для решения дальнейших задач о решетке желательно иметь по возможности все общие формулы<sup>9)</sup>, а в случае струйного обтекания



Черт. 3

желательно выяснить, как решить задачу о решетке, если известно соответствующее обтекание одного пера.

Эти вопросы мы также стараемся исследовать в настоящей работе.

Кроме того мы считаем не лишним дать последовательный вывод на базе общих формул некоторых уже известных соотношений.

Попутно мы выводим одну формулу, которая является некоторым обобщением классической формулы Schwarz — Christoffel'я и которая может быть полезна при построении циркуляционного потока, обтекающего решетку с пером в виде многоугольника.

<sup>9)</sup> Подобная общая формула для комплексного потенциала выведена в работе Ringleb'a, Ebene Potentialströmungen durch Gitter; ZAMM, 1931.

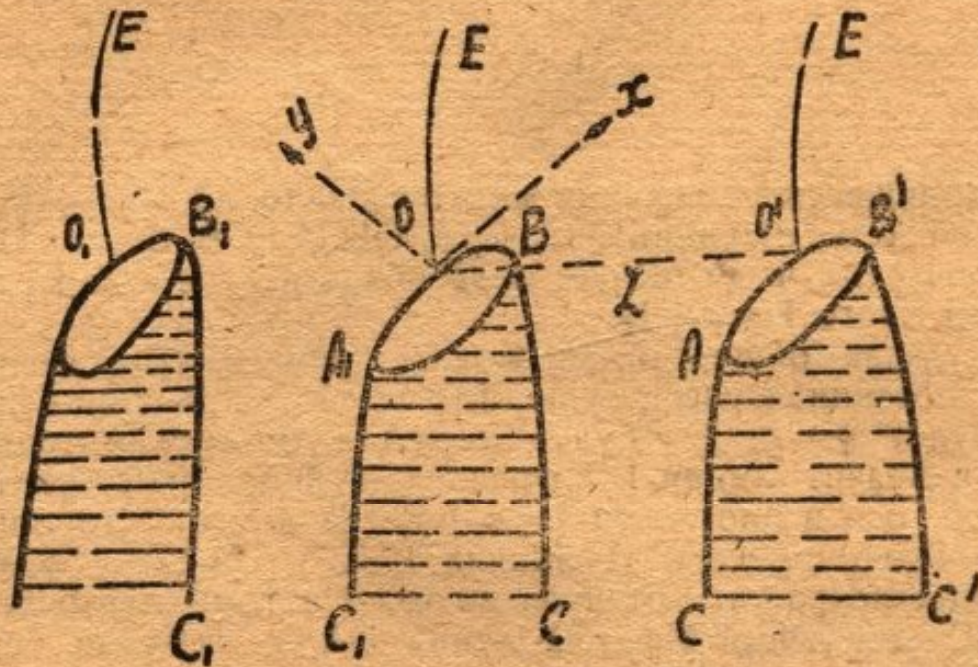
ГЛАВА I.

Обтекание решетки с отрывом струй.

§ 1. Общие формулы.

1. Обозначим через  $z = x + iy$  комплексную переменную в плоскости решетки (черт. 4).

Отрезок  $A_1A = OO' = BB' = \dots$  обозначим через  $L$  и назовем шагом решетки.



Черт. 4

Комплексный потенциал течения жидкости, которое мы предполагаем не вихревым, а саму жидкость идеальной и имеющей постоянную плотность  $\rho$ , обозначим через

$$f = \varphi + i\psi.$$

Комплексную скорость обозначим через

$$w = u - iv = \frac{df}{dz},$$

а абсолютную величину скорости обозначим через

$$V = |w| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Величины, относящиеся к бесконечности перед решеткой (бесконечность в потоке), будем отмечать индексом 0, а относящиеся к бесконечности за решеткой (бесконечность в струе) индексом 1.

Следуя Kirchhoff'у, положим

$$\zeta = V_1 \frac{dz}{df} = V_1 \frac{u + iv}{u^2 + v^2} = e^{\theta + i\varphi}$$

Таким образом  $\theta$  есть аргумент выражения  $u + iv$ , т. е. угол между направлением оси  $X$ -ов и направлением вектора скорости. Мы будем принимать, что

$$-2\pi < \theta \leq 0$$

Отметим еще, что

$$e^{\theta_0} = \frac{V_1}{V_0} > 1, \quad e^{\theta_1} = \frac{V_1}{V_1} = 1.$$

2. Находящаяся в движении жидкость заполняет некоторую односвязную область с границей...  $C_1 A_1 OBCA O' B' C' \dots$ . Посмотрим в первую очередь, что отвечает этой области в плоскости комплексного переменного  $f = \varphi + i\psi$ .

Не нарушая общности, мы можем принять, что в точке  $O$  комплексный потенциал равен нулю. Так как  $EO$  есть линия течения, то на  $EO$  будет  $\psi = 0$ , а  $\varphi$  будет меняться от  $-\infty$  в точке  $E$  до  $0$  в точке  $O$ . Значит линии  $EO$  отвечает отрицательная половина вещественной оси в плоскости  $f = \varphi + i\psi$ . С другой стороны  $\psi$  будет равняться нулю также и на линиях  $OBC$  и  $OA_1 C_1$ , а  $\varphi$  на каждой из них будет возрастать от нуля до  $\infty$ . Поэтому легко видеть, что линия  $OBC$  даст левый берег, а линия  $OA_1 C_1$  — правый берег положительной половины вещественной оси в плоскости  $f = \varphi + i\psi$ . Теперь рассмотрим линию течения  $EO'$ . На ней функция  $\psi$  также будет иметь некоторое постоянное, но уже отличное от нуля, значение; назовем это значение  $s \cdot \sin \delta$  причем  $s > 0$ . Пусть далее в точке  $O'$  функция  $\varphi$  имеет значение  $s \cdot \cos \delta$ . Тогда точке  $O'$  в плоскости  $f$  отвечает точка  $se^{i\delta}$ , а линии  $EO'$ , отвечает полупрямая  $\psi = s \cdot \sin \delta$  от точки  $\varphi = -\infty$  до точки  $\varphi = s \cdot \cos \delta$ ; берегам же оставшейся части прямой  $\psi = s \cdot \sin \delta$  соответствуют разветвления  $O'B'C'$  и  $O'AC'$  линии течения  $EO'$ .

Если мы сдвинем какуюнибудь точку линии  $\psi = 0$  на вектор  $se^{i\delta}$ , то мы получим некоторую точку прямой  $\psi = s \cdot \sin \delta$ , в которой в силу правильной структуры решетки и периодичности потока скорость будет иметь то же значение, что и во взятой вначале точке прямой  $\psi = 0$ .

При переходе к другим перьям решетки и встречающим их линиям течения мы будем получать в  $f$ -плоскости аналогичные прямые; каждая из них будет получаться из предыдущей сдвигом на вектор  $se^{i\delta}$ , и части этих прямых, расположенные справа от точек...  $O_1, O, O', \dots$  являются двухбереговыми разрезами. Эти разрезы и представляют границу той односвязной области в плоскости  $f = \varphi + i\psi$ , которая отвечает области, занятой потоком в плоскости  $z = x + iy$  (см. черт. 5).



Изобразим теперь полученную односвязную область на верхнюю половину плоскости вспомогательной комплексной переменной  $\sigma$ .

В силу периодичности мы можем принять, что точкам  $\dots O_1, O, O' \dots$  отвечают точки  $\dots -\pi, 0, \pi, \dots$ , а точкам  $\dots C_1, C, C', \dots$  точки  $\dots$

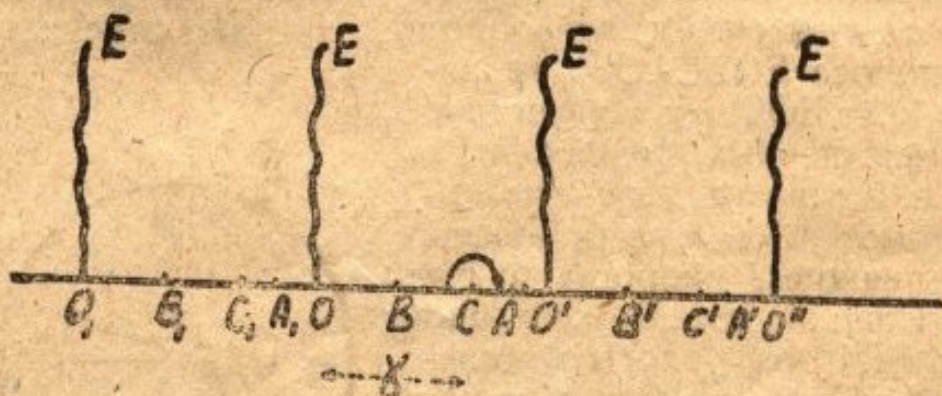


Черт. 5

$\gamma - \pi, \gamma, \gamma + \pi \dots$ , где  $\gamma$  ( $0 < \gamma < \pi$ ) пока неопределенный параметр (черт. 6).

Применяя формулу Schwarz - Christoffel'я, получим, что

$$Kf + L = \int_{\sigma} \frac{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sigma}{k\pi}\right) \left(1 + \frac{\sigma}{k\pi}\right)}{(\sigma - \gamma) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sigma - \gamma}{k\pi}\right) \left(1 + \frac{\sigma - \gamma}{k\pi}\right)} d\sigma$$



Черт. 6

Воспользовавшись известным разложением в бесконечное произведение функции  $\sin \sigma$ , можем написать, что

$$Kf + L = \int \frac{\sin \sigma}{\sin(\sigma - \gamma)} d\sigma,$$

откуда

$$Kf + L = \sigma \cos \gamma + \sin \gamma \cdot \ln \frac{\sin(\gamma - \sigma)}{\sin \gamma}$$

Эта формула без доказательства была дана в работе Чаплыгина и Минакова<sup>2)</sup>.

Так как при  $\sigma = 0$  должно быть  $f = 0$ , то мы можем принять, что  $L = 0$ . С другой стороны, после обхода по полуокружности вокруг точки  $C$  ( $\sigma = \gamma$ ) (см. черт. 6) функция  $\psi$  должна увеличиться на  $s \cdot \sin \delta$ . Поэтому

$$s \cdot \sin \delta \cdot K = -\pi \sin \gamma,$$

а так как в точке  $O'$

$$\sigma = \pi \text{ и } f = s \cdot e^{i\delta},$$

то

$$K s \cdot e^{i\delta} = \pi \cos \gamma - i \pi \sin \gamma,$$

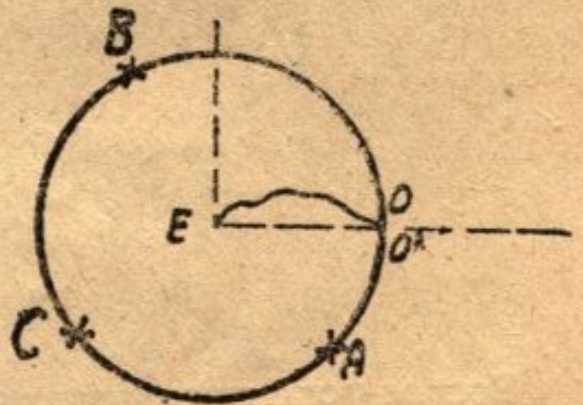
и эти равенства будут удовлетворены, если мы положим

$$\gamma = \pi - \delta, \quad K = -\frac{\pi}{s}; \quad (0 < \delta < \pi)$$

следовательно

$$f = \frac{s}{\pi} \left[ \sigma \cos \delta - \sin \delta \ln \frac{\sin(\sigma + \delta)}{\sin \delta} \right] \dots \dots \dots (a)$$

На основании периодичности потока достаточно изучить течение в области  $EOVCAO'E$  (см. черт. 4). Эту область назовем основной полосой течения. Основной полосе течения отвечает в плоскости  $\sigma$  полуполоса  $EOVCAO'E$ , границы которой  $EO$  и  $EO'$ , нам неизвестны. Но в соответственных точках этих границ, т. е. в точках, абсциссы которых отличаются на  $\pi$ , а ординаты которых одинаковы, скорость будет одинакова. Сошьем теперь мысленно линии  $EO$  и  $EO'$  полуполосы в плоскости  $\sigma$ ; тогда мы получим некоторую новую односвязную область с границей  $OVCAO'$ , которую изобразим на круг единичного радиуса в плоскости переменного  $T$ . Для этого достаточно положить (см. черт. 7).



Черт. 7

$$T = e^{2i\sigma} \dots \dots \dots (b)$$

Теперь положим

$$T = e^{-2i\delta} \cdot \frac{t^2 + 1 - 2Mt}{t^2 + 1 - 2\bar{M}t} \dots \dots \dots (c)$$

где  $t$  — новая переменная, а  $M$  — некоторый параметр.

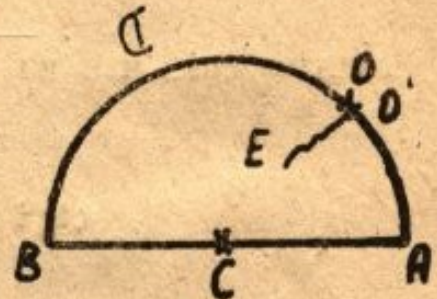
Эта формула преобразовывает круг  $T$  — плоскости в верхний полукруг единичного радиуса  $t$  — плоскости (см. черт. 8).

При этом преобразовании точка  $C$  перейдет в  $t=0$ , а точки  $A$  и  $B$  соответственно в точки  $t=1$  и  $t=-1$ .

Обозначим далее через  $t_0$  значение  $t$  в точке  $E$ , а через  $e^{i\epsilon}$  значение  $t$  в точке  $O$ .

Тогда в силу формулы (c) (из которой следует, что в точке  $E$   $T=0$ ) получим, что

$$M = \frac{1}{2} \left( t_0 + \frac{1}{t_0} \right) \dots \dots \dots (1)$$



Черт. 8

С другой стороны снова из формулы (c) получим, что

$$1 = e^{-2i\delta} \cdot \frac{\cos \epsilon - M}{\cos \epsilon - \bar{M}} \dots \dots \dots (2)$$

Собирая (a), (b) и (c), найдем после несложных преобразований, что

$$f = \frac{s}{2\pi i} \left[ e^{i\delta} \ln \left( t + \frac{1}{t} - 2M \right) - e^{-i\delta} \ln \left( t + \frac{1}{t} - 2\bar{M} \right) \right] + \text{const} \quad (3)$$

Формула (a) и соотношения (1) и (2) дают выражение комплексного потенциала через основную переменную  $t$  и основные параметры  $s$ ,  $t_0$ ,  $\epsilon$ .

