ХАРЬКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. ОСОАВИАХИМА

ДОЦЕНТ
Д. И. Костюк

ДИНАМИКА МЕХАНИЗМОВ

Часть 2

Издание ХАИ * 1939

Часть II

I. Силы инерции в механизмах

§18. Учет сил инерции в механизмах

Из теоретической механики мы знаем, что только при прямолинейном равномерном движении нет ускорения.

Механизмы, обладающие конечными размерами ~~периодическим движением~~, не имеют в своем составе звеньев, ~~с~~ точки которых движутся прямолинейным равномерным движением.

Следовательно, любая точка механизма движется с ускорением, изменяющимся по тому или иному закону, причем в некоторые моменты ускорение ее может равняться также и нулю.

Звенья плоских механизмов, ~~за весьма немногими исключениями~~, совершают либо плоско-параллельное движение в его общем виде (шатуны, тяги), либо вращательное движение (кривошипы, балансиры ~~коромысла~~), либо поступательное (поршни, спарники) движение.

Последние два рода движения (вращательное и поступательное) рассматриваются как частные случаи плоско-параллельного движения.

Во всех названных случаях (за исключением специального случая поступательного движения - возвратно - прямолинейного) ускорение любой точки звена равно геометрической сумме тангенциального и нормального ускорений:

$$\bar{W} = \bar{W}^t + \bar{W}^n \qquad (208)$$

Если обозначить:

ρ - радиус кривизны траектории, описываемой рассматриваемой точкой (в метр), то уравнение (208) можно переписать таким образом:

$$W = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}} \qquad (209)$$

В случае возвратно-прямолинейного движения $W^n = 0$ и ускорение любой точки звена напишется так:

$$W = W^t = \frac{dv}{dt} \qquad (210)$$

Уравнения (209) и (210) показывают, что величина ускорения в основном зависит от величины и интенсивности изменения скорости.

В современных механизмах угловая скорость звеньев механизма достигает десятков тысяч оборотов в минуту, поэтому ускорения порядка 4000-5000 м/сек². являются для таких механизмов обычными.

В связи с этим и сила инерции, равная $\bar{P} = -m\bar{W}$, достигает очень большой величины. Сила инерции, действуя на связи, вызывает дополнительные давления в сочленениях, дополнительные напряжения в звеньях, колебания, как отдельных звеньев, так и всего механизма в целом и т. д.

Для изучения влияния сил инерции рассматриваемого звена на соседние звенья выгодно привести бесчисленное множество сил инерции отдельных материальных точек этого звена к одной силе или к небольшому числу сил.

Покажем, как делается такое приведение при различных случаях движения звеньев

А. Общий случай плоско-параллельного движения

Пусть звено Q совершает плоско-параллельное движение (фиг. 84).

Мы знаем, что данное движение можно представить как сложное движение из поступательного вместе с какой-либо точкой, выбранной за полюс, и вращательного вокруг этой точки.

Возьмем за полюс точку O, и поместим в нее начало координатных осей. Оси OX и OY расположим в плоскости, параллельной движению звена Q, ось OZ - перпендикулярно к плоскости движения.

Пусть в данный момент:

W - ускорение точки O (полюса);

ω - угловая скорость звена;

ε - угловое ускорение звена

Тогда ускорение любой точки $A(x_i, y_i, z_i)$ этого звена выразится так:

$$\bar{W} = \bar{W}^e + \bar{W}^r$$

где W^e - ускорение точки A при поступательном движении звена, равное ускорению точки O, т.е. $\bar{W}^e = \bar{W}$;

W^r - ускорение точки A в ее относительном движении - вращении относительно OZ;

$\bar{W}^r = \bar{W}^{rn} + \bar{W}^{rt}$, или $W^r = \rho_i \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$, причем

$$\rho_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \quad т.е.$$

ρ_i - расстояние точки A до оси вращения

Приведение сил инерции при поступательном движении.

Обозначив массу точки A через m_i, найдем силу инерции этой точки при поступательном движении звена:

$$\bar{p} = -m_i \bar{W}$$

Так как ускорения при поступательном движении у всех точек одинаковы, то, просуммировав по всем точкам, получим силу инерции звена в его поступательном движении:

$$\bar{P} = -\sum m_i \bar{W} = -m\bar{W}, \qquad (211)$$

где m - масса звена.

Точку приложения этой силы найдем на основании свойства центра параллельных сил.

Мы знаем, что центр параллельных сил не меняет своего положения, если все параллельные силы увеличить, или уменьшить в одно и то же число раз или повернуть их на один и тот же угол.

Умножая силы инерции материальных точек $p = -m_i W$ на $\frac{g}{W}$, получим силы $p_1 = -m_i g$, которые после поворота в вертикальное положение по величине и направлению будут тождественны силам веса. Следовательно, точка приложения силы $\bar{P}$ есть центр тяжести данного звена.

Итак, при поступательном движении звена силы инерции приводятся к одной силе, по величине равной массе звена, помноженной на ускорение поступательного движения; сила эта приложена в центр тяжести звена и направлена против ускорения поступательного движения.

Для приведения сил инерции в относительном (вращательном вокруг оси OZ) движении звена разложим ускорение W^z на нормальное и касательное: $\bar{W}^z = \bar{W}^{zn} + W^{zt}$. В соответствии с этим для точки A получим центробежную силу инерции

$$\bar{C}_1 = m_i \bar{\rho}_i \omega^2$$

и касательную, направленную по перпендикуляру к ρ_i и по величине равную $K_i = m_i \rho_i \varepsilon$

Приведение центробежных сил инерции

Перенесем точку приложения силы C_i в A_1, - точку пересечения линии ее действия с осью OZ - и разложим по направлениям осей OX и OY.

Составляющие ее будут равны:

$$C_{ix} = m_i x_i \omega^2$$

$$C_{iy} = m_i y_i \omega^2$$

Приведя эти силы в точку O, получим равнодействующую силу

$C_i = m_i \rho_i \omega^2$ и две пары:

в плоскости XOZ с моментом $C_{ix} Z_i = m_i x_i z_i \omega^2$ и

в плоскости YOZ с моментом $C_{iy} Z_i = m_i y_i z_i \omega^2$

Просуммировав полученные силы и пары по всем точкам звена, получим центробежную силу инерции

$$\bar{C} = \Sigma m_i \bar{\rho}_i \omega^2 = m \bar{\rho}_0 \omega^2 \qquad (212)$$

момент, характеризующий пару, лежащую в плоскости XOZ:

$$M_{xz} = \Sigma m_i x_i z_i \omega^2 = J_{xz} \omega^2 \qquad (213)$$

момент, характеризующий пару, лежащую в плоскости YOZ:

$$M_{yz} = \Sigma m_i y_i z_i \omega^2 = J_{yz} \omega^2 \qquad (214)$$

где ρ_0 - расстояние от центра тяжести звена до оси вращения - оси OZ, J_{xz} и J_{yz} - центробежные моменты инерции звена.

Моменты, полученные на основании уравнений (213) и (214), можно заменить одним результирующим.

$$M_c = \omega^2 \sqrt{J_{xz}^2 + J_{yz}^2}, \qquad (215)$$

действующим в плоскости, наклонной к плоскости XOZ под углом α, причем

$$tg\alpha = \frac{J_{yz}}{J_{xz}}$$

Итак, центробежные силы инерции, вообще говоря, сводятся:

а) к силе C, равной массе звена помноженной на центростремительное ускорение центра тяжести и направленной от точки O к проекции центра тяжести на плоскость XOY перпендикулярно к оси вращения OZ и

б) к паре с моментом $M_c = \omega^2 \sqrt{J_{xz}^2 + J_{yz}^2}$, лежащей в плоскости, наклонной к плоскости XOZ под углом

$$\alpha = arctg \frac{J_{yz}}{J_{xz}}$$

Приведение касательных сил инерции

Касательную силу инерции K_i, приложенную в точке A, прежде всего перенесем в плоскость XOY. После перенесения мы получим пару с моментом $K_i Z_i$ и силу K_i, приложенной в точке A_2.

Для удобства суммирования разложим сылы, составляющие эту пару, по направлениям осей OX и OY. Тогда момент этой пары разложится на два составляющих.

$$K_{ix} Z_i = m_i y_i \varepsilon Z_i \quad и$$
$$K_{iy} Z_i = m_i x_i \varepsilon Z_i$$

Оставшуюся силу K_i, лежащую в плоскости XOY и приложенную в точке A_2, перенесем в точку O. Получим силу K_i, приложенную в точке O и направленную перпендикулярно к ρ_i, и пару с моментом $K_i \rho_i = m_i \rho_i^2 \varepsilon$, действующую в плоскости XOY, т.е. в плоскости, перпендикулярной к оси вращения; момент ее направлен против углового ускорения ε

Просуммировав все силы и пары по всем точкам звена, получим:

1) касательную силу инерции

$$K=\sum m_i \rho_i \varepsilon = m\rho_0 \varepsilon, \qquad (216)$$

приложенную в точке O и направленную перпендикулярно к ρ_0 (ρ_0 - расстояние от точки O до проекции центра тяжести звена на плоскость XOY) в такую сторону, чтобы вращать звено относительно центра тяжести по угловому ускорению:

2) пару в плоскости XOZ с моментом

$$M'_{xz}=\sum m_i y_i \varepsilon z_i = J_{yz}\varepsilon, \qquad (217)$$

3) пару в плоскости YOZ с моментом

$$M'_{yz}=\sum m_i x_i \varepsilon z_i = J_{xz}\varepsilon \quad и \qquad (218)$$

4) пару в плоскости XOY с моментом

$$M=\sum m_i \rho_i^2 \varepsilon = J_z \varepsilon \qquad (219)$$

Моменты, определяемые уравнениями (217) и (218) дают результирующий момент, по величине равный

$$M_K=\varepsilon\sqrt{J_{yz}^2+J_{xz}^2} \qquad (220)$$

и действующий в плоскости, перпендикулярной к плоскости момента M_C.

Итак, касательные силы инерции в общем случае сводятся к силе

$$K=m\rho_0\varepsilon$$

и моментам:

$$\left\{\begin{aligned} & M_K=\varepsilon\sqrt{J_{yz}^2+J_{xz}^2} \quad и \\ & M=J_z\varepsilon \end{aligned}\right.$$

В существующих механизмах звенья, совершающие плоско-параллельное движение, за весьма немногими исключениями, имеют плоскость симметрии, параллельную плоскости движения.

При плоско-параллельном движении за полюс можно принимать любую точку. В кинематике механизмов мы обычно, за полюс принимали такую точку, скорость и ускорение которой известны. В динамике за полюс принимают центр тяжести звена.

Если за полюс (начало координат) принять центр тяжести звена.

а оси OX и OY расположить в плоскости его симметрии[*], то $\rho_0=0$; $J_{xz}=0$ $J_{yz}=0$ и все силы инерций звена приведутся к силе

$$\bar{P}=-m\bar{W}$$

и паре $$M=J_z\mathcal{E},$$

где W - ускорение центра тяжести звена,

m - масса звена,

J_z - момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр его тяжести и перпендикулярной к плоскости движения,

$\mathcal{E}$ - угловое ускорение звена.

Сила P приложена в центре тяжести звена и направлена противоположно ускорению центра тяжести.

Момент действует в плоскости XOY (в плоскости симметрии) и направлен против углового ускорения $\mathcal{E}$.

На фиг. 85 представлены координатные оси, помещенные в центре тяжести (точка S) звена, совершающего плоско-параллельное движение.

Силы инерции этого звена изображены главным вектором $P=-mW$ начало которого находится в точке S, и главным моментом $M=J_z\mathcal{E}$, направление которого показано стрелкой (против ~~его~~ углового ускорения).