Заметим, что соответственным линиям  $EO$  и  $EO'$  основной полосы течения на черт. 8 отвечают два берега неизвестной линии  $EO$ .

В дальнейшем часто придется пользоваться выражением производной от  $f$  по  $t$ . Дифференцируя (3), получим

$$\frac{df}{dt} = \frac{s}{2\pi i} \left\{ \frac{e^{i\delta}}{t + \frac{1}{t} - 2M} - \frac{e^{-i\delta}}{t + \frac{1}{t} - 2\bar{M}} \right\} \left( 1 - \frac{1}{t^2} \right)$$

Если теперь воспользоваться равенством (2), то это выражение примет вид

$$\frac{df}{dt} = \frac{s \cdot \sin \delta}{\pi} \frac{t + \frac{1}{t} - 2 \cos \varepsilon}{\left(t + \frac{1}{t} - 2M\right) \left(t + \frac{1}{t} - 2\bar{M}\right)} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right), \quad (4)$$

или на основании (1)

$$\frac{df}{dt} = \frac{s \cdot \sin \delta}{\pi} \frac{t^2 - 2t \cos \varepsilon + 1}{(t - t_0) \left(t - \frac{1}{t_0}\right) (t - \bar{t}_0) \left(t - \frac{1}{\bar{t}_0}\right)} \left(t - \frac{1}{t}\right) \quad (4 \text{ bis})$$

Заметим еще, что из (2) немедленно следует равенство

$$\operatorname{ctg} \delta = \frac{\frac{1}{2}(M + \bar{M}) - \cos \varepsilon}{\frac{M - \bar{M}}{2i}} \quad \dots \quad (2 \text{ bis})$$

которым нам часто придется пользоваться в дальнейшем.

3. Мы выбрали в качестве основной вспомогательной переменной величину  $t$ , область изменения которой есть верхний полукруг, представленный на черт. 8, потому, что этот выбор, как показали исследования Levi-Civita, является, особенно целесообразным в теории струйного обтекания одного изолированного тела.

Мы увидим далее, что определение переменной  $\zeta$  через  $t$  для случая решетки ничуть не сложнее, чем определение этой величины для одного пера. А так как всякая задача о струйном обтекании сводится к нахождению величин  $f$  и  $\zeta$  через некоторый параметр, то при сделанном выборе параметра вся разница будет состоять в том, что вместо известного выражения<sup>10)</sup> комплексного потенциала

$$f = a^2 \left[ \cos \varepsilon - \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right) \right]^2 \quad \dots \quad (5)$$

для изолированного тела нам придется брать комплексный потенциал (3) для случая решетки.

Приведем еще для сравнения с (4) производную от функции (5) по  $t$ :

$$\frac{df}{dt} = \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{1}{t} - 2 \cos \varepsilon \right) \left( 1 - \frac{1}{t^2} \right) \quad \dots \quad (6)$$

<sup>10)</sup> См. напр. H. Villat, *Apersus théoriques sur la résistance des fluides*; Paris, 1920 (P. 34).

4. Обратимся теперь к функции  $\zeta$ , рассматривая ее в зависимости от параметра  $t$ . Это есть, очевидно, однозначная и регулярная в неразрезанном вдоль ЕО полукруге плоскости  $t$  функция, которая обращается в бесконечность только в точке  $O$ , т. е. при  $t = e^{i\pi}$ . При этом в точке  $C$  ( $t=0$ )  $\zeta$  равняется  $\zeta_1 = e^{i\theta_1}$ , а на диаметре  $ACB$  эта функция имеет равные по модулю 1 значения, т. к. вдоль струй  $OA_1E_1$ ,  $OBC, \dots$  скорость постоянна по величине и равна  $V_1$ .

Так как

$$\zeta = V_1 \frac{dz}{df},$$

то, предполагая  $\zeta = \zeta(t)$  известной, мы сможем определить положение каждого элемента жидкости по формуле

$$dz = \frac{1}{V_1} \zeta(t) df.$$

Отсюда, пользуясь формулой (4 bis), получим, что

$$dz = \frac{s \cdot \sin \delta}{\pi V_1} \zeta(t) \frac{t^2 - 2t \cos \varepsilon + 1}{(t - t_0) \left(t - \frac{1}{t_0}\right) (t - \bar{t}_0) \left(t - \frac{1}{\bar{t}_0}\right)} \left(t - \frac{1}{t}\right) dt \quad (7)$$

Если бы мы решали задачу не об обтекании решетки, а одного контура, то, пользуясь формулой (6), мы получили бы, что

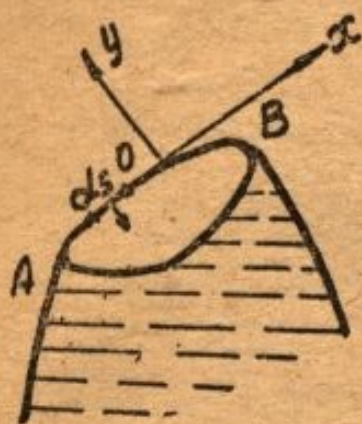
$$dz = \frac{a^2}{2V_0} \zeta(t) \frac{t^2 - 2t \cos \varepsilon + 1}{t^2} \left(t - \frac{1}{t}\right) dt, \dots \dots (8)$$

так как в случае одного контура  $V_1 = V_0$ .

Для определения функции  $\zeta = \zeta(t)$  часто пользуются методом годографа, исходя из того, что скорость имеет постоянную величину на струях и заданные направления на стенках; в простейших случаях задача сводится к нахождению некоторого конформного изображения, а, вообще говоря, мы имеем дело с решением проблемы Dirichlet. Но совершенно ясно, что  $\zeta = \zeta(t)$  будет иметь совершенно тот же вид для решетки с некоторым пером, как и для изолированного пера. Поэтому, если задача о струйном обтекании одного контура допускает решение, то с небольшими изменениями, а именно заменой формул (5), (6), (8) формулами (3), (4), (7), может быть получено решение задачи об обтекании решетки с той же формой пера.

5. Нам осталось еще решить вопрос о силах, с которыми текущая жидкость действует на перо решетки.

Предварительно напомним, как вычисляется сила, действующая на один изолированный контур при его струйном обтекании (см. черт. 9), причем будем предполагать, что скорость нигде на контуре не обращается в бесконечность, как это имеет место в схеме Kirchhoff'a. Если мы обозначим элемент контура через  $ds$ , то получатся следующие формулы



Черт. 9

$$R_x = \int_{(AOB)} (p - p_0) \cos(nx) ds,$$

$$R_y = \int_{(AOB)} (p - p_0) \cos(ny) ds,$$

т. к.  $p$  есть давление в некоторой точке омываемой части пера AOB, а  $p_0$  есть постоянное давление за пером в застойной области.

В силу теоремы Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{V_0^2}{2}$$

поэтому

$$R = R_x + iR_y = \frac{\rho}{2} \int_{(AOB)} (V_0^2 - V^2) [\cos(nx) + i \cos(ny)] ds,$$

а так как

$$\cos(nx) ds = dy, \quad \cos(ny) ds = -dx$$

то

$$R = \frac{\rho}{2i} \int_{(AOB)} (V_0^2 - V^2) dz$$

Припоминая, что

$$\zeta \bar{\zeta} = |\zeta|^2 = \frac{V_0^2}{V^2}, \quad dz = \frac{\zeta}{V_0} df$$

последнюю формулу перепишем в виде

$$R = \frac{\rho V_0}{2i} \int_{(AOB)} \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{df}{dt} dt$$

Воспользуемся теперь тем, что на диаметре ACB полукруга  $t$  — плоскости функция  $\zeta$  равна по модулю единице.

Отсюда следует, что функцию  $\zeta$  можно продолжить аналитически в нижний полукруг, полагая, что значения функции  $\zeta$  в сопряженных двух точках имеют одинаковые аргументы и обратные модули. Поэтому в написанной формуле для  $R$  можно считать, что  $\frac{1}{\zeta}$  есть значение функции  $\zeta$  в сопряженной точке нижней полуокружности. А так как  $df$  на дуге AOB вещественно, то формула для  $R$  может быть представлена в виде

$$R = \frac{\rho V_0}{2i} \int_{\bigcirc} \zeta \frac{df}{dt} dt \dots \dots \dots (9)$$

где интегрирование совершается по полной окружности единичного радиуса в положительном направлении.

Таким образом, припоминая (6), получаем, что

$$R = R_x + iR_y = \frac{\rho a^2 V_0}{4i} \int_{\bigcirc} \zeta(t) \left( t + \frac{1}{t} - 2 \cos \varepsilon \right) \left( t - \frac{1}{t} \right) \frac{dt}{t}$$

Точка  $t = e^{i\varepsilon}$ , где  $\zeta = \infty$ , есть для подинтегральной функции точка регулярная, т. к. в этой точке  $\frac{df}{dt} = 0$ .

С другой стороны на верхней полуокружности (в силу предположения о конечности скорости)  $\zeta$  не обращается в нуль; поэтому на нижней полуокружности  $\zeta$  не обращается в бесконечность. Итак единственной особенной точкой подинтегрального выражения в области  $|t| \leq 1$  есть точка  $t = 0$ , которая является полюсом третьего порядка. В окрестности точки  $t = 0$  будем иметь

$$\zeta(t) = \zeta(0) + t\zeta'(0) + \frac{t^2}{2}\zeta''(0) + \dots$$

Подставляя это выражение в формулу для  $R$  и применяя теорему Cauchy, получим, что

$$R = R_x + iR_y = \pi \rho a^2 V_0 \left\{ \zeta'(0) \cos \varepsilon - \frac{1}{4} \zeta''(0) \right\} \dots \dots \dots (10)$$

Таково данное впервые Levi-Civita выражение силы, которая действует на изолированный контур.

6. Если мы перейдем к решетке и сохраним предположение о конечности скорости, то повторяя дословно те же рассуждения, мы получим, что комплексная сила  $R$ , действующая на одно перо дается формулой (9), в которой  $V_0$  должно быть заменено на  $V_1$ , а  $\frac{df}{dt}$  должно быть взято в виде (4) или (4 bis). Таким образом мы получим, что

$$R = R_x + iR_y = \frac{\rho V_1 s \cdot \sin \delta}{2\pi i} \int_0 \frac{(t^2 - 2t \cos \varepsilon + 1) \zeta(t)}{(t - t_0)(t - \bar{t}_0) \left(t - \frac{1}{t_0}\right) \left(t - \frac{1}{\bar{t}_0}\right)} \left(t - \frac{1}{t}\right) dt$$

Здесь подинтегральное выражение имеет уже вместо одного тройного полюса  $t=0$  три простых полюса:  $t=0$ ,  $t=t_0$ ,  $t=\bar{t}_0$  внутри единичного круга. Поэтому, замечая, что

$$\zeta(0) = e^{i\theta_1}, \quad \zeta(t_0) = e^{\vartheta_0 + i\theta_0}, \quad \zeta(\bar{t}_0) = e^{-\vartheta_0 + i\theta_0},$$

так как в сопряженных точках значения функции  $\zeta(t)$  имеют обратные модули и равные аргументы, получаем, что

$$R = \rho V_1 s \cdot \sin \delta \left\{ -e^{i\theta_1} + e^{\vartheta_0 + i\theta_0} \cdot \frac{t_0^2 - 2t_0 \cos \varepsilon + 1}{(t_0 - \bar{t}_0) \left(t_0 - \frac{1}{t_0}\right)} + \right. \\ \left. + e^{-\vartheta_0 + i\theta_0} \cdot \frac{\bar{t}_0^2 - 2\bar{t}_0 \cos \varepsilon + 1}{(\bar{t}_0 - t_0) \left(\bar{t}_0 - \frac{1}{\bar{t}_0}\right)} \right\}$$

Заметим, теперь, что

$$\frac{t_0^2 - 2t_0 \cos \varepsilon + 1}{(t_0 - \bar{t}_0) \left(t_0 - \frac{1}{t_0}\right)} = \frac{M - \cos \varepsilon}{M - \bar{M}}$$

$$\frac{\bar{t}_0^2 - 2\bar{t}_0 \cos \varepsilon + 1}{(\bar{t}_0 - t_0) \left(\bar{t}_0 - \frac{1}{\bar{t}_0}\right)} = \frac{\bar{M} - \cos \varepsilon}{\bar{M} - M}$$

Но из (2) следует, что

$$\frac{M - \cos \varepsilon}{M - \bar{M}} = \frac{e^{i\delta}}{2i \sin \delta}$$



а значит

$$\frac{\bar{M} - \cos \varepsilon}{M - M} = - \frac{e^{-i\delta}}{2i \sin \delta}$$

Поэтому выражение для R принимает вид

$$R = \rho V_1 s \cdot \sin \delta \left\{ - e^{i\theta_1} + \frac{1}{2i \sin \delta} e^{\theta_0 + i(\theta_0 + \delta)} - \frac{1}{2i \sin \delta} e^{-\theta_0 + i(\theta_0 - \delta)} \right\}$$

откуда

$$\begin{aligned} R_x &= \rho s V_1 \left\{ \frac{1}{2} [e^{\theta_0} \sin(\theta_0 + \delta) - e^{-\theta_0} \sin(\theta_0 - \delta)] - \sin \delta \cdot \cos \theta_1 \right\} \\ R_y &= - \rho s V_1 \left\{ \frac{1}{2} [e^{\theta_0} \cos(\theta_0 + \delta) - e^{-\theta_0} \cos(\theta_0 - \delta)] + \sin \delta \cdot \sin \theta_1 \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

7. Рассмотрим теперь, как обстоит дело в том случае, когда скорость на контуре не остается конечной, и примем, что скорость обращается в бесконечность всего в одной (угловой) точке контура. Начнем со случая одного изолированного контура (черт. 10) и пусть D есть его угловая точка. Предположим, что в плоскости t точке D отвечает точка  $t = e^{i\Delta}$  (черт. 11).

В точке D ( $t = e^{i\Delta}$ ) плоскости t величина  $\zeta$  обращается в нуль, а в точке  $\bar{D}$  ( $t = e^{-i\Delta}$ )  $\zeta$  обращается в бесконечность.

В этом случае, интеграл, дающий силу R, теряет смысл. Но и все течение с бесконечной скоростью лишено непосредственного смысла. Подобное обстоятельство встречается также и в теории циркуляционного обтекания, как мы уже отмечали во введении, в случае, когда контур имеет более одной угловой точки.