Главный момент характеризует собою пару, которую можно представить в виде двух сил (P, P), перечеркнутых на чертеже, с плечом h. Величина плеча определится из равенства:

$$h=\frac{M}{P}=\frac{J_z\mathcal{E}}{mW} \qquad (220)$$

Плечо h откладывается по перпендикуляру, проведенному к главному вектору из точки S в таком направлении, чтобы

---

[*] В данном случае симметрию нужно понимать не только в геометрическом смысле, но и в смысле распределения масс

главный вектор, перенесенный в вершину этого перпендикуляра, дал момент, совпадающий по направлению с главным.

Так как силы, приложенные в точке S, взаимно уравновешиваются, то мы приходим к заключению, что в данном, весьма **важном** для практики, случае все силы инерции приводятся к одной силе по величине равной массе тела, помноженной на ускорение центра тяжести звена.

Направление этой силы противоположно ускорению центра тяжести, а точка приложения находится на перпендикуляре, проведенном из центра тяжести звена к направлению ускорения, на расстоянии от центра тяжести, равном $h=\frac{J_z \varepsilon}{mW}$.

Б. Вращение вокруг неподвижной оси

Очевидно, для общего случая вращения звена вокруг неподвижной оси мы получим те же силы инерции, что и в предыдущем случае, за исключением силы инерции при поступательном движении, которая в данном случае будет равна нулю.

Таким образом, силы инерции звена приведутся:

а) к центробежной силе

$$C=m\rho_0\omega^2 \tag{212}$$

б) к моменту

$$M_c=\omega^2\sqrt{J_{xz}^2+J_{yz}^2} \tag{215}$$

в) к касательной силе

$$K=m\rho_0\varepsilon \tag{216}$$

г) к моменту

$$M_K=\varepsilon\sqrt{J_{xz}^2+J_{yz}^2} \quad \text{и} \tag{220}$$

д) к моменту

$$M=J_z\varepsilon \tag{219}$$

Положение и направление сил и моментов указаны при рассмотрении предыдущего случая.

Если центр тяжести звена лежит на оси вращения, то $C=0$

и $K=0$. Это есть случай статической балансировки звена.

Если, кроме этого, звено имеет плоскость симметрии, перпендикулярную к оси вращения, то J_{xz} и J_{yz} будут равны нулю, и силы инерции сведутся к одному моменту $M=J_z\mathcal{E}$, действующему в плоскости симметрии. В этом случае ось вращения не испытывает динамических реакций, являясь так называемой свободной осью. Это есть случай динамической балансировки звена.

При переменном угловом ускорении $\mathcal{E}$ момент M будет изменяться по величине, вызывая в оси крутильные колебания.

При равномерном вращении звена, т.е. при $\mathcal{E}=0$, все силы инерции в данном случае взаимно уравновесятся.

Рассмотрим более подробно случай вращения тела, имеющего плоскость симметрии, вокруг оси, перпендикулярной к этой плоскости.

Пусть плоскость симметрии тела совпадает с плоскостью чертежа тогда ось вращения O будет перпендикулярна к плоскости чертежа. Центр тяжести тела S лежит в плоскости симметрии на расстоянии ρ_0 от оси вращения (фиг. 86).

Направление угловой скорости и углового ускорения показаны стрелками.

Так как $J_{xz}=0$ и $J_{yz}=0$, то все силы инерции звена приведутся к двум силам:

$$C=m\rho_0\omega^2 \quad \text{и}$$

$$K=m\rho_0\mathcal{E} \quad \text{(не перечеркнутая на фигуре)}$$

моменту $$M=J_z\mathcal{E}.$$

Направления их показаны на чертеже на основании предыдущих заключений.

Представим момент M в виде пары сил (KK), перечеркнутых на фигуре. Плечо этой пары $OD=a$ определится из равенства

$$OD=a=\frac{M}{K}=\frac{J_z\mathcal{E}}{m\rho_0\mathcal{E}}=\frac{J_z}{m\rho_0}$$

Силы приложенные в точке O, взаимно уравновешиваются.
Оставшаяся сила K даст с силой C суммарную силу, приложенную в точке D, и равную:

$$\bar{R}=\bar{K}+\bar{C} \quad \text{или} \quad R=m\rho_0\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}$$

т.е. по величине равную массе тела помноженной на ускорение центра тяжести. Легко убедиться, что линия действия силы K будет параллельна ускорению центра тяжести (точка S) и что направлена она в сторону, противоположную этому ускорению.

Обозначив радиус инерции рассматриваемого тела относительно оси вращения через r, расстояние от точки приложения силы R до оси вращения можно переписать так:

$$OD=a=\frac{J_z}{m\rho_0}=\frac{mr^2}{m\rho_0}=\frac{r^2}{\rho_0}$$

Полученное выражение, как известно из теоретической механики, обозначает расстояние от центра качания физического маятника до оси подвеса.

Итак: При вращении тела вокруг неподвижной оси, перпендикулярной к плоскости симметрии тела, все силы инерции приводятся к одной силе, по величине равной массе тела, помноженной на ускорение центра тяжести тела.

Точка приложения этой силы совпадает с центром качания тела, если за ось подвеса взять ось вращения. Направлена она в сторону, противоположную ускорению центра тяжести тела.

В. Поступательное движение

При поступательном движении звена силы инерции приводятся, как это видно из случая А, к одной силе

$$\bar{P}=-m\bar{W},$$

где m - масса звена

W - ускорение любой точки этого звена.

Пример 1- . В шарнирном четырехзвеннике $OABO_1$, изображенном на фиг. 87, кривошип OA вращается равномерно с угловой скоростью $\omega = 10 \frac{1}{сек}$. Шатун AB и коромысло O_1B имеют плоскости симметрии, параллельные плоскости движения механизма.

Привести силы инерции шатуна и коромысла к равнодействующим силам.

Дано: $AO = 100$ мм; $AB = 300$ мм; $O_1B = 200$ мм; $OO_1 = 220$ мм; $AS = 150$ мм; $O_1S_1 = 70$ мм (S - центр тяжести шатуна; S_1 - центр тяжести коромысла); вес шатуна $g_ш = 5$ кг; вес коромысла $g_к = 4$ кг; момент инерции шатуна относительно оси, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной к плоскости движения; $J_z = 0{,}008$ кг.м.сек^2; момент инерции коромысла относительно оси вращения $J_{o_1} = 0{,}0035$ кг. м. сек.

Для определения величин сил инерции необходимо знать ускорения центров тяжести шатуна и коромысла.

Строим повернутые планы скоростей и ускорений.

Масштаб для вычерчивания схемы механизма принимаем: 1мм-0,004 м.

Масштаб скоростей: 1мм-0,04 м/сек (1мм-$\lambda\omega \frac{м}{сек}$);

Масштаб ускорений: 1мм-0,4 м/сек^2 (1мм-$\lambda\omega^2$ м/сек^2).

Треугольник $aOв$ - повернутый план скоростей ($Oв \parallel O_1B$);

$Oanв'O$ - план ускорений, причем:

$W_A = \bar{a}\bar{O} \cdot 0{,}4$ м/сек^2 $\qquad W_B^n = \bar{n_1 o} \cdot 0{,}4$ м/сек

$W_B = \bar{в'O} \cdot 0{,}4$ " $\qquad W_B^t = \bar{в' n_1} \cdot 0{,}4$ "

$W_{B(A)}^t = \bar{в' n} \cdot 0{,}4$ " $\qquad W_S = \bar{s' o} \cdot 0{,}4$ "

$W_{B(A)}^n = \bar{na} \cdot 0{,}4$ " $\qquad W_{S_1} = \bar{s_1' o} \cdot 0{,}4$.

Построение планов скоростей и ускорений произведено обычными методами, известными из кинематики механизмов.

Измерением находим $S'O = 21$мм; $S_1'O = 5{,}5$мм.

Следовательно, величины равнодействующих сил инерции:

шатуна $R = \frac{g_ш}{g} \cdot W_S = \frac{5}{9.81} \cdot 21 \cdot 0{,}4 = 42{,}8$ кг.

коромысла
$$R=\frac{g_k}{g}\cdot W_{s_1}=\frac{4}{9,81}\cdot 5,50,4=0,9\,кг.$$

Линии действия этих сил параллельны ускорениям соответствующих центров тяжести:

$$R \parallel W_s\,,\quad R_1 \parallel W_{s_1}$$

Точка приложения силы R находится на перпендикуляре к W_s на расстоянии от S, равном
$$h=\frac{J_z\,\varepsilon}{R}$$

Определяем угловое ускорение шатуна по формуле:

$$\varepsilon=\frac{W^t_{B(A)}}{AB\alpha}=\frac{b'n\,.\,0,4}{0,3}=\frac{8\,.\,0,4}{0,3}=10,67\,\frac{1}{сек^2}$$

Перенося вектор тангенциального ускорения точки B относительно точки A (вектор $b'n$) в точку B, видим, что угловое ускорение шатуна направлено против часовой стрелки. Следовательно, момент $M=J_z\varepsilon$ будет направлен по часовой стрелке; поэтому перпендикуляр к W_s проводим в сторону кривошипа. Отложив на нем отрезок

$$SD=h=\frac{0,008\,.\,10,67}{42,8}=0,002м=2мм,$$

получим точку приложения силы R - точку D.

Точка приложения силы R_1 определяется как центр качания коромысла, если за ось подвеса принять ось вращения коромысла.

Расстояние центра качения от оси подвеса определится так:

$$O_1D_1=\frac{J_o}{m\rho_o}=\frac{0,0035}{\frac{4}{9,81}\cdot 0,07}=0,123м=123мм.$$

Пример 2 [x)] Диск весом $P=50\,кг$ насажен на вал неверно, так что плоскость диска составляет с плоскостью вращения YOX угол $\alpha=5°$. Число оборотов диска постоянное и равно $n=1000$ об/м. Центр тяжести диска лежит на оси вращения. Радиус диска

---

x) Проф. Л.Б. Левенсон, Статика и динамика машин. Изд. 1934 г., прим. 76, стр. 359.

$R=25$ см. Расстояние между подшипниками оси диска $\mathcal{L}=100$ см причем

$$l_1=l_2=\frac{\mathcal{L}}{2}=50\text{ см} \quad (\text{фиг. } 88)$$

Найти давление оси диска на подшипники.

Данный пример относится к случаю Б.

Так как диск вращается равномерно ($\varepsilon=0$), и центр тяжести его совпадает с осью вращения ($\rho_0=0$), то - на основании уравнений (212), (216), (219) и (220) - $C=0$; $K=0$; $M_K=0$ и $M=0$.

Следовательно, силы инерции приводятся к одному моменту

$$M_c=\omega^2\sqrt{J_{xz}^2+J_{yz}^2}$$

Ось OX является осью симметрии диска; поэтому $J_{xz}=0$.

Для определения центробежного момента инерции J_{yz} возьмем элемент диска, ограниченный двумя бесконечно близкими хордами, параллельными оси OX и находящимися на расстоянии r от центра диска.

Координаты центра тяжести этого элемента выразятся так:

$$X=0,$$
$$y=r\cos\alpha$$
$$z=r\sin\alpha$$

Центробежный момент инерции этого элемента относительно осей y и z будет $dm.zy=dm.r^2\sin\alpha\cos\alpha$.

где dm - масса выделенного элемента.

Следовательно, $J_{yz}=\int r^2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2}\int r^2dm$;

но $\int r^2dm$ есть экваториальный момент инерции диска, равный

$$\frac{mR^2}{4}\,{}^{*)}$$

---

*) См. проф. Е.Л. Николаи, Лекции по теоретической механике, ч. III, вып 2, стр. 137 изд. 1932 г.