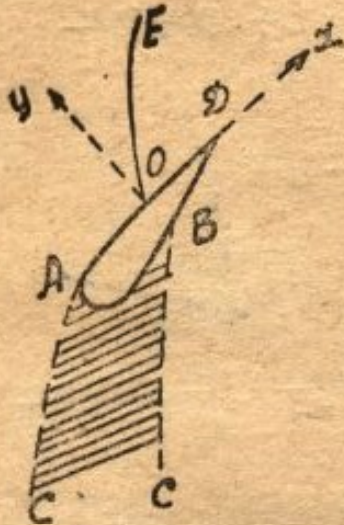
Оказывается, что в том случае, когда контур имеет две угловые точки, существует некоторый угол атаки, при котором циркуляционное обтекание возможно без образования бесконечных скоростей; например, для прямолинейного контура это будет при угле атаки, равном нулю. Обычно рассматриваются углы атаки, мало отличающиеся от указанного угла.

Следуя Н. Е. Жуковскому, принимают, что при таких углах атаки в одной из угловых точек контура скорость конечна, благодаря уступающемуся значению циркуляции (задняя угловая точка),

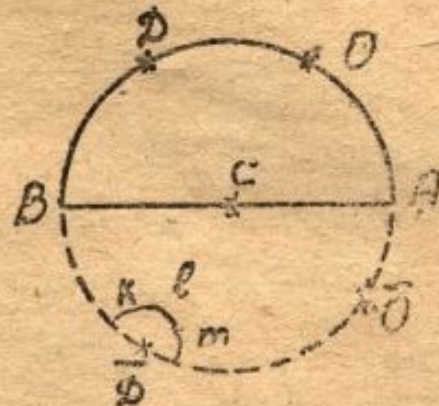
а вблизи второй угловой точки (передняя кромка крыла) „образуется как бы насадок из воздуха, который обтекается потоком; вследствие вязкости воздуха при этом образуются вихри, которые изменяют характер движения и вызывают лобовое сопротивление“<sup>11)</sup>.

Применяя эту теорию, мы должны принять, что около точки D образуется округление из неподвижной вначале жидкости. После этого мы приходим к двум возможностям:

1°, исследовать (учитывая вязкость) превращение присоединенной жидкой площадки в вихрь, отрыв этого вихря, его движение,



Черт. 10



Черт. 11

образование новых вихрей и связанные с этим нестационарным процессом колебания сил, действующих на контур;

2°, принять, что присоединенная жидкая площадка неподвижна и изучить силы, действующие при этом предположении на контур и на присоединенную площадку.

Первый путь, несмотря на всю его важность в связи с правильностью относящейся к нему схемы, приходится отбросить, т. к. он приводит к непреодолимым трудностям.

Поэтому обычно останавливаются на второй возможности, утешая себя тем, что таким путем мы получим значения сил, близкие к средним значениям, около которых колеблются истинные силы в действительном нестационарном процессе.

Дальнейшее предположение обычно состоит в том, что для вычисления сил все таки можно пользоваться теми формулами, которые мы получаем для контура первоначального, а не округленного присоединенной площадкой из неподвижной жидкости. Только интегрирование нужно производить не по первоначальному контуру, а по контуру округленному. В самом деле, можно принять, что размеры присоединенной площадки не велики, и поэтому изменение контура после присоединения этой площадки не повлечет за собой значительного изменения интегральных свойств, к числу которых относятся и силы.

<sup>11)</sup> Цитата взята из книги В. В. Голубева „Теория крыла аэроплана в плоско-параллельном потоке“. Труды ЦАГИ, вып. 29, 1927, стр. 136.

Но при этом нельзя упускать из виду того, что таким путем мы получим силу, действующую и на контур и на присоединенную площадку. А так как нас интересует сила, действующая только на контур, то при интегрировании придется выбросить весьма малую дугу  $k\bar{D}m$  с центром  $\bar{D}$  (в плоскости переменного  $t$ ) т. е. придется иметь дело с главным значением интеграла в смысле Cauchy. Вместо этого можно взять интеграл по контуру  $AODBkIm\bar{O}A$ , а затем прибавить интеграл по контуру  $mlk$ , т. е. прибавить  $\pi i$ , помноженное на интегральный вычет относительно точки  $e^{-i\Delta}$ .

Таким путем мы получим, что

$$R = R_x + iR_y = \pi \rho a^2 V_0 \left\{ \zeta'(0) \cos \varepsilon - \frac{1}{4} \zeta''(0) - \right. \\ \left. - i e^{i\Delta} \sin \Delta \cdot A \cdot (\cos \Delta - \cos \varepsilon) \right\} \dots \dots \dots (12)$$

где

$$A = \lim_{t \rightarrow e^{-i\Delta}} (t - e^{-i\Delta}) \zeta(t) \dots \dots \dots (13)$$

Мы здесь привели видоизменение формулы Levi-Civita (10), относящейся к струйной теории. Аналогичному видоизменению должна быть подвергнута и формула Чаплыгина—Blasius'a, относящаяся к циркуляционной теории. И если после указанного видоизменения подсчитать, например, силу, действующую на плоскую пластинку при циркуляционном обтекании, то окажется, что эта сила будет перпендикулярна к пластинке, а не к скорости на бесконечности, как того требует теорема Н. Е. Жуковского; по величине сила будет равна

$$\rho l V_0^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

где  $l$  хорда, т. е. глубина пластинки, а  $\alpha$  — угол атаки.

На то обстоятельство, что при наличии острых углов теорема Н. Е. Жуковского дает неправильный результат, указывалось многими авторами<sup>12)</sup>.

Применяя приведенные нами рассуждения, мы получим, что в случае решетки, перья которой имеют по одной точке, где ско-

<sup>12)</sup> См. Cisotti. Atti della reale Acad. dei Lincei, 1927. Vol V, p. 16—21, а также В. В. Голубев. Исследования по теории разрезного крыла, часть 1, труды ЦАГИ, вып. 147, 1933 стр. 35. Еще ранее на это обстоятельство указывал Kutta, см. Grammel, l. c., p. 21.

рость обращается в бесконечность, формула для силы, действующей на одно перо, будет иметь вид

$$R = R_x + iR_y = \rho s V_1 \left\{ -e^{i\theta_0} \sin \delta + \frac{1}{2} \left[ e^{\vartheta_0} \sin(\theta_0 + \delta) - e^{-\vartheta_0} \sin(\theta_0 - \delta) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[ e^{\vartheta_0} \cos(\theta_0 + \delta) - e^{-\vartheta_0} \cos(\theta_0 - \delta) \right] i - \right. \\ \left. - \frac{i \sin \delta \cdot \sin \Delta}{2 |\cos \Delta - M|^2} A e^{i\Delta} (\cos \Delta - \cos \varepsilon) \right\}, \dots \dots \dots (14)$$

где A определяется формулой (13).

8. Прежде, чем закончить этот §, скажем несколько слов о величине s, входящей в формулу для комплексного потенциала. Если мы обозначим через λ угол решетки, т. е. угол между осью решетки OO' и осью x-ов, то в точке O': z = Le^{-iλ}, где L — шаг решетки.

Легко видеть, что интеграл по замкнутому контуру вокруг точки t\_0 от выражения (7) должен дать как раз Le^{-iλ}, так как таким путем мы переходим от некоторой точки z к соответствующей точке соседней полосы z + Le^{-iλ}.

Применяя теорему Cauchy, мы получим поэтому, что

$$Le^{-iλ} = \frac{s \cdot \sin \delta}{\pi V_1} \zeta(t_0) \frac{t_0^2 - 2t_0 \cos \varepsilon + 1}{(t_0 - \bar{t}_0) \left( t_0 - \frac{1}{\bar{t}_0} \right)} 2\pi i$$

или

$$Le^{-iλ} = \frac{s \cdot \sin \delta}{\pi V_1} \cdot e^{\vartheta_0 + i\theta_0} \frac{M - \cos \varepsilon}{M - \bar{M}} \cdot 2\pi i.$$

Выше мы видели, что

$$\frac{M - \cos \varepsilon}{M - \bar{M}} = \frac{e^{i\delta}}{2i \sin \delta},$$

а с другой стороны

$$e^{\vartheta_0} = \frac{V_1}{V_0}.$$

Поэтому

$$Le^{-iλ} = \frac{s}{V_0} e^{i(\delta + \theta_0)}$$

и, следовательно,

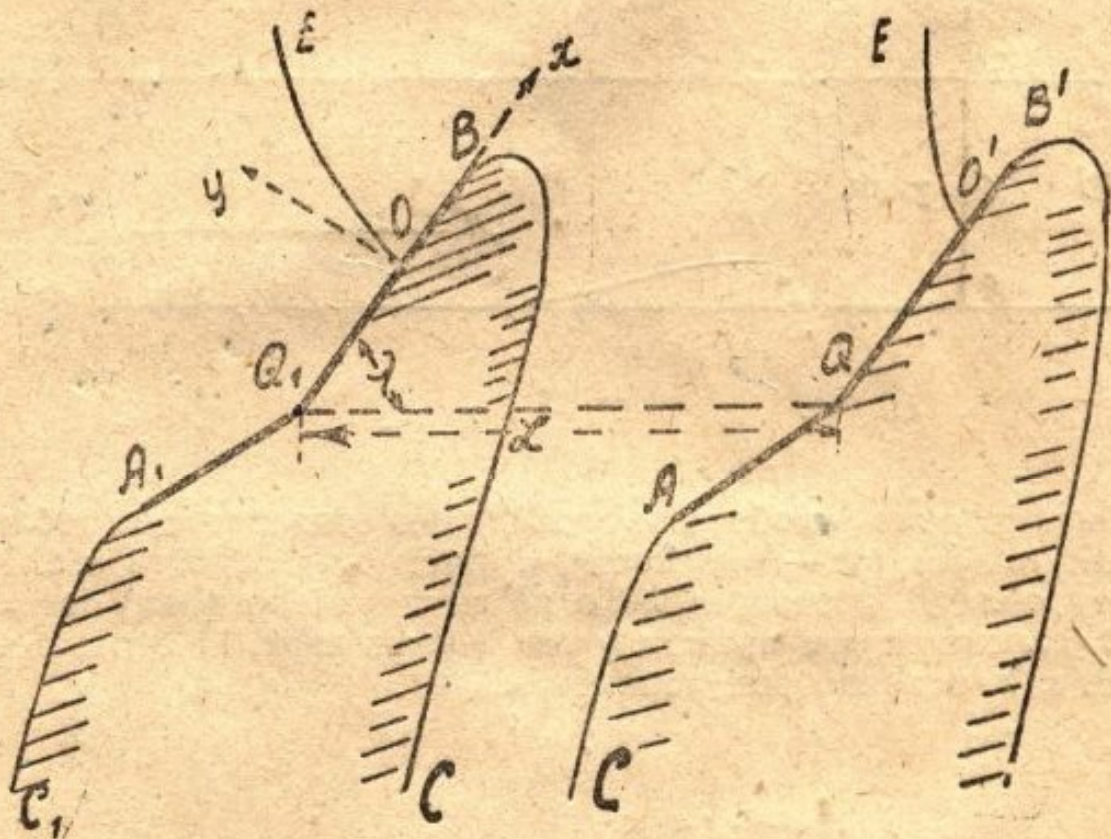
$$s = LV_0, \quad \delta = -(\lambda + \theta_0) \dots \dots \dots (15)$$

Эти формулы играют в дальнейшем существенную роль.

§ 2. Струйное обтекание по схеме Kirchhoff'a решетки, перо которой есть ломаная линия, из двух звеньев.

1. В качестве приложения общих формул, выведенных в предыдущем параграфе, рассмотрим обтекание решетки, перо которой есть ломаная линия из двух звеньев (см. черт. 12).

Мы предполагаем, что перо своей вогнутостью направлено навстречу потоку. Угол  $A_1Q_1B$  обозначим через  $\pi(1-q)$ , где таким образом  $0 < q < 1$ . Положим далее, что длины отрезков  $Q_1B$  и  $A_1Q_1$



Черт. 12

соответственно равны  $l_1$  и  $l_2$ . Точка  $O$  может находиться на отрезке  $Q_1B$  или на отрезке  $A_1Q_1$ ; при прочих равных условиях положение этой точки зависит от отношения  $\frac{l_1}{l_2}$ .

Мы принимаем, что точка  $O$  лежит на  $Q_1B$ ; проанализировавши решение задачи при этом предположении, мы получим тот интервал для отношения  $\frac{l_1}{l_2}$ , в котором это предположение осуществляется.

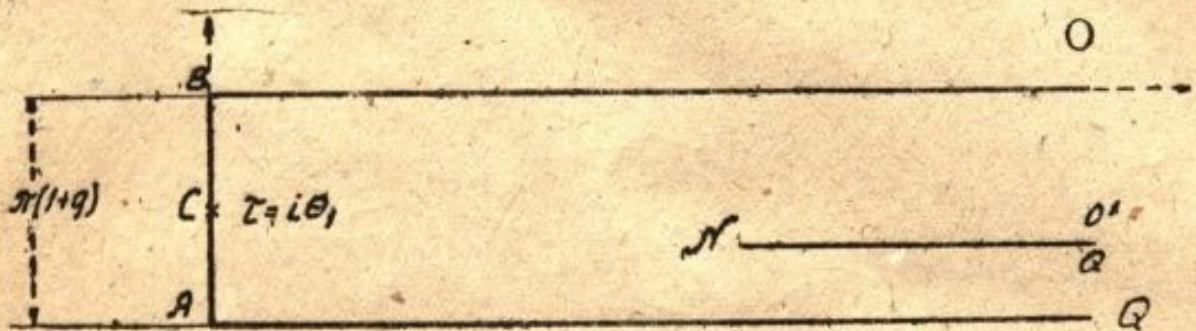
Если рассматриваемое отношение будет лежать вне упомянутого интервала, то точка  $O$  будет находиться на  $A_1Q_1$  и тогда решение сможет быть найдено аналогичным путем.

Так как угол  $A_1Q_1B$  направлен в сторону потока своей вогнутостью, то, как это следует из общих соображений, скорость в точке  $Q_1$  обращается в нуль.

2. Наша основная задача состоит в нахождении функции  $\zeta = \zeta(t)$ . С этой целью положим  $\zeta = e^\tau$ , так что  $\tau = \vartheta + i\theta$  и рассмотрим ту линию, которую опишет точка  $\tau$ , когда точка  $z$  обойдет линию  $OBCAQO'$  в плоскости решетки.

В точке  $O: \vartheta = +\infty$ , а на  $OB \theta = 0$ ; на  $BCA |\zeta| = 1$  и значит  $\vartheta = 0$  причем в точке  $C: \theta = \theta_1$ ; далее, на  $AQ \theta = -\pi(1+q)$ , причем в точке  $Q: \vartheta = +\infty$ ; наконец, на  $QO' \theta = -\pi$ .