Поэтому $J_{yz}=\frac{1}{8}\,mR^2\cdot\sin 2\alpha=\frac{1}{8}\cdot\frac{50}{9{,}81}\,0{,}25^2\cdot 0{,}174=0{,}007$ кг. м. сек.

Угловая скорость вращения диска

$$\omega=\frac{\pi n}{30}=\frac{3{,}14\cdot 1000}{30}=104{,}5\,\frac{1}{сек.}$$

$$M_c=\omega^2\sqrt{J_{xz}^2+J_{yz}^2}=\omega^2 J_{yz}=104{,}5^2\cdot 0{,}007=76 \text{ кг. м.}$$

Так как $J_{xz}=0$, то M_c действует в плоскости YOZ и дает дополнительные давления на подшипники, направленные при данном положении диска по вертикали, причем на левый подшипник давление будет направлено вниз, а на правый – вверх.

Величина его определится из уравнения:

$$Q=\frac{M_c}{L}=\frac{76}{1}=76 \text{ кг.}$$

Следовательно, полное давление на левый подшипник

$$Q_1=\frac{P}{2}+Q=25+76=101 \text{ кг.}$$

а на правый $\qquad Q_2=\frac{P}{2}-Q=25-76=-51$ кг.

Необходимо подчеркнуть, что это будут максимальное и минимальное давления на подшипники. При повороте диска дополнительное динамическое давление будет также менять свое направление в соответствии с поворотом оси OY, и полное давление на подшипники будет равно геометрической сумме половины веса диска и силы Q.

§ 19. Напряжение от силы инерции в быстро-вращающемся ободе

20

Шкивы и особенно тяжелые маховики на быстро вращающиеся валы насаживаются точно; динамической балансировкой достигается полное уравновешивание сил инерции.

В этом случае ось вращения является свободной от дополнительной динамической нагрузки, т. е силы инерции маховика или шкива на соседние звенья механизма не оказывают никакого влияния, но они вызывают дополнительные напряжения в ободе шкива или маховика. Величина этих напряжений лимитирует при практических расчетах диаметры шкивов (маховиков) при заданном числе оборотов вала

При определении напряжения в ободе от сил инерции, влиянием спиц и втулки пренебрегают, рассматривая обод как вращающееся вокруг своей оси кольцо (Фиг. 80).

Пусть F - площадь сечения кольца в $см^2$,

R - средний радиус его, т. е. радиус окружности, описываемой центром тяжести сечения, в см.

ω - Угловая скорость вращения кольца,

γ - Удельный вес материала кольца в $кг/см^3$,

v - скорость на окружности радиуса R в $см/сек$,

σ - напряжение в ободе от действия сил инерции в $кг/см^2$

g - ускорение силы веса в $см/сек^2$

Рассмотрим условие равновесия половины кольца, находящегося под действием сил инерции и двух сил σF являющихся действием отброшенной нижней половинки кольца на верхнюю.

Для этого выделим элемент кольца двумя радиальными сечениями, проходящими под углом α и $\alpha + d\alpha$ к основному сечению кольца. При равномерном вращении кольца в этом элементе возникает лишь центробежная сила инерции, равная по величине:

$$c = dm \cdot R\omega^2 = \frac{R.d\alpha.F.\gamma.R.\omega^2}{g} = \frac{\gamma}{g} F R^2 \omega^2 d\alpha$$

Проектируя все силы на вертикальную ось, получим

$$-2\sigma F + \int_0^{\pi} \frac{\gamma}{g} F R^2 \omega^2 \sin\alpha \, d\alpha = 0$$

Откуда

$$\sigma = \frac{\gamma}{2g} R^2 \omega^2 \int_0^{\pi} \sin\alpha \, d\alpha = \frac{\gamma}{g} R^2 \omega^2;$$

или

$$\sigma = \frac{\gamma}{g} v^2 \qquad (221)$$

Следовательно, при окружной скорости $v = 30$ м/сек $= 300$ см/сек и удельном весе чугуна $\gamma = 0{,}007$ кг/см^3, напряжения в ободе шкива от действия сил инерции будут равны

$$\sigma = \frac{0{,}007 \cdot 3000}{981} = 65 \text{ кг/см}^2$$

Уравнение (221) показывает, что напряжение от действия сил инерции растут в кольце пропорционально квадрату окружной скорости и не зависят от площади сечения кольца.

§ 20. Определение моментов инерции звеньев механизма

Выше мы показали, что когда звено имеет плоскость симметрии перпендикулярную к неподвижной оси вращения его, то все силы инерции приводятся к одной силе, приложенной в центре качания, если за ось подвеса принять неподвижную ось вращения.

Из теоретической механики мы знаем, что при плоско параллельном движении тела всегда можно найти в системе этого тела прямую, перпендикулярную к плоскости движения, все точки которой имеют в данный момент ускорение, равное нулю. Точка пересечения этой прямой с плоскостью движения называется <u>мгновенным центром ускорения.</u>

Ускорение точек тела по отношению к этой прямой распределяются аналогично тому, как они распределяются относительно неподвижной оси в случае вращения тела вокруг этой оси.

Поэтому вывод о приведении сил инерции вращающегося тела вокруг неподвижной оси можно распространить и на случай плоско параллельного движения, сформулировав его таким образом

<u>Если тело совершает плоско параллельное движение, па-</u>

раллельное плоскости его симметрии, то все силы инерции приводятся к одной силе, равной массе этого тела, помноженной на ускорение центра тяжести и направленной в сторону противоположную этому ускорению; точка приложения этой силы находится в центре качания, если за точку подвеса принять мгновенный центр ускорения.

Заметим, что под „центром качания" и „центром ускорения" здесь нужно разуметь точки пересечения соответствующих осей с плоскостью симметрии тела.

Предупреждаем учащихся, что найденная нами точка приложения равнодействующей сил инерции шатуна (фиг. 4) – точка D (также, как и точка пересечения равнодействующей с шатуном – точка D_2) – не является центром качания шатуна.

Это не значит, что предыдущее решение было неверно. Построив мгновенный центр ускорения P_w звена AB и соединив его с центром тяжести S, отложим на линии P_wS от точки P_w отрезок, равный $\frac{r_1^2}{r_2}$ (где r_1 – радиус инерции шатуна относительно P_w x), а $r_2 = P_wS$), мы получим центр качания на линии DD_2.

Следовательно, оба метода дают один и тот же результат, так как силу можно переносить по линии ее действия в какую угодно точку, – от этого влияние ее на соседние звенья не изменится.

Пользование центром качания для определения точки приложения равнодействующей сил инерции упрощает решение лишь при вращении тела вокруг неподвижной оси.

В случае плоско параллельного движения этот метод сложнее приведенного нами выше.

---

x) r_1 – определяется на основании теоремы Штейнера из равенства $\frac{g_w}{g} r_1^2 = J_S + \frac{g_w}{g} \cdot r_2^2$.

Из сказанного выше с совершенной очевидностью вытекает необходимость для динамического анализа механизмов умения определять моменты инерции звеньев механизмов относительно различных осей.

В современной практике применяются различные методы определения моментов инерции тел.

Остановимся на наиболее употребительных из них.

Определение моментов инерции методом качаний

На фиг. 90 показан подвешенный на призме шатун. При отклонении его от вертикального положения он будет качаться причем уравнение движения его напишется так:

$$J_0\varphi'' = -Q\rho_0 \sin\varphi \qquad (222)$$

При небольших отклонениях $\sin\varphi$ можно приравнять φ, и тогда уравнение (222) дает:

$$J_0\varphi'' + Q\rho_0\varphi = 0$$

или

$$\varphi'' + \frac{Q\rho_0}{J_0}\varphi = 0, \qquad (223)$$

где J_0 – момент инерции шатуна относительно оси подвеса.

Если обозначить $\frac{Q\rho_0}{J_0} = K^2$, то уравнение (223) перепишется так:

$$\varphi'' + K^2\varphi = 0, \qquad (224)$$

а это есть уравнение свободных колебаний, причем K есть частота свободных колебаний, которая, как известно из теоретической механики, связана с периодом колебания T таким равенством:

$$T = \frac{2\pi}{K}$$

Подставляя в это равенство значение K, имеем

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{Q\rho_0}}$$

Откуда

$$J_0 = \frac{T^2}{4\pi^2} Q \rho_0 \qquad (225)$$

Величины стоящие в правой части равенства (225), определяются следующим образом.

T - измерением помощью секундомера времени n качаний подвешенного звена и делением этого времени на n, причем чем больше взято число качаний n, тем точнее определяется период колебания T;

Q - обыкновенным взвешиванием испытуемого звена на весах;

ρ_0 - на основании закона сложения параллельных сил помощью установки, показанной на фиг. 91.

Один конец звена кладут на неподвижную опору, а другой на опору, укрепленную на чашке весов и предварительно уравновешенную.

Вес гирь даст давление на опору, находящуюся на весах Q.

После этого расстояние ρ_0 от оси подвеса до центра тяжести определится из уравнения:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\rho_0}{l + \frac{d_1+d_2}{2} - \rho_0},$$

откуда:

$$\rho_0 = \frac{Q_1}{Q}\left(l + \frac{d_1+d_2}{2}\right) \qquad (226)$$

Последнее равенство легко получается также из условия равновесия сил, действующих на испытуемое звено (фиг. 91), если взять сумму моментов всех сил относительно неподвижной опоры.

Определение моментов инерции методом крутильных колебаний

Для определения момента инерции тела, имеющего ось симметрии, подвешивают его с помощью проволоки таким образом, чтобы ось симметрии тела совпадала с осью проволоки (фиг. 92). Затем закручивают проволоку на небольшой угол и предоставляет телу возможность свободно колебаться, замеряя время, примерно, 50 колебаний. Тогда период колебания определится делением полученного времени на число колебаний.

Так как момент сопротивления закручиванию проволочки пропорционален углу закручивания, то уравнение крутильных колебаний напишется так:

$$J\varphi'' = -C\varphi, \tag{227}$$

где C - коэфициент пропорциональности.

Из ур-ия (227) имеем:

$$J\varphi'' + C\varphi = 0$$

Или

$$\varphi'' + \frac{C}{J}\varphi = 0 \tag{228}$$

Следовательно, аналогично с предыдущим случаем:

$$\frac{C}{J} = \frac{4\pi^2}{T^2} \tag{229}$$

Подвесив к проволоке цилиндрический диск (момент инерции которого J_0 легко определить аналитически), определяют период колебаний этого диска T_0.

Очевидно, и для этого случая можно написать уравнение, аналогичное уравнению (229):

$$\frac{C}{J_0} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \tag{230}$$

Разделив ур-ие (230) на уравнение (229), получим:

$$\frac{J}{J_0} = \frac{T^2}{T_0^2}$$

Откуда искомый момент инерции

$$J = J_0 \frac{T^2}{T_0^2} \tag{231}$$

Определение моментов инерции маховиков и шкивов методом „выбега"

Прибор состоит из двух сплошных дисков A и B, заклиненных на валу. Вал С лежит в двух подшипниках скользящего трения (фиг. 93).

Диски приводятся во вращение от мотора с помощью цилиндрической фрикционной передачи D-A, в состав которой входит диск A.

На валу С заклинивается диск S, момент инерции которого желают определить. Мотор с фрикционным диском D устанавливается на салазках.

После включения мотора перемещают салазки до включения фрикционной передачи. Когда число оборотов прибора установится, измеряют число оборотов его и выключают фрикционную передачу, отводя салазки с мотором. Одновременно засекают время по секундомеру или включают счетчик числа оборотов. Прибор будет вращаться, расходуя кинетическую энергию на работу трения в подшипниках.

Момент остановки прибора также засекают секундомером, определяя таким образом время выбега. Если же включен счетчик числа оборотов, то просто отмечают по счетчику число оборотов прибора до остановки, а затем и угол поворота его.