Собирая сказанное, получаем в плоскости  $\tau$  область, представленную на чертеже 13.



Черт. 13

Нам необходимо изобразить найденную односвязную область на верхний полукруг  $t$  — плоскости, а затем от  $\tau$  перейти к  $\zeta$ . Изобразим эту область предварительно на верхнюю половину вспомогательной плоскости  $\sigma$  и примем указанное на черт. 14 соответствие точек, где  $\epsilon, k, n$  некоторые параметры.



Черт. 14

Применяя формулу Schwarz - Christoffel'я получаем, что

$$K\tau + L = \int \frac{(\sigma + n) d\sigma}{V^{\sigma} \left( \sigma + \operatorname{ctg}^2 \frac{\epsilon}{2} \right) \left( \sigma + \operatorname{ctg}^2 \frac{k}{2} \right)}$$

Отсюда, производя интегрирование, найдем, что

$$A\tau + B = \ln \frac{\sqrt{\sigma} - i \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2}}{\sqrt{\sigma} + i \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2}} + m \ln \frac{\sqrt{\sigma} - i \operatorname{ctg} \frac{k}{2}}{\sqrt{\sigma} + i \operatorname{ctg} \frac{k}{2}}$$

где  $A, B, m$  некоторые новые константы.

Так как при  $\sigma = 0$  должно быть  $\tau = 0$ , то эту формулу можно переписать в виде

$$A\tau = \ln \frac{i \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} - \sqrt{\sigma}}{i \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\sigma}} + m \ln \frac{i \operatorname{ctg} \frac{k}{2} - \sqrt{\sigma}}{i \operatorname{ctg} \frac{k}{2} + \sqrt{\sigma}}$$

Вспользуемся теперь тем, что при  $\sigma = \infty$   $\theta = -\pi(1+q)i$ , а при  $\sigma = 1$   $\tau = i\theta_1$ . Из этих условий следует что

$$A\theta_1 = \varepsilon + mk, \quad -A(1+q) = 1 + m.$$

С другой стороны, обходя вокруг точки  $Q$  в плоскости  $\sigma$  по представленной на черт. 14 полуокружности, мы получим, что

$$Aq\pi i = -m\pi i.$$

Сравнивая теперь между собою все три полученные соотношения, получаем что

$$A = -1, \quad m = q, \quad -\theta_1 = \varepsilon + qk$$

Таким образом

$$\zeta = e^\tau = \frac{i \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\sigma}}{i \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} - \sqrt{\sigma}} \left( \frac{i \operatorname{ctg} \frac{k}{2} + \sqrt{\sigma}}{i \operatorname{ctg} \frac{k}{2} - \sqrt{\sigma}} \right)^q,$$

где параметры  $k$  и  $\varepsilon$  связаны соотношением

$$-\theta_1 = \varepsilon + qk \dots \dots \dots (16)$$

Теперь нам остается от  $\sigma$  — полуплоскости перейти к  $t$  — полуокружности. Для этого полагаем (см. черт. 15)

$$\sigma = \left( \frac{1+t}{1-t} \right)^2$$

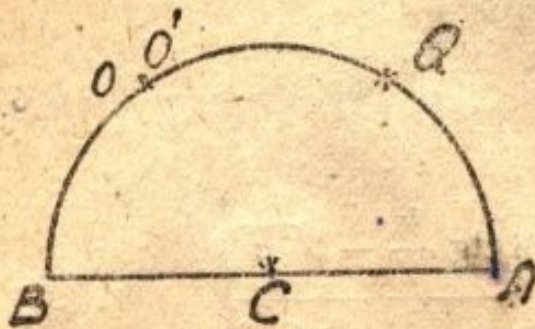
После несложного преобразования  $\zeta$  принимает вид

$$\zeta = \frac{1 - te^{i\varepsilon}}{e^{i\varepsilon} - t} \left( \frac{1 - te^{ik}}{e^{ik} - t} \right)^q, \dots \dots \dots (17)$$

откуда следует, что  $e^{i\varepsilon}$  и  $e^{ik}$  представляют как раз те значения  $t$ , которые отвечают точкам  $O$  и  $Q$ .

В соответствии с предположением, что точка  $O$  лежит на  $Q_1B$  имеет место неравенство

$$0 < k \leq \varepsilon < \pi.$$



Черт. 15

Написавши формулу (17) для точки  $E$ , получим уравнение для  $t_0$

$$e^{i\theta_0} + i\theta_0 = \frac{1 - t_0 e^{i\varepsilon}}{e^{i\varepsilon} - t_0} \left( \frac{1 - t_0 e^{ik}}{e^{ik} - t_0} \right)^q \dots \dots \dots (18)$$

Перейдем теперь к выводу формул для длин  $l_1, l_2$  отрезков  $Q_1B, A_1Q$ . С этой целью обратимся к формуле (7) и соотношениям (15). Из них следует, что

$$dz = - \frac{LV_0 \sin(\lambda + \theta_0)}{\pi V_1} \cdot \frac{1 - te^{i\varepsilon}}{e^{i\varepsilon} - t} \cdot \left( \frac{1 - te^{ik}}{e^{ik} - t} \right)^q \frac{(t^2 - 2t \cos \varepsilon + 1) \left( t - \frac{1}{t} \right)}{(t^2 + 1 - 2Mt)(t^2 + 1 - 2\bar{M}t)} dt \dots \dots \dots (19)$$

Полагая здесь  $t = e^{i\varphi}$ , будем иметь после простых вычислений следующие окончательные формулы

$$l_1 = - \frac{2LV_0 \sin(\lambda + \theta_0)}{\pi V_1} \int_k^\pi \left( \frac{\sin \frac{\varphi + k}{2}}{\sin \frac{\varphi - k}{2}} \right)^q \frac{\sin^2 \frac{\varphi + \varepsilon}{2} \sin \varphi d\varphi}{|\cos \varphi - M|^2} \dots \dots \dots (20)$$

$$l_2 = - \frac{2LV_0 \sin(\lambda + \theta_0)}{\pi V_1} \int_0^k \left( \frac{\sin \frac{\varphi + k}{2}}{\sin \frac{k - \varphi}{2}} \right)^q \frac{\sin^2 \frac{\varphi + \varepsilon}{2} \sin \varphi d\varphi}{|\cos \varphi - M|^2}$$



Из формулы (16) следует, что при  $k = \varepsilon$  каждая из этих величин равна

$$-\frac{\theta_1}{1+q}$$

Поэтому  $k$  может меняться в интервале

$$0 \leq k \leq -\frac{\theta_1}{1+q}$$

При  $k = 0$  отношение  $\frac{l_1}{l_2}$ , как следует из формул (20), равно  $\infty$ ; при  $k = -\frac{\theta_1}{1+q}$  это отношение принимает некоторое значение  $h$ .

Из соображений непрерывности легко поэтому усмотреть, что точка  $O$  находится на  $Q_1B$  при

$$\frac{l_1}{l_2} \geq h$$

Если же  $\frac{l_1}{l_2} \leq h$ , то точка  $O$  будет находиться на  $A_1Q$ .

На этом анализ задачи заканчивается.

Формулы (11) в соединении с соотношениями (15) дадут выражения сил, действующих на одно перо.

§ 3. Случай, когда пером является отрезок прямой линии.

Этот случай, как уже указано во введении, был изучен в работе С. Чаплыгина и А. Минакова (см. черт. 1).

Чтобы получить относящиеся к нему формулы, можно в формулах предыдущего параграфа положить  $l_2 = 0$ , т. е.  $k = 0$  или  $q = 0$ .

Тогда будем иметь

$$\zeta = \frac{e^{i\theta_1} - t}{1 - e^{i\theta_1}t} \dots \dots \dots (21)$$

а для нахождения  $t_0$  получается равенство

$$e^{\theta_0} + it_0 = \frac{e^{i\theta_1} - t_0}{1 - e^{i\theta_1}t_0},$$

откуда

$$|t_0| = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \theta_0 - \cos(\theta_0 - \theta_1)}{\operatorname{ch} \theta_0 - \cos(\theta_0 + \theta_1)}}, \quad \arg t_0 = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} \theta_0 \sin \theta_1}{\cos \theta_0 - \operatorname{ch} \theta_0 \cos \theta_1} \quad (22)$$

Расчет удобно вести, задаваясь величинами  $e^{\theta_0}$ ,  $\theta_0$ ,  $\theta_1$ . Формулы (2 bis) и (15) дают для определения угла  $\lambda$  следующее равенство

$$\operatorname{ctg}(\lambda + \theta_0) = \frac{\cos \theta_1 - \frac{M + \bar{M}}{2}}{\frac{M - \bar{M}}{2i}} \dots \dots \dots (23)$$

где

$$M = \frac{1}{2} \left( t_0 + \frac{1}{t_0} \right) \dots \dots \dots (24)$$

Для нахождения сил пользуемся формулами (11). А так как полная сила давления будет перпендикулярна к перу, то  $R_x = 0$ , откуда вытекает тождество

$$\frac{1}{2} \left\{ e^{\theta_0} \sin \lambda + e^{-\theta_0} \sin (2\theta_0 + \lambda) \right\} = \sin (\lambda + \theta_0) \cdot \cos \theta_1, \quad (23 \text{ bis})$$

справедливость которого можно было бы проверить и непосредственно, и которое можно было бы принять вместо (23) для определения угла  $\lambda$ .

Вторая из формул (11) дает для абсолютной величины давления выражение

$$|R_y| = \rho L V_0 V_1 \left\{ \frac{1}{2} \left[ e^{\theta_0} \cos \lambda - e^{-\theta_0} \cos (2\theta_0 + \lambda) \right] - \sin (\lambda + \theta_0) \sin \theta_1 \right\}, \dots \dots \dots (25)$$

которое можно представить также в виде

$$|R_y| = \rho L V_0 V_1 \left\{ \frac{1}{2} e^{\theta_0} \cos \lambda - \frac{1}{2} e^{-\theta_0} \cos \lambda + \frac{1}{2} e^{-\theta_0} [\cos \lambda - \cos (2\theta_0 + \lambda)] - \sin \theta_1 \cdot \sin (\lambda + \theta_0) \right\}$$

или

$$|R_y| = \rho L \cos \lambda \frac{V_1^2 - V_0^2}{2} + \rho L V_0 \sin (\lambda + \theta_0) [V_0 \sin \theta_0 - V_1 \sin \theta_1] \dots \dots \dots (25 \text{ bis})$$

Ниже мы покажем, что эту формулу можно получить непосредственно, пользуясь теоремой о количестве движения.

Нам осталось вывести выражение для длины пера 1.

Для этого удобнее всего взять формулу (19)

$$l = -\frac{LV_0 \sin(\lambda + \theta_0)}{\pi V_1} \int \frac{\left( e^{i\frac{\theta_1}{2}} - te^{-i\frac{\theta_1}{2}} \right)^2 \left( t - \frac{1}{t} \right) dt}{(t-t_0)(t-\bar{t}_0) \left( t - \frac{1}{t_0} \right) \left( t_0 - \frac{1}{t_0} \right)},$$

где интегрирование совершается по верхней полуокружности в положительном направлении.

Разложим подынтегральное выражение на простые дроби:

$$l = -\frac{LV_0 \sin(\lambda + \theta_0)}{\pi V_1} \left\{ A \int \frac{dt}{t-t_0} + B \int \frac{dt}{t-\bar{t}_0} + C \int \frac{t_0 dt}{tt_0-1} + \right. \\ \left. + D \int \frac{\bar{t}_0 dt}{t\bar{t}_0-1} + E \int \frac{dt}{t} \right\},$$

где

$$A = -\frac{ie^{\theta_0} e^{i(\theta_0 + \delta)}}{2 \sin \delta}, \quad C = -\frac{ie^{-\theta_0} e^{-i(\theta_0 - \delta)}}{2 \sin \delta},$$

$$B = \frac{ie^{-\theta_0} e^{i(\theta_0 - \delta)}}{2 \sin \delta}, \quad D = \frac{ie^{\theta_0} e^{-i(\theta_0 + \delta)}}{2 \sin \delta},$$

$$E = -e^{i\theta_1}.$$

Производя интегрирование и пользуясь тождеством (23 bis), мы получаем после несложных вычислений, что

$$\frac{l}{L} = \frac{e^{-\theta_0}}{\pi} \left\{ -\pi \sin \theta_1 \sin(\lambda + \theta_0) - 2 \cos \theta_1 \sin(\lambda + \theta_0) \ln \frac{R_1}{R_2} + \right. \\ \left. + \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) e^{\theta_0} \cos \lambda - \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) e^{-\theta_0} \cos(2\theta_0 + \lambda) \right\}. \quad (26)$$

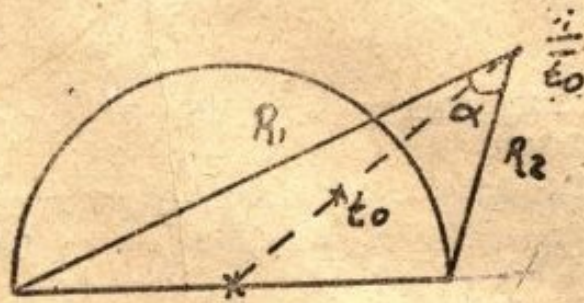
где величины  $R_1$  и  $R_2$  и измеряемый в радианах угол  $\alpha$  представлены на черт. 16.

После того, как  $t_0$  найдено, нахождение  $\alpha$  и  $\frac{R_1}{R_2}$  затруднений не представляет; особенно удобно эти величины определять из приведенного чертежа графически.

§ 4. Обтекание с отрывом струй одной пластинки о схеме С. Чаплыгина и А. Лаврентьева.

Мы переходим теперь к исследованию обтекания с отрывом струй по схеме С. Чаплыгина и А. Лаврентьева. А так как из § 1 следует, что функция  $\zeta(t)$  для решетки имеет тот же вид, как и для изолированного пера, то представляется полезным начать исследование с изолированной пластинки. Это составит предмет этого параграфа.