Без счетчика угол поворота определяют по времени выбега и по начальной угловой скорости:

$$\varphi = \frac{\omega t}{2} = \frac{\pi n t}{60},$$

где n - показание тахометра при выключении мотора, а t - показание секундомера.

Обозначим:

M_t - момент трения в подшипниках в кг. см,

G_0 - вес вала С с дисками A и B в кг.,

J_0 - момент инерции вала С с дисками A и B, определенный аналитически в кг. см. сек^2,

d - диаметры шеек вала,

μ_1 - коэфициент трения в цапфах,

J - искомый момент инерции,

$\mathcal{G}$ - вес испытуемого шкива.

На основании закона живых сил имеем:

$$-(J+J_0)\frac{\pi^2 n^2}{900} = -M_t\varphi = -\mu_1(\mathcal{G}+\mathcal{G}_0)\frac{d}{2}\varphi$$

или
$$(J+J_0)\frac{\pi^2 n^2}{900} = \mu_1(\mathcal{G}+\mathcal{G}_0)\frac{d}{2}\varphi \tag{232}$$

Если снять шкив и проделать тот же опыт с одним прибором, то мы получим иное значение угла поворота (φ_1)

Считая и первоначальное число оборотов иным, равным n_1, закон живой силы для этого случая напишем в таком виде:

$$-J_0\frac{\pi^2 n_1^2}{900} = -\mu_1\mathcal{G}_0\frac{d}{2}\varphi_1$$

(допускаем, что коэфициент трения в цапфах от изменения удельного давления не изменился)

или
$$J_0\frac{\pi^2 n^2}{900} = \mu_1\mathcal{G}_0\frac{d}{2}\varphi_1 \tag{233}$$

Разделив уравнение (232) на (233), получим:

$$\frac{J+J_0}{J_0}\cdot\frac{n^2}{n_1^2} = \frac{\mathcal{G}+\mathcal{G}_0}{\mathcal{G}_0}\cdot\frac{\varphi}{\varphi_1}$$

Откуда:
$$J = J_0\frac{\mathcal{G}+\mathcal{G}_0}{\mathcal{G}_0}\cdot\frac{\varphi}{\varphi_1}\cdot\frac{n_1^2}{n^2} - J_0$$

или, окончательно:
$$J = J_0\left(\frac{\mathcal{G}+\mathcal{G}_0}{\mathcal{G}_0}\frac{\varphi}{\varphi_1}\frac{n_1^2}{n^2} - 1\right) \tag{234}$$

§ 21. Метод замещающих точек

Если пренебречь упругостью звена, то его можно рассматривать как твердое тело, каждая точка которого наделена всеми присущими материи свойствами, вследствие чего при движении этого звена возникают объемные силы инерции

Выше мы показали, как это бесконечно большое число сил инерции материальных точек тела можно привести к ограниченному числу сил, напр., к силе и паре или даже к одной силе.

Рассмотренный выше способ неудобен тем, что для выполнения такого приведения необходимо определение углового ускорения звеньев по величине и направлению.

При пользовании методом замещающих точек такого определения не требуется.

Стремясь освободиться от операций с объемными силами, твердое тело с бесконечно большим числом материальных точек заменяют несколькими (обычно, двумя-четырьмя) материальными точками, мысленно жестко между собою связанными.

Эти точки с фиктивными массами и называют замещающими точками.

Условием эквивалентности системы замещающих точек твердому телу служит, равенство их кинетической энергии, т.е. для общего случая плоского движения:

$$\sum_{n} \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m v_s^2}{2} + J_s \frac{\omega^2}{2} \qquad (235)$$

где: n - число замещающих точек,

m_i и v_i - масса и скорость i-той замещающей точки,

m - масса всего тела,

v_s - скорость центра тяжести тела,

J_s - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной к плоскости движения.

ω - угловая скорость тела в данный момент.

Пусть тело с центром тяжести S, движется параллельно плоскости чертежа (фиг. 94)

Поместим начало координат в центре тяжести, а оси SX и SY расположим в плоскости движения.

Замещающие точки будем располагать в плоскости XSY.

Обозначим:

x_i, y_i - координаты i-той замещающей точки,

ρ_i - расстояние ее до центра тяжести тела,

α - угол, образованный v_s с осью X,

β_i - " " ρ_i " " "

Имеем:

$$\bar{v}_i = \bar{v}_s + \bar{v}_i^{\tau},$$

или на основании чертежа:

$$v_i^2 = v_s^2 + (v_i^{\tau})^2 + 2 v_s v_i^{\tau} \sin(\beta_i - \alpha) =$$
$$= v_s^2 + \rho_i^2 \omega^2 + 2 v_s \rho_i \omega \sin\beta_i \cos\alpha - 2 v_s \rho_i \omega \cos\beta_i \sin\alpha =$$
$$= v_s^2 + \rho_i^2 \omega^2 + 2 v_s \omega \cos\alpha . y_i - 2 v_s \omega \sin\alpha . x_i$$

На основании полученного выражения кинетическая энергия замещающих точек будет:

$$\sum_n \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_n \frac{m_i v_s^2}{2} + \sum_n \frac{m_i \rho_i^2 \omega^2}{2} + v_s \omega \cos\alpha \sum_n m_i y_i -$$
$$- v_s \omega \sin\alpha \sum_n m_i x_i \qquad (236)$$

На основании уравнений (235) и (236) условие эквивалентности системы замещающих точек твердому телу выразится такими равенствами:

$$\sum_n m_i = m, \qquad (237)$$

$$\sum_n m_i x_i = 0, \qquad (238)$$

$$\sum_n m_i y_i = 0, \qquad (239)$$

$$\sum_n m_i \rho_i^2 = J_s \qquad (240)$$

т.е.: 1) сумма масс замещающих точек должна равняться массе данного тела,

2) центр тяжести замещающих точек должен совпадать с центром тяжести данного тела,

3) момент инерции замещающих точек относительно оси

проходящей через центр тяжести тела и перпендикулярной к плоскости движения, должен равняться моменту инерции данного тела относительно той же оси.
Заметим, что сделанные выводы справедливы лишь для тел, имеющих плоскость симметрии и движущихся параллельно этой плоскости.