Анализ С. Чаплыгина и А. Лаврентьева мы пополним гипотезой, которая позволяет определить место отрыва струи от задней поверхности

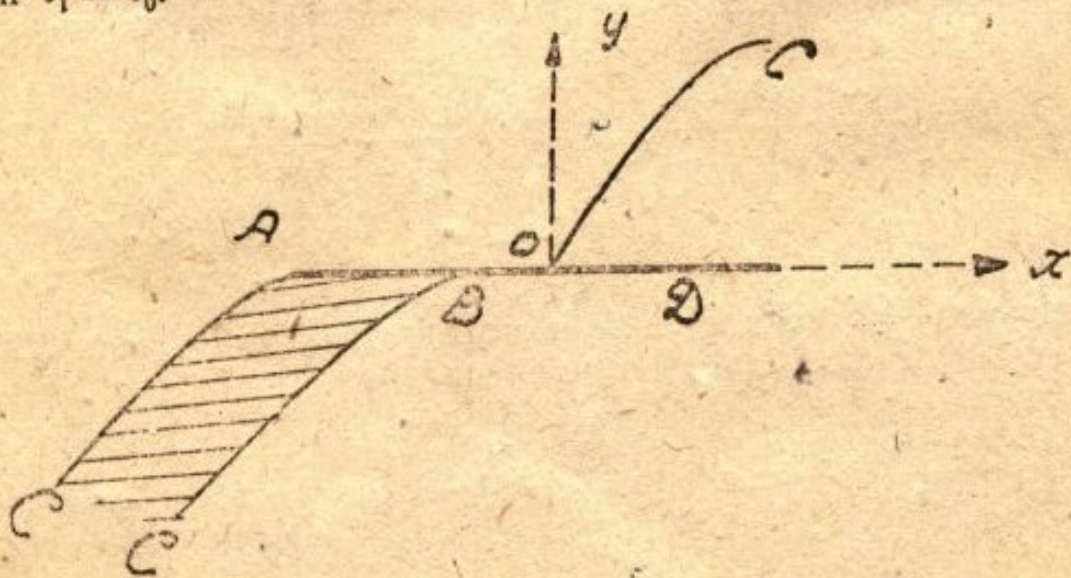


Черт. 16

ности пластинки. Мы приведем также сравнение силы, действующей на пластинку, которая при этой гипотезе получается, с той силой, которую дает циркуляционная теория.

Расположение пластинки относительно координатных осей дано на черт. 17.

Так как мы имеем дело с одной пластинкой, а не решеткой, то  $V_1 = V_0$  и  $\theta_1 = \theta_0$ .



Черт. 17

В точке  $O \zeta = \infty$ ; на  $OD \arg \zeta = \theta = 0$ ; на  $AO$  и  $BD \theta = -\pi$ ; наконец, на струях  $AC$  и  $BC \quad |\zeta| = 1$  и в точке  $D \zeta = 0$ .

Поэтому мы получаем в плоскости  $\zeta$  нижнюю полуплоскость, разрезанную вдоль некоторой дуги окружности  $|\zeta| = 1$  (см. черт. 18).

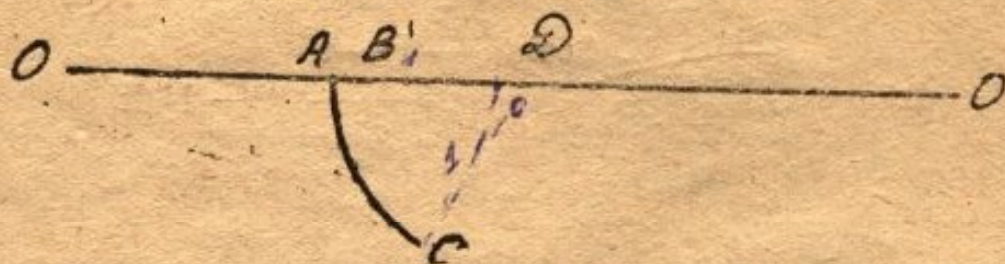
Остается неопределенным угол упомянутой дуги. Гипотеза, которую мы делаем, состоит в том, что на струях  $\arg \theta$  изменяется монотонно. Поэтому дуга окружности должна закончиться точкой  $C$ , в которой  $\zeta = e^{i\theta_1}$  ( $-\pi < \theta_1 < 0$ ).

Заметим, что в обозначениях С. Чаплыгина и А. Лаврентьева это соответствует равенству  $\beta = k + \sqrt{1+k^2}$ .  
Полученную область легко изобразить на полукруг  $t$  — плоскости. Нужное изображение дается формулой

$$\zeta = \frac{e^{i\theta_1} - t^2}{1 - e^{i\theta_1} t^2} \dots \dots \dots (27)$$

При этом в точке  $O$  будет  $t = e^{-\frac{1}{2} \theta_1}$ , и в точке  $D$   $t = e^{i(\pi + \frac{\theta_1}{2})}$  так что в обозначениях § 1  $\epsilon = -\frac{1}{2} \theta_1$ ,  $\Delta = \pi + \frac{\theta_1}{2}$ .

Припомнив формулы (12) и (13), с помощью которых определяются действующие на пластинку силы, вычислим величины  $A$ ,  $\zeta'(0)$ ,  $\zeta''(0)$ .



Черт. 18

Мы получаем, что

$$\zeta'(0) = 0, \quad \zeta''(0) = 2(e^{2i\theta_1} - 1).$$

и

$$\begin{aligned} A &= \lim_{t \rightarrow e^{-i\Delta}} (t - e^{-i\Delta}) \zeta(t) = \lim_{t \rightarrow -e^{-\frac{i\theta_1}{2}}} \left( t + e^{-\frac{i\theta_1}{2}} \right) \frac{e^{i\theta_1} - t^2}{1 - e^{i\theta_1} t^2} = \\ &= \frac{2i \sin \theta_1}{2e^{\frac{i\theta_1}{2}}} = i e^{-\frac{i\theta_1}{2}} \sin \theta_1 \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} R &= R_x + iR_y = \pi \rho a^2 V_1 \left\{ \frac{1}{2} (1 - e^{2i\theta_1}) - \sin^2 \theta_1 \right\} = \\ &= -\pi \rho a^2 V_1 i \sin \theta_1 \cos \theta_1, \end{aligned}$$

Откуда

$$R_x = 0, \quad |R_y| = \pi \rho a^2 V_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1,$$

а так как угол атаки равен

$$\pi + \theta_1 = \alpha$$

и

$$V_1 = V_0$$

то

$$|R_y| = \pi \rho k |V_0|^2 \sin \alpha \cos \alpha, \dots \dots \dots (28)$$

где

$$k = \frac{a^2}{|V_0|} \dots \dots \dots (29)$$

Наша ближайшая задача состоит в нахождении величины  $k$  через заданные элементы. Для этого обратимся к формуле (8).

Мы получаем, что

$$dz = \frac{a^2}{2V_0} \frac{e^{i\alpha} + t^2}{1 + e^{i\alpha} t^2} \frac{2t \sin \frac{\alpha}{2} - 1 - t^2}{t^3} (t^2 - 1) dt$$

или после сокращения

$$dz = - \frac{a^2 (e^{i\alpha} + t^2) (1 - ie^{-\frac{i\alpha}{2}} t) (t^2 - 1)}{2V_0 t^3 (1 - ie^{\frac{i\alpha}{2}} t)} dt$$

Интегрируя это выражение, найдем, что

$$z = \frac{a^2}{V_0} \left\{ \sin \frac{\alpha}{2} \left( te^{-i\alpha} + \frac{e^{i\alpha}}{t} \right) - \frac{1}{4} \left( t^2 e^{-i\alpha} + \frac{e^{i\alpha}}{t^2} \right) - \right. \\ \left. - 2 \sin^2 \alpha \ln \left( 1 - i te^{\frac{i\alpha}{2}} \right) - i \sin \alpha \cdot e^{i\alpha} \ln t \right\} + \text{const.}$$

Отсюда

$$l = z_D - z_A = \frac{a^2}{2V_0} \left\{ 1 + \cos \alpha + 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \alpha + \right. \\ \left. + (\pi + \alpha) \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 4 \sin^2 \alpha \ln \left| 2 \cos \frac{\pi + \alpha}{4} \right| \right\} \dots \dots \dots (30)$$

и

$$m = z_B - z_A = \frac{a^2}{2V_0} \left\{ \pi \sin 2\alpha - 8 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \alpha + 4 \sin^2 \alpha \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\pi + \alpha}{4} \right| \right\} (31)$$

Таким образом

$$k = \frac{2}{1 + \cos \alpha + 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \alpha + (\pi + \alpha) \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 4 \sin^2 \alpha \ln \left| 2 \cos \frac{\pi + \alpha}{4} \right|} \quad (32)$$

Для малых углов атаки  $\alpha$  имеют место следующие приближенные формулы

$$k \approx \frac{1}{1 + \frac{\pi - 2}{4} \sin 2\alpha}, \dots \dots \dots (32 \text{ bis})$$

$$\frac{m}{l} \approx \frac{\frac{1}{2} (\pi - 2) \sin 2\alpha}{1 + \frac{\pi - 2}{4} \sin 2\alpha} \dots \dots \dots (31 \text{ bis})$$

Приведем некоторые значения коэффициента  $k$ , который по циркуляционной теории равен 1.

$\alpha$	$5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$	$25^\circ$	$30^\circ$
$k$	0,95217	0,90456	0,86670	0,82921	0,79400	0,76116

§ 5. Обтекание с отрывом струй решетки с прямолинейным пером по схеме С. Чаплыгина и А. Лаврентьева.

В этом параграфе мы изучим обтекание решетки, схема которого представлена на черт. 3.

Как и в предыдущем параграфе, будем иметь формулу

$$\zeta = \frac{e^{i\theta_1} - t^2}{1 - e^{i\theta_1} t^2} \dots \dots \dots (33)$$

и равенства

$$\epsilon = -\frac{1}{2} \theta_1, \quad \Delta = \pi + \frac{\theta_1}{2}.$$

Поэтому, также как и в предыдущем параграфе,

$$A = l e^{-\frac{i\theta_1}{2}} \sin \theta_1.$$

Припоминая формулы (14) и (15) получаем, что

$$R = R_x + iR_y = \rho L V_0 V_1 \left\{ e^{i\theta_1} \sin(\lambda + \theta_0) - \frac{1}{2} \left[ e^{\theta_0} \sin \lambda + e^{-\theta_0} \sin(2\theta_0 + \lambda) \right] - \frac{1}{2} \left[ e^{\theta_0} \cos \lambda - e^{-\theta_0} \cos(2\theta_0 + \lambda) \right] + \frac{\sin^2 \theta_1 \cdot \sin(\lambda + \theta_0)}{2 \left| \cos \frac{\theta_1}{2} + M \right|^2} \right\}$$

А так как полная сила давления должна быть перпендикулярна к пелу, то  $R_x$  должно равняться нулю. Отсюда следует, что должно иметь место тождество

$$\cos \theta_1 \cdot \sin(\lambda + \theta_0) - \frac{1}{2} [e^{\theta_0} \sin \lambda + e^{-\theta_0} \sin(2\theta_0 + \lambda)] + \frac{\sin^2 \theta_1 \cdot \sin(\lambda + \theta_0)}{2 \left| \cos \frac{\theta_1}{2} + M \right|^2} = 0. \dots \dots (34)$$

Для  $|R_y|$  получается выражение

$$|R_y| = \rho L V_0 V_1 \left\{ \frac{1}{2} [e^{\theta_0} \cos \lambda - e^{-\theta_0} \cos(2\theta_0 + \lambda)] - \sin \theta_1 \sin(\lambda + \theta_0) \right\} (35)$$

которое тождественно с выражением (25) и, стало быть, также может быть представлено в виде

$$|R_y| = \rho L \cos \lambda \frac{V_1^2 - V_0^2}{2} + \rho L V_0 \sin(\lambda + \theta_0) [V_0 \sin \theta_0 - V_1 \sin \theta_1] (35 \text{ bis})$$

Задаваясь величинами  $e^{\theta_0}$ ,  $\theta_0$ ,  $\theta_1$ , мы должны в первую очередь определить  $t_0$  по формуле

$$e^{\theta_0} + i\theta_0 = \frac{e^{i\theta_1} - t_0^2}{1 - e^{i\theta_1} t_0^2}, \dots \dots (36)$$

Откуда, аналогично (22), получается, что

$$|t_0| = \sqrt{\frac{\text{ch } \theta_0 - \cos(\theta_0 - \theta_1)}{\text{ch } \theta_0 - \cos(\theta_0 + \theta_1)}}, \dots \dots (36 \text{ bis})$$

$$\arg t_0 = \frac{1}{2} \arctg \frac{\text{sh } \theta_0 \sin \theta_1}{\cos \theta_0 - \text{ch } \theta_0 \cos \theta_1}$$



Затем мы определяем  $M = \frac{1}{2} \left( t_0 + \frac{1}{t_0} \right)$  и угол наклона  $\lambda$  по формуле

$$\operatorname{ctg}(\theta_0 + \lambda) = \frac{\cos \frac{\theta_1}{2} - \frac{1}{2} (M + \bar{M})}{\frac{1}{2i} (M - \bar{M})} \dots \dots \dots (37)$$

которая получается из (2 bis) в силу (15) и найденного значения  $\alpha$ .

После этого остается определить длину пера  $l$ . Для этого обращаемся к формуле (7), которая в рассматриваемом случае напишется в виде

$$dz = \frac{LV_0 \sin(\lambda + \theta_0)}{\pi V_1} \frac{e^{i\theta_1} - t^2}{1 - e^{i\theta_1} t^2} \frac{t^2 - 2t \cos \frac{\theta_1}{2} + 1}{(t - t_0)(t - \bar{t}_0) \left( t - \frac{1}{t_0} \right) \left( t_0 - \frac{1}{t} \right)} \left( t - \frac{1}{t} \right) dt$$

или

$$dz = \frac{LV_0 \sin(\lambda + \theta_0)}{\pi V_1} \left\{ \frac{a}{1 + e^{i \frac{\theta_1}{2}} t} + \frac{b}{t - t_0} + \frac{c}{t - \bar{t}_0} + \frac{d}{t t_0 - 1} + \frac{e}{t \bar{t}_0 - 1} + \frac{f}{t} \right\} dt,$$

где

$$a = \frac{e^{i \frac{\theta_1}{2}} \sin^2 \theta_1}{\left| M + \cos \frac{\theta_1}{2} \right|^2}$$

$$d = \frac{i t_0 e^{-\theta_0} e^{-i(\theta_0 - \delta)}}{2 \sin \delta}$$

$$b = -\frac{i}{2} \frac{e^{\theta_0} e^{i(\theta_0 + \delta)}}{\sin \delta}$$

$$e = \frac{i \bar{t}_0 e^{\theta_0} e^{-i(\theta_0 + \delta)}}{2 \sin \delta}$$

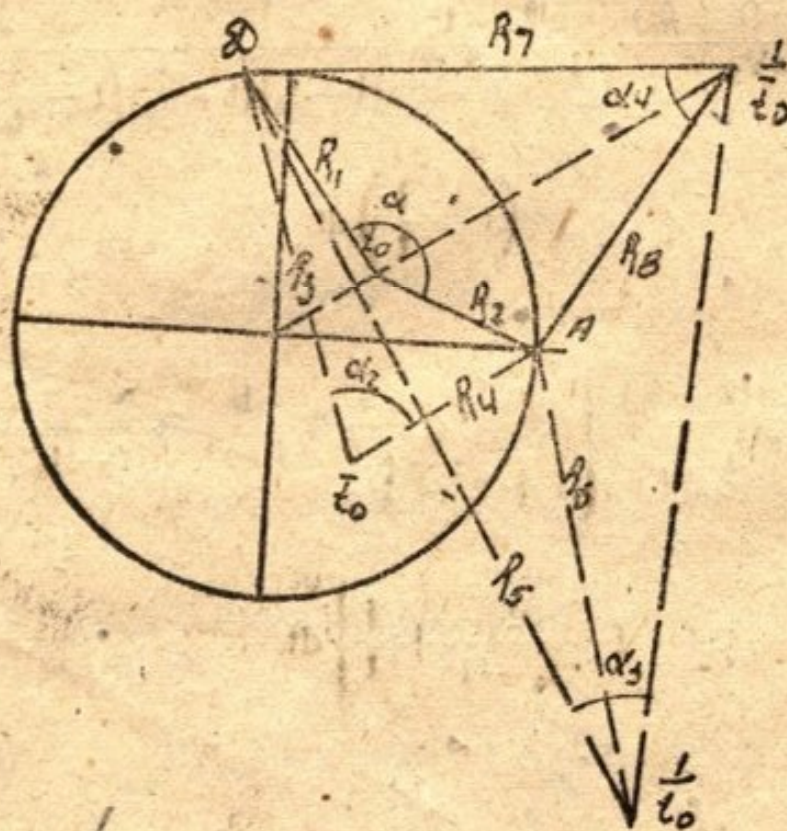
$$c = \frac{i}{2} \frac{e^{-\theta_0} e^{i(\theta_0 - \delta)}}{\sin \delta}$$

$$f = -e^{i\theta_1}$$

Отсюда, производя интегрирование и пользуясь тождеством (34), получим, что

$$\begin{aligned}
 I = \frac{LV_0}{\pi V_1} & \left\{ \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_4) e^{\theta_0} \cos \lambda - \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_3) e^{-\theta_0} \cos (2\theta_0 + \lambda) - \right. \\
 & - \frac{1}{2} e^{\theta_0} \sin \lambda \left( \ln \frac{R_1}{R_2} + \ln \frac{R_7}{R_8} \right) - \frac{1}{2} e^{-\theta_0} \sin (2\theta_0 + \lambda) \left( \ln \frac{R_3}{R_4} + \ln \frac{R_5}{R_6} \right) - \\
 & \left. - \left( \pi + \frac{\theta_1}{2} \right) \sin \theta_1 \cdot \sin (\lambda + \theta_0) + \frac{\sin^2 \theta_1 \cdot \sin (\lambda + \theta_0)}{\left| M + \cos \frac{\theta_1}{2} \right|^2} \ln \left| 2 \sin \frac{\theta_1}{4} \right| \right\}
 \end{aligned}$$

где величины  $R_k$  ( $k=1, 2, 3, \dots, 8$ ) и измеряемые в радианах углы  $\alpha_k$  ( $k=1, 2, \dots, 4$ ) представлены на черт. 19



Черт. 19

Из чертежа легко усмотреть, что

$$\alpha_4 = \alpha_1 - \left( \pi + \frac{\theta_1}{2} \right)$$

$$\alpha_3 = -\alpha_2 + \left( \pi + \frac{\theta_1}{2} \right)$$

а также, что

$$\frac{R_1}{R_7} = \frac{R_2}{R_8}, \quad \frac{R_3}{R_5} = \frac{R_4}{R_6}.$$

Если поэтому еще раз использовать соотношение (34), то получится окончательная формула

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} = & \frac{e^{-\theta_0}}{\pi} \left\{ \left[ \alpha_1 - \frac{1}{2} \left( \pi + \frac{\theta_1}{2} \right) \right] e^{\theta_0} \cos \lambda - \right. \\ & - \left[ \alpha_2 - \frac{1}{2} \left( \pi + \frac{\theta_1}{2} \right) \right] e^{-\theta_0} \cos (2\theta_0 + \lambda) - e^{\theta_0} \sin \lambda \ln \frac{R_1}{R_2 \cdot 2 \left| \sin \frac{\theta_1}{4} \right|} - \\ & - e^{-\theta_0} \sin (2\theta_0 + \lambda) \ln \frac{R_3}{R_4 \cdot 2 \left| \sin \frac{\theta_1}{4} \right|} - 2 \cos \theta_1 \cdot \sin (\lambda + \theta_0) \ln \left| 2 \sin \frac{\theta_1}{4} \right| - \\ & \left. - \left( \pi + \frac{\theta_1}{2} \right) \sin \theta_1 \cdot \sin (\lambda + \theta_0) \right\} \dots \dots \dots (38) \end{aligned}$$

Углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , а также отношения  $\frac{R_1}{R_2}$ ,  $\frac{R_3}{R_4}$  удобно определять из чертежа графически.

§ 6. Вывод формулы для силы давления на одно перо решетки с помощью теоремы о количестве движения.

В этом параграфе мы покажем, как получить силу, действующую на одно перо, с помощью теоремы о количестве движения. Мы рассмотрим тот случай, когда скорость ни в одной точке пера в бесконечность не обращается, как это, например, имеет место при обтекании решетки с прямолинейным пером по схеме Kirchhoff'a. Если же скорость обращается в бесконечность в одной точке пера, как это имеет место при обтекании решетки с прямолинейным пером по схеме С. Чаплыгина и А. Лаврентьева, то применяемый нами метод дает правильное выражение для проекции силы на ось  $y$ -ов, т. к. сила, действующая на насадок из неподвижной жидкости, оказывается направленной по оси  $x$ -ов (при выбранном расположении координатных осей), а применяемый здесь метод, вообще говоря, дает силу действующую, как на перо, так и на упомянутый насадок.

Нужно иметь ввиду, что общие формулы для сил мы уже вывели, так что дополнительный вывод этого параграфа своей целью имеет дать механическую интерпретацию отдельных членов, входящих в выражения (25 bis) и (35 bis).

На чертеже 20 представлена область в плоскости комплексного переменного  $z$ , ограниченная двумя соответственными линиями течения и содержащая перо решетки целиком внутри себя.

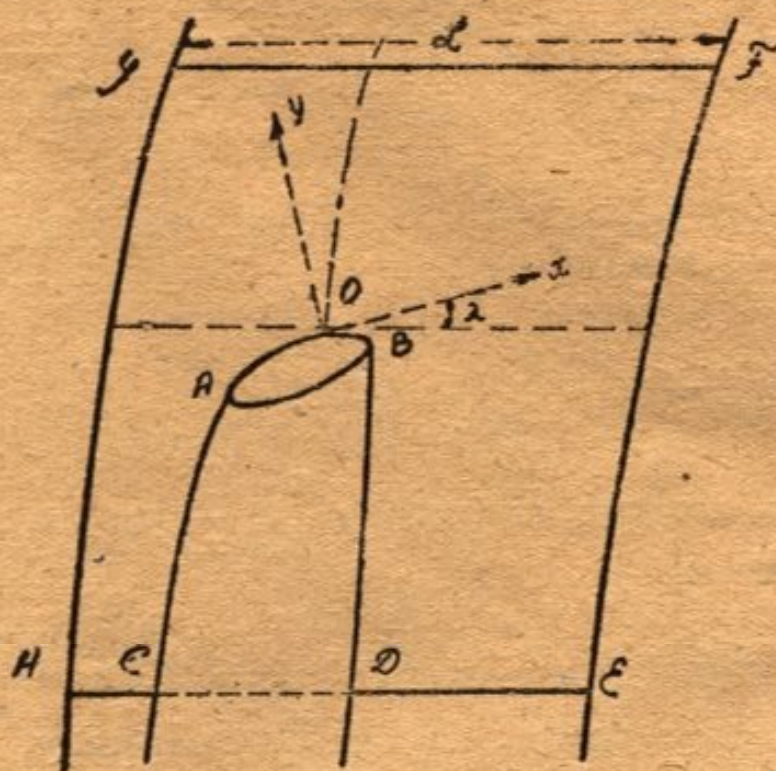
На большом расстоянии перед и за пером проведены отрезки GF и HE, равные по величине  $L$  и параллельные оси решетки.

Область OBDEFGHCAO занята движущейся жидкостью, и именно к этой области мы должны применять теорему о количестве движения. Заметим, что давления на линии FE и GH взаимно уничтожаются, а так как и поток через каждую из линий FE и GH равен

нулю, то линии FE и GH в нашем анализе остаются просто в стороне.

Обратимся к вычислению проекции силы на ось  $y$ -ов.

Со стороны пера на жидкость действует по оси  $y$ -ов сила  $-R_y$ , часть которой передается непосредственно движущейся жидкости через AOB, тогда как другая часть через AB и застойную область передается в виде давления на AC, BD, CD; силы на AC и BD



Черт. 20.

действуют на движущуюся жидкость, а сила на CD должна быть вычтена, т. к. она действует не на выделенную массу движущейся жидкости.

Таким образом мы имеем по оси  $y$ -ов в первую очередь силу

$$-R_y + p_1 \cdot \cos \lambda \cdot CD,$$

которая соответствует границе CAOBD.

Кроме того имеем силы по оси  $y$ -ов действующие на линии GF, HC и DE. Они равны соответственно

$$-L \cdot \cos \lambda \cdot p_0; \quad HC \cdot p_1 \cdot \cos \lambda; \quad DE \cdot p_1 \cdot \cos \lambda.$$

Сумма всех выписанных сил должна равняться изменению количества движения по оси  $y$ -ов, т. е. величине

$$Q (V_1 - V_0),$$

где  $Q$  — количество протекающей жидкости.

Но легко видеть, что

$$Q = -\rho L V_0 \sin(\lambda + \theta_0)$$

и с другой стороны

$$V \text{ (модуль)} \begin{cases} V_1 = + V_1 \sin \theta_1 \\ V_0 = + V_0 \sin \theta_0 \end{cases}$$

так как

$$V_1 \frac{u + iv}{V_2} = e^{\theta_1 + i\theta}$$

Поэтому мы получаем, что

$$\begin{aligned} -R_y + p_1 \cos \lambda (CD + HC + DE) - L \cos \lambda p_0 = \\ = -\rho L V_0 \sin(\lambda + \theta_0) (V_1 \sin \theta_1 - V_0 \sin \theta_0) \end{aligned}$$

или

$$-R_y = L \cos \lambda (p_0 - p_1) + \rho L V_0 \sin(\lambda + \theta_0) (V_0 \sin \theta_0 - V_1 \sin \theta_1).$$

В силу теоремы Bernoulli

$$p_0 - p_1 = \frac{\rho (V_1^2 - V_0^2)}{2},$$

так что окончательно

$$-R_y = \rho L \frac{V_1^2 - V_0^2}{2} \cos \lambda + \rho L V_0 \sin(\lambda + \theta_0) (V_0 \sin \theta_0 - V_1 \sin \theta_1). \quad (39)$$

и подобным образом (если, как мы приняли, на пере скорость в бесконечность не обращается).

$$-R_x = \rho L \frac{V_1^2 - V_0^2}{2} \sin \lambda + \rho L V_0 \sin(\lambda + \theta_0) (V_0 \cos \theta_0 - V_1 \cos \theta_1) \quad (39 \text{ bis})$$

Эти формулы тождественны с формулами (11), что и было нами показано относительно первой формулы в своем месте (см. формулу [25 bis]).

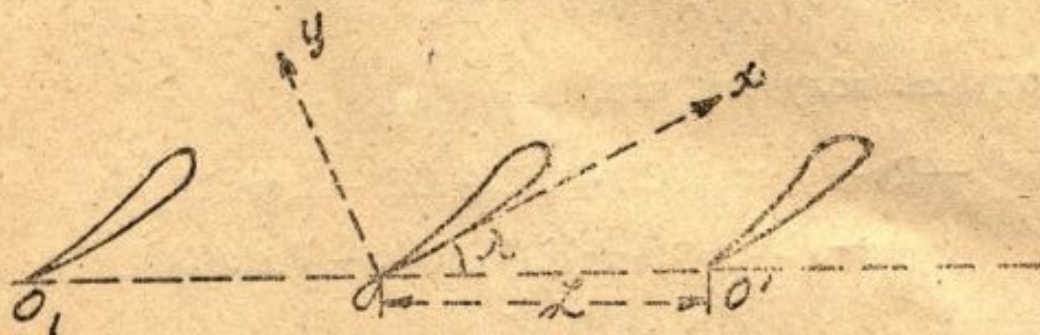
Пользуясь полученными формулами, легко получить, что можно было бы сделать и непосредственно, проекцию силы на ось решетки. Обозначая эту проекцию через  $R_z$ , получим, что

$$\begin{aligned} R_L = R_x \cos \lambda - R_y \sin \lambda = \rho L V_0 \sin(\lambda + \theta_0) [V_1 \cos(\theta_1 + \lambda) - \\ - V_0 \cos(\theta_0 + \lambda)] \dots \dots \dots (40) \end{aligned}$$

Если пером является отрезок прямой линии, то  $R_x = 0$  и

$$R_L = -R_y \sin \lambda = \rho L \sin \lambda \left\{ \frac{V_1^2 - V_0^2}{2} \cos \lambda + \right. \\ \left. + V_0 \sin (\lambda + \theta_0) (V_0 \sin \theta_0 - V_1 \sin \theta_1) \right\} \dots \dots \dots (41)$$

Формула (41) имеет то преимущество, что она годится как при схеме Kirchoff'a, так и при схеме Чаплыгина и Лаврентьева. Формулы (39) и (39 bis), как это легко видно, при отсутствии бесконечных скоростей на перо и фор-



Черт. 21

мула (39) для пера в виде отрезка прямой линии сохраняются также и для циркуляционного обтекания.

## ГЛАВА II.

### Обтекание решетки без отрыва струй (циркуляционное).

#### § 7. Определение комплексного потенциала.

1. При изучении обтекания решетки без отрыва струй основная задача состоит в определении комплексной скорости  $w = u - iv = \frac{df}{dz}$  т. е. того, что в нашей литературе часто называют характеристической функцией течения.

В простейших случаях характеристическую функцию течения можно построить непосредственно, исходя из величин, которые решетку определяют.

Вообще же говоря, нахождение характеристической функции связано с большими трудностями.

Примем представленную на чертеже систему координат и, как и ранее, обозначим через  $\lambda$  угол между осью решетки и осью  $x$ -ов, а через  $L$ —шаг решетки.

Вместе с  $z$  рассмотрим новую переменную  $t$ , связанную с  $z$  формулой

$$t = e^{\frac{2\pi i}{L} z} \dots \dots \dots (42)$$

Так как переход от одной точки  $z$  к другой точке  $z'$ , где величины течения характеризующие имеют те же значения, совершается по формуле

$$z' = z + Le^{-i\lambda},$$

то переменная  $t$  в точках  $z$  и  $z'$  будет иметь одно и тоже значение.

С помощью преобразования (42) однолистная бесконечно-связная область  $z$  — плоскости, лежащая вне перьев решетки, изобразится на некоторую бесконечно-листную Riemann'ову поверхность комплексного переменного  $t$ .

В каждом отдельном листе этой Riemann'овой поверхности мы получим некоторую линию, являющуюся изображением пера решетки, и область  $T$  вне этой линии явится изображением занятой потоком области в плоскости  $z$  внутри одной полосы периодичности.

Из формулы (42) следует, что

$$t = e^{-\frac{2\pi}{L}[x \cdot \sin \lambda + y \cdot \cos \lambda]} e^{\frac{2\pi i}{L}[x \cdot \cos \lambda - y \cdot \sin \lambda]};$$

поэтому

$$|t| = e^{-\frac{2\pi}{L}[x \cdot \sin \lambda + y \cdot \cos \lambda]}$$

что касается величины

$$x \cdot \sin \lambda + y \cdot \cos \lambda,$$

то она равна расстоянию от точки  $(x, y)$  до оси решетки со знаком плюс, если точка  $(x, y)$  лежит перед решеткой, и со знаком минус, если точка лежит за решеткой.

Поэтому  $t=0$  отвечает бесконечно-далекой точке полосы периодичности, лежащей перед пером, а  $t=\infty$  бесконечно-далекой точке, лежащей в полосе периодичности за пером.

Отметим еще, что точке  $z=0$  будет отвечать  $t=1$ .

Область  $T$  можно изобразить конформно на верхнюю половину плоскости вспомогательного переменного  $\omega$  и притом так, чтобы точка  $t=1$  перешла в точку  $\omega=\infty$ .

Предположим, что рассматриваемое изображение дается формулой

$$t = F(\omega), \dots \dots \dots (43)$$

и пусть точкам  $t=0$ ,  $t=\infty$  отвечают соответственно  $\omega=\omega_0$  и  $\omega=\omega_1$ . Тогда  $z$  представится, как некоторая аналитическая функция от  $\omega$

$$z = \frac{Le^{-i\lambda}}{2\pi i} \log F(\omega), \dots \dots \dots (44)$$

и задача сведется к определению через вспомогательную переменную  $\omega$  комплексного потенциала  $f = \varphi + i\psi$

Последняя задача особых трудностей не представляет, и мы приведем ее решение, следуя приведенной выше работе Ringleb'a. Главная трудность будет состоять в нахождении изображения (43).

2. В верхней полуплоскости комплексного переменного  $\omega$  величина  $t$ , а вместе с ней и

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Le^{-i\lambda}}{2\pi i} \frac{1}{t}$$

а также

$$\frac{dz}{d\omega}$$

являются однозначными функциями.

С другой стороны  $\frac{df}{dz}$  есть однозначная функция в плоскости решетки, поэтому  $\frac{df}{d\omega} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{d\omega}$  тоже есть однозначная функция в верхней полуплоскости комплексного переменного  $\omega$ .

Так как вещественная ось плоскости  $\omega$  является изображением пера, то на вещественной оси плоскости  $\omega$   $df$ , а также и  $\frac{df}{d\omega}$  имеет чисто вещественные значения; поэтому  $\frac{df}{d\omega}$  можно продолжить на нижнюю полуплоскость.

Для построения функции  $\frac{df}{d\omega}$  остается произвести учет ее особенностей точек. В верхней полуплоскости особенными точками  $\frac{df}{d\omega}$  являются  $\omega = \omega_0$  и  $\omega = \omega_1$ . В окрестностях этих точек в силу свойств функции, совершающей конформное изображение, имеют место разложения

$$t = a_0(\omega - \omega_0) + b_0(\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (a_0 \neq 0)$$

$$t = \frac{a_1}{\omega - \omega_1} + b_1 + c_1(\omega - \omega_1) + \dots \quad (a_1 \neq 0)$$

Поэтому в окрестностях точек  $\omega_0$  и  $\omega_1$

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{Le^{-i\lambda}}{2\pi i} \frac{1}{t} \frac{dt}{d\omega} = \frac{Le^{-i\lambda}}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{\omega - \omega_0} + \alpha_0 + \beta_0(\omega - \omega_0) + \dots \right\},$$

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{Le^{-i\lambda}}{2\pi i} \left\{ -\frac{1}{\omega - \omega_1} + \alpha_1 + \beta_1(\omega - \omega_1) + \dots \right\}.$$



Если принять во внимание, что  $\frac{df}{dz}$  в обеих бесконечно далеких точках полосы периодичности регулярна и имеет значения

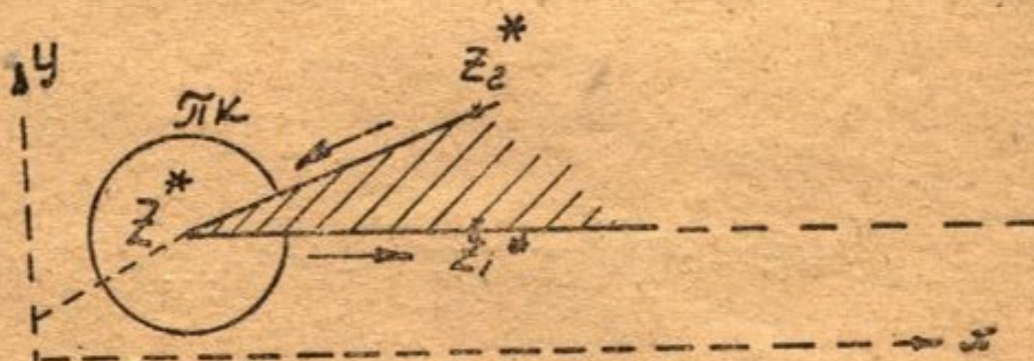
$$\left. \frac{df}{dz} \right|_{\omega = \omega_0} = V_0 e^{-i\theta_0}, \quad \left. \frac{df}{dz} \right|_{\omega = \omega_1} = V_1 e^{-i\theta_1}$$

то получится, что в окрестностях точек  $\omega_0$  и  $\omega_1$

$$\frac{df}{d\omega} = \frac{Le^{-i\lambda}}{2\pi i} \left\{ \frac{V_0 e^{-i\theta_0}}{\omega - \omega_0} + A_0 + B_0(\omega - \omega_0) + \dots \right\} \dots \quad (a)$$

$$\frac{df}{d\omega} = \frac{Le^{-i\lambda}}{2\pi i} \left\{ -\frac{V_1 e^{-i\theta_1}}{\omega - \omega_1} + A_1 + B_1(\omega - \omega_1) + \dots \right\} \dots \quad (b)$$

Докажем теперь, что на вещественной оси  $\frac{df}{d\omega}$  регулярна. Это очевидно относительно тех точек вещественной оси  $\omega$ —плоскости, которые являются изображением неугловых точек пера. Возьмем теперь точку  $\omega^*$  вещественной оси, которой отвечает угловая точка пера  $z^*$  (черт. 22).



Черт. 22

Пусть в точке  $z^*$  угол пера внутренний относительно области, занятой жидкостью, равен  $\pi k$ .

Тот же угол будет и в  $t$ —плоскости. Поэтому в окрестности точки  $\omega^*$  имеют место разложения

$$t - t^* = (\omega - \omega^*)^k [A_0 + A_1(\omega - \omega^*) + \dots] \quad (A_0 \neq 0),$$

$$z - z^* = (\omega - \omega^*)^k [B_0 + B_1(\omega - \omega^*) + \dots] \quad (B_0 \neq 0)$$

и

$$\frac{dz}{d\omega} = k(\omega - \omega^*)^{k-1} [B_0 + \dots]$$

Перейдем теперь к рассмотрению скорости на сторонах угла  $z^* z_1^*$  и  $z^* z_2^*$ , причем для простоты рассуждения мы приняли, что  $z^* z_1^*$  параллельно оси  $x$ -ов.

Будем помнить, что  $u + iv = \left(\frac{df}{dz}\right)$ .

На  $z^* z_1^*$

$$\arg(u + iv) = 0, \quad \arg \frac{df}{dz} = 0;$$

на  $z^* z_2^*$

$$\arg(u + iv) = -\pi(k - 1), \quad \arg \frac{df}{dz} = \pi(k - 1)$$

Пусть

$$\frac{df}{dz} = (z - z^*)^m [K_0 + K_1(z - z^*) + \dots] \quad (K_0 \neq 0).$$

Так как на  $z^* z_1^*$   $\arg(z - z^*) = 0$  и на  $z^* z_2^*$   $\arg(z - z^*) = -\pi k$ , то

$$\pi(k - 1) = -\pi mk$$

и значит

$$m = \frac{1 - k}{k}$$

Итак

$$\frac{df}{dz} = (z - z^*)^{\frac{1-k}{k}} [K_0 + K_1(z - z^*) + \dots]$$

Из написанных ранее формул следует поэтому, что

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\omega} &= \frac{df}{dz} \frac{dz}{d\omega} = [(z - z^*)^{\frac{1-k}{k}} (K_0 + \dots)] [k(\omega - \omega^*)^{k-1} (B_0 + \dots)] = \\ &= [(\omega - \omega^*)^{1-k} (L_0 + \dots)] [k(\omega - \omega^*)^{k-1} (B_0 + \dots)] = k [L_0 B_0 + \dots], \end{aligned}$$

и теорема доказана. Аналогично исследуется точка  $\omega = \infty$ , причем из регулярности  $\frac{df}{d\omega}$  в точке  $\omega = \infty$ , что в этой точке сама функция  $f$  имеет конечное значение, получим что

$$\left. \frac{df}{d\omega} \right|_{\omega = \infty} = 0.$$

Если мы поэтому примем во внимание формулы (а) и (в) и про-

должаемость функции  $\frac{df}{d\omega}$  в нижнюю полуплоскость, то для  $\frac{df}{d\omega}$  получится выражение

$$\frac{df}{d\omega} = \frac{L}{2\pi i} \left\{ V_0 \left[ \frac{e^{-i(\lambda + \theta_0)}}{\omega - \omega_0} - \frac{e^{i(\lambda + \theta_0)}}{\omega - \overline{\omega_0}} \right] - V_1 \left[ \frac{e^{-i(\lambda + \theta_1)}}{\omega - \omega_1} - \frac{e^{i(\lambda + \theta_1)}}{\omega - \overline{\omega_1}} \right] \right\} \dots \dots \dots (45)$$

В самом деле разность между левой и правой частью в силу (а) и (в) во всей плоскости регулярна и равна нулю на бесконечности, т. е. всюду.

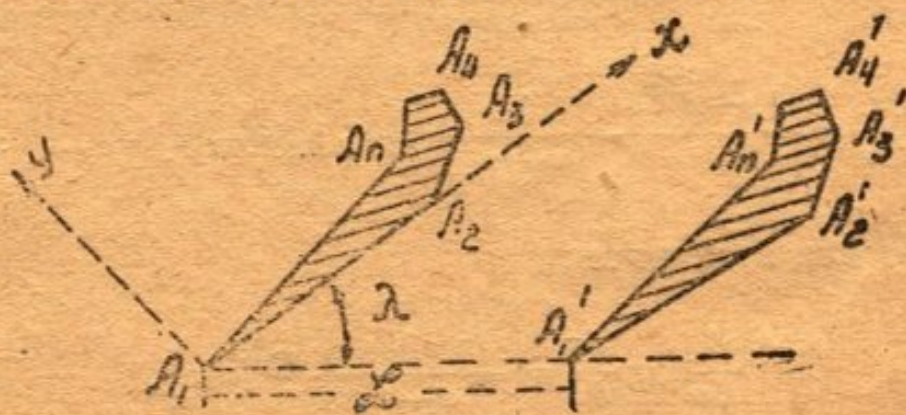
Если принять во внимание постоянство расхода (несжимаемость), то между входящими в (45) величинами получится соотношение

$$V_0 \sin(\lambda + \theta_0) = V_1 \sin(\lambda + \theta_1) \dots \dots \dots (46)$$

§ 8. Одно обобщение формулы Schwarz-Christoffel'я.

В предыдущем параграфе было найдено общее выражение комплексного потенциала через вспомогательную переменную  $\omega$ . Поэтому остается выразить через  $\omega$  комплексную переменную  $z$ , т. е. найти ту функцию  $F(\omega)$ , которая входит в формулу (44). Эта задача представляет большие трудности и может быть решена только в частных случаях.

В настоящем параграфе мы покажем, что интересующая нас задача допускает решение, когда перо имеет форму многоугольника. С этой целью мы выведем формулу, являющуюся некоторым обобщением известной формулы Schwarz-Christoffel'я.



Черт. 23

Пусть углы при вершинах многоугольника  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , внутренние относительно занятой потоком области, соответственно равны  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .

Пусть далее при преобразовании

$$t = e^{2\pi i} Le^{-i\lambda} z$$

точки  $A_1, A_2, \dots, A_n$  переходят соответственно в  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Мы получим в плоскости  $t$  многоугольник с вершинами в точках  $t_1, t_2, \dots, t_n$  и с теми же углами  $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \dots, \pi\alpha_n$ , но уже с криволинейными сторонами.

При изображении  $t = F(\omega)$  пусть точки  $t_1, t_2, \dots, t_n$  перейдут в точки  $\omega = c_1, c_2, \dots, c_n$  вещественной оси.

Легко видеть, что в окрестности точки  $c_k$  будет иметь место разложение

$$t = t_k + (\omega - c_k)^{\alpha_k} [K_0 + K_1(\omega - c_k) + \dots],$$

где  $K_0 \neq 0$ .

Поэтому в силу формулы (44) в окрестности той же точки  $c_k$  будет

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{Le^{-i\lambda}}{2\pi i} \frac{1}{t} \frac{dt}{d\omega} = \frac{Le^{-i\lambda}}{2\pi i} (\omega - c_k)^{\alpha_k - 1} [L_0 + L_1(\omega - c_k) + \dots],$$

где  $L_0 \neq 0$ , т. к.  $t_k \neq 0$ ,  $t_k \neq \infty$ .

Следовательно,

$$\frac{d}{d\omega} \log \frac{dz}{d\omega} = \frac{\alpha_k - 1}{\omega - c_k} + P(\omega/c_k).$$

В окрестностях же точек  $\omega_0, \omega_1$ , как мы видели в предыдущем параграфе

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{Le^{-i\lambda}}{2\pi i} \left\{ -\frac{1}{\omega - \omega_0} + \alpha_0 + \beta_0(\omega - \omega_0) + \dots \right\},$$

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{Le^{-i\lambda}}{2\pi i} \left\{ -\frac{1}{\omega - \omega_1} + \alpha_1 + \beta_1(\omega - \omega_1) + \dots \right\}.$$

Поэтому для этих точек

$$\frac{d}{d\omega} \log \frac{dz}{d\omega} = -\frac{1}{\omega - \omega_0} + P(\omega/\omega_0),$$

$$\frac{d}{d\omega} \log \frac{dz}{d\omega} = -\frac{1}{\omega - \omega_1} + P(\omega/\omega_1).$$

Мы предполагаем, что ни одна из точек  $c_k$  не лежит на бесконечности. Поэтому для  $\omega = \infty$

$$t = \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{\omega} + \frac{\gamma_2}{\omega^2} + \dots \quad \begin{matrix} (\gamma_0 \neq 0) \\ (\gamma_0 \neq 0) \end{matrix}$$

и значит

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{Le^{-i\lambda}}{2\pi i} \frac{1}{t} \frac{dt}{d\omega} = -\frac{Le^{-i\lambda}}{2\pi i} \left\{ \frac{\gamma_1}{\gamma_0 \omega^2} + \dots \right\},$$

Откуда

$$\frac{d}{d\omega} \log \frac{dz}{d\omega} = -\frac{2}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} P \left( \frac{1}{\omega} \right),$$

и значит

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\{ \omega \frac{d}{d\omega} \log \frac{dz}{d\omega} \right\} = -2. \quad \dots \quad (\alpha)$$

Составим теперь функцию

$$\frac{d}{d\omega} \log \frac{dz}{d\omega} - \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - 1}{\omega - c_k} + \frac{1}{\omega - \omega_0} + \frac{1}{\omega - \omega_1} + \frac{1}{\omega - \bar{\omega}_0} + \frac{1}{\omega - \bar{\omega}_1}$$

Эта функция регулярна во всей плоскости и на бесконечности равна нулю; значит она есть вообще нуль, т. е.

$$\frac{d}{d\omega} \log \frac{dz}{d\omega} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - 1}{\omega - c_k} - \frac{1}{\omega - \omega_0} - \frac{1}{\omega - \omega_1} - \frac{1}{\omega - \bar{\omega}_0} - \frac{1}{\omega - \bar{\omega}_1}. \quad (\beta)$$

В силу соотношения (α) должно иметь равенство

$$-2 = \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) - 4$$

или

$$2 = \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1).$$

Это равенство выполняется всегда, т. к. оно выражает, что сумма внешних углов многоугольника равна  $2\pi$ .

Интегрируя равенство (β), находим, что

$$Az + B = \frac{\int (\omega - c_1)^{\alpha_1 - 1} (\omega - c_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (\omega - c_n)^{\alpha_n - 1} d\omega}{(\omega - \omega_0)(\omega - \omega_1)(\omega - \bar{\omega}_0)(\omega - \bar{\omega}_1) \dots} \quad (47)$$

Так выглядит то обобщение формулы Schwarz - Christoffel'я которое мы здесь имеем в виду.

Если принять, что одна из точек  $c_k$  лежит на бесконечности, напр., точка  $c_1$ , то, как и в элементарном случае, получим формулу

$$Az + B = \int \frac{(\omega - c_2)^{\alpha_2-1} (\omega - c_3)^{\alpha_3-1} \dots (\omega - c_n)^{\alpha_n-1} d\omega}{(\omega - \omega_0)(\omega - \omega_1)(\omega - \bar{\omega}_0)(\omega - \bar{\omega}_1)} \dots \dots \dots (48)$$

Полученные нами формулы разделяют вместе с обычной формулой Schwarz - Christoffel'я неудобство, связанное с трудностью определения из начальных данных тех констант, которые в эти формулы входят.

§ 9. Циркуляционное обтекание решетки с прямолинейным пером (задача Чаплыгина - König'a).

1. Применим общую формулу предыдущего параграфа к тому случаю, когда пером является отрезок прямой линии.

Мы будем иметь всего две вершины:  $A_1 (z=0)$  и  $A_2 (z=1)$  причем  $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ .

Принимая, что  $c_1 = \infty$  и  $c_2 = 0$ , по формуле (48) получим, что

$$Az + B = \int \frac{\omega d\omega}{(\omega - \omega_0)(\omega - \omega_1)(\omega - \bar{\omega}_0)(\omega - \bar{\omega}_1)}, \quad (a)$$

откуда

$$\begin{aligned} Az + B = & \frac{\omega_0}{(\omega_0 - \bar{\omega}_0)(\omega_0 - \omega_1)(\omega_0 - \bar{\omega}_1)} \ln(\omega - \omega_0) + \\ & + \frac{\bar{\omega}_0}{(\bar{\omega}_0 - \omega_0)(\bar{\omega}_0 - \omega_1)(\bar{\omega}_0 - \bar{\omega}_1)} \ln(\omega - \bar{\omega}_0) + \\ & + \frac{\omega_1}{(\omega_1 - \omega_0)(\omega_1 - \bar{\omega}_0)(\omega_1 - \bar{\omega}_1)} \ln(\omega - \omega_1) + \\ & + \frac{\bar{\omega}_1}{(\bar{\omega}_1 - \omega_0)(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_1)(\bar{\omega}_1 - \omega_1)} \ln(\omega - \bar{\omega}_1), \end{aligned}$$

где  $A$ , очевидно, вещественно.

Замечая, что обход вокруг точек  $\omega_0, \omega_1$  в  $\omega$ -плоскости равносильно смещению на вектора  $Le^{-i\lambda}, -Le^{-i\lambda}$  в  $z$ -плоскости, можем написать равенства

$$\begin{aligned} A Le^{-i\lambda} &= \frac{2\pi i \omega_0}{(\omega_0 - \bar{\omega}_0)(\omega_0 - \omega_1)(\omega_0 - \bar{\omega}_1)}, \\ -A Le^{-i\lambda} &= \frac{2\pi i \omega_1}{(\omega_1 - \omega_0)(\omega_1 - \bar{\omega}_0)(\omega_1 - \bar{\omega}_1)}, \end{aligned} \quad (b)$$

и поэтому предыдущую формулу можно переписать в виде

$$z + C = \frac{L}{2\pi i} \left\{ e^{-i\lambda \ln \frac{\omega - \omega_0}{\omega - \omega_1}} - e^{i\lambda \ln \frac{\omega - \omega_0}{\omega - \omega_1}} \right\} \dots \dots \dots (49)$$

Но при  $\omega = \infty$  должно быть  $z = 0$ , а при  $\omega = 0$  будет  $z = 1$ . Поэтому  $c = 0$ , а для 1 получается уравнение

$$1 = \frac{L}{2\pi i} \left\{ e^{-i\lambda \ln \frac{\omega_0}{\omega_1}} - e^{i\lambda \ln \frac{\omega_0}{\omega_1}} \right\} \dots \dots \dots (50)$$

Положим теперь

$$\omega_0 = r_0 e^{is_0}, \quad \omega_1 = r_1 e^{is_1}$$

Тогда в силу формул (b) мы найдем, что

$$\omega_0 \omega_1 = \bar{\omega}_0 \bar{\omega}_1 \quad \text{или} \quad e^{i(s_0 + s_1)} = e^{-i(s_0 + s_1)} \dots \dots \dots (c)$$

$$M e^{-i\lambda} = \frac{1}{[r_0 - r_1 e^{-i(s_0 + s_1)}][r_0 e^{is_0} - r_1 e^{is_1}]} \dots \dots \dots (d)$$

где M вещественно.

Из формулы (c) вытекает, что

$$s_0 + s_1 = \pi;$$

поэтому формула (d) принимает вид

$$M e^{-i\lambda} = \frac{1}{(r_0 + r_1)(r_0 e^{is_0} - r_1 e^{is_1})}$$

и значит

$$\cos s_0 (r_0 + r_1) = \frac{\cos \lambda}{M (r_0 + r_1)}; \quad \sin s_0 (r_0 - r_1) = \frac{\sin \lambda}{M (r_0 + r_1)},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \lambda = \operatorname{tg} s_0 \frac{r_0 - r_1}{r_0 + r_1}; \quad \dots \dots \dots (51)$$

отсюда при  $\lambda \neq \frac{\pi}{2}$ :

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{\sin(s_0 + \lambda)}{\sin(s_0 - \lambda)} \dots \dots \dots (51 \text{ bis})$$

В силу полученных формул уравнение (50) принимает вид

$$1 = \frac{L}{\pi} \left\{ (2s_0 - \pi) \cos \lambda - \sin \lambda \cdot \ln \frac{\sin(s_0 + \lambda)}{\sin(s_0 - \lambda)} \right\} \dots \dots (50 \text{ bis})$$

Так выражается отношение  $\frac{1}{L}$  через  $\lambda$  и параметр  $s_0$ .

2. Остается составить уравнение для нахождения  $s_0$ . Для этого припомним формулу (46)

$$V_0 \sin(\lambda + \theta_0) = V_1 \sin(\lambda + \theta_1) \dots \dots \dots (46)$$

и заметим, что на основании (а)

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \frac{dz}{d\omega} = 0.$$

Это условие приводит к равенству

$$V_0 [\omega_0 e^{-i(\lambda + \theta_0)} - \overline{\omega_0} e^{i(\lambda + \theta_0)}] = V_1 [\omega_1 e^{-i(\lambda + \theta_1)} - \overline{\omega_1} e^{i(\lambda + \theta_1)}]$$

или

$$r_0 V_0 \sin(\lambda + \theta_0 - s_0) = r_1 V_1 \sin(\lambda + \theta_1 - s_1).$$

В соединении с (46) это дает

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{\sin(\lambda + \theta_0) \sin(\lambda + \theta_1 - s_1)}{\sin(\lambda + \theta_1) \sin(\lambda + \theta_0 - s_0)} \dots \dots \dots (e)$$

или

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{\sin(\lambda + \theta_0) [\cos(\lambda + \theta_1) \operatorname{tg} s_0 + \sin(\lambda + \theta_1)]}{\sin(\lambda + \theta_1) [\cos(\lambda + \theta_0) \operatorname{tg} s_0 - \sin(\lambda + \theta_0)]}$$

откуда

$$\frac{r_0 - r_1}{r_0 + r_1} = \frac{2 \sin(\lambda + \theta_0) \sin(\lambda + \theta_1) - \sin(\theta_1 - \theta_0) \operatorname{tg} s_0}{\operatorname{tg} s_0 \cdot \sin(2\lambda + \theta_0 + \theta_1)}$$

Подставляя это выражение в формулу (51), получим

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{2 \sin(\lambda + \theta_0) \cdot \sin(\lambda + \theta_1) - \sin(\theta_1 - \theta_0) \operatorname{tg} s_0}{\sin(2\lambda + \theta_0 + \theta_1)}$$

или

$$\operatorname{tg} s_0 = \frac{2 \sin \theta_0 \cdot \sin \theta_1}{\sin(\theta_1 - \theta_0)} + \operatorname{tg} \lambda \frac{\sin(\theta_1 + \theta_0)}{\sin(\theta_1 - \theta_0)} \dots \dots \dots (52)$$

Это и есть уравнение для определения  $s_0$ .



3. В частном случае, когда  $\lambda = \frac{\pi}{2}$ , из формулы (51) следует, что  $s_0 = \frac{\pi}{2}$ , а из формулы (с) следует, что

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_0}$$

Поэтому в случае, когда  $\lambda = \frac{\pi}{2}$ , вместо формулы (50 bis), которая принимает неопределенный вид, следует взять формулу

$$l = \frac{L}{\pi} \ln \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{\operatorname{tg} \theta_1} \dots \dots \dots (50 \text{ ter})$$

4. Для вычисления силы давления на одно перо достаточно припомнить формулу (39)

$$-R_y = \rho L \frac{V_1^2 - V_0^2}{2} \cos \lambda + \rho L V_0 \sin(\lambda + \theta_0) (V_0 \sin \theta_0 - V_1 \sin \theta_1). \quad (39)$$

В силу равенства

$$V_0 \sin(\lambda + \theta_0) = V_1 \sin(\lambda + \theta_1)$$

мы получим теперь, что

$$-R_y = \rho L \frac{V_1^2 - V_0^2}{2} \cos \lambda + \rho L [V_0^2 \sin \theta_0 \cdot \sin(\lambda + \theta_0) - V_1^2 \sin \theta_1 \sin(\lambda + \theta_1)]$$

или

$$-R_y = \rho \frac{L}{2} [V_1^2 \cos(\lambda + 2\theta_1) - V_0^2 \cos(\lambda + 2\theta_0)] \dots \dots (53)$$

Примечание: После того, как настоящая статья была набрана, я узнал о работе Betz'a и Peterson'a (Ing.-Arch. 2, 1931, стр. 190), в которой также исследуется струйное обтекание решетки и для сравнения приводятся результаты эксперимента; ознакомиться с этой работой я, к сожалению, не смог.

Кроме того, я прочел работу С. Schmieden'a „Unstetige Strömung durch Gitter“ (Ing.-Arch. 3, 1932, стр. 130), о существовании которой при составлении настоящей статьи я не знал.

Последняя работа содержит три параграфа. В первом параграфе рассматривается задача Чаплыгина-Минакова (и при том без ссылки на этих авторов), изученная нами в § 3 главы I; решение дается близкое по методу к тому, которое приведено в настоящей работе. Второй и третий параграф посвящены решетке с криволинейным пером.

БИБЛИОТ.  
АВИАЦИОННО-ПРОМЫШЛЕННАЯ

---

Prof. N. ACHYESER

### Über die Parallelströmung durch Gitter.

In der Arbeit sind verschiedene allgemeine Formeln für die stetige und unstetige Potentialströmung durch ebenes Gitter abgeleitet.

Auf Grund dieser Formeln werden nachdem die bekannten, hauptsächlich von N. Joukowski und S. Tschapligin herrührenden Aufgaben untersucht. Ferner werden einige neue Fälle gelöst unter denen die der Abb. 3 entsprechende unstetige Strömung erwähnt werden soll.