Операция замены массы твердого тела эквивалентной системой замещающих точек носит название динамической редукции масс

Если при замене массы твердого тела соблюдены лишь равенства (237), (238) и (239), выражающие равенство масс и совпадение центра тяжести, то операция носит название статической редукции масс.

Положение каждой замещающей точки в плоскости симметрии определяется двумя координатами (начало координат в центре тяжести), что вместе с массой этой точки дает три величины, подлежащие определению. При n замещающих точках таких величин будет $3n$, а уравнений, связывающих эти величины — четыре. Таким образом свободных параметров при динамической редукции будет

$$K_g = 3n - 4 \qquad (244)$$

Рассмотрим случаи двух и трех замещающих точек, наиболее часто применяющихся на практике.

Одна точка может быть только статически замещающей, так как момент инерции ее равен нулю.

Случай двух замещающих точек. Для соблюдения условия совпадения центров тяжести эти точки должны лежать на одной прямой с центром тяжести. Следовательно, одно из ур-ий (238 или 239) обращается в тождество. Остается 3 уравнения, связывающие четыре неизвестных: m_1, m_2, X_1 и X_2 (фиг. 95) таким образом:

$$m_1 + m_2 = m \qquad (242)$$

$$m_1 x_1 - m_2 x_2 = 0 \qquad (243)$$

$$m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 = J_S \qquad (244)$$

Для решения этих уравнений чаще всего задаются одной из координат напр. x_1

На основании ур-ий (242) и (243) имеем:

$$\frac{m_1}{x_2} = \frac{m_2}{x_1} = \frac{m}{x_1 + x_2}$$

Откуда:

$$m_1 = \frac{m x_2}{x_1 + x_2} \qquad (245)$$

и

$$m_2 = \frac{m x_1}{x_1 + x_2} \qquad (246)$$

Подставляя эти значения в ур-ие (244), получим:

$$\frac{m x_2 x_1^2}{x_1 + x_2} + \frac{m x_1 x_2^2}{x_1 + x_2} = m x_1 x_2 = J_S$$

Следовательно

$$x_2 = \frac{J_S}{m x_1} \quad {}^{*)} \qquad (247)$$

После этого уравнения (245) и (246) дадут:

$$m_1 = \frac{J_S m}{x_1^2 m + J_S} \qquad (248)$$

$$m_2 = \frac{m^2 x_1^2}{x_1^2 m + J_S} \qquad (249)$$

При статической редукции мы должны задать положение обоих точек, так как в этом случае мы имеем только два уравнения, связывающих величины m_1, m_2, x_1 и x_2.

При $x_1 = a$ и $x_2 = b$ имеем, на основании уравнений (245) и (246):

---

*) Это равенство показывает, что каждая из замещающих точек по отношению к другой точке является центром качания, если эта другая точка принята за точку подвеса.

$$m_1=\frac{mb}{a+b}$$

$$m_2=\frac{ma}{a+b} \qquad (251)$$

Момент инерции статически замещающих точек относительно оси, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной к плоскости движения:

$$J=m_1a^2+m_2b^2=mab \qquad (252)$$

Следовательно, статическая редукция ведет к ошибке в учете сил инерции, выражающейся парой с моментом

$$M=(J-J_S)_\varepsilon=(mab-J_s)\varepsilon \qquad (253)$$

где ε - угловое ускорение звена в данный момент.

M - называется поправочным моментом.

Часто при динамическом исследовании пользуются статически замещающими точками, вводя поправочный момент, причем если из ур-ия (253) он получается положительным, то его направляют по угловому ускорению звена, в противном случае - против углового ускорения.

<u>Случай трех замещающих точек.</u> Если все эти точки лежат на одной прямой с центром тяжести тела (фиг. 96), то мы будем иметь три уравнения:

$$m_1+m_2+m_3=m, \qquad (254)$$

$$m_1x_1+m_2x_2-m_3x_3=0 \qquad (255)$$

$$m_1x_1^2+m_2x_2^2+m_3x_3^2=J_s \qquad (256)$$

связывающие 6 неизвестных величин.

Для определенного решения необходимо задаться положением всех трех точек. Положим:

$$x_1=0\ ;\ x_2=a\ ;\ x_3=b$$

Тогда уравнения (254), (255) и (256) дадут:

$$m_1=m-\frac{J_s}{ab} \qquad (257)$$

$$m_2 = \frac{J_s}{a(a+b)}, \qquad (258)$$

$$m_3 = \frac{J_s}{b(a+b)}. \qquad (259)$$

Если замещающие точки не лежат на одной прямой (фиг. 97), то мы имеем четыре уравнения:

$$m_1 + m_2 + m_3 = m, \qquad (260)$$

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 - m_3 x_3 = 0, \qquad (261)$$

$$m_1 y_1 - m_2 y_2 + m_3 y_3 = 0, \qquad (262)$$

$$m_1 \rho_1^2 + m_2 \rho_2^2 + m_3 \rho_3^2 = J_s \qquad (263)$$

связывающие 9 неизвестных

Число свободных параметров - пять (по уравнению 241:

$$K_g = 33 - 4 = 5$$

Следовательно, можно: а) либо произвольно выбрать положения двух точек и одну координату третьей точки; б) либо задаться массами двух точек, и тремя какими-либо координатами, в) либо наконец, задаться массой одной точки и четырьмя координатами.

Массами всех трех точек задаваться нельзя, так как, зная две массы, третью определяют по уравнению (260).

После выбора свободных параметров приведенные ур-ия решаются довольно просто.

Определив положения и массы замещающих точек, строят план ускорений, из которого находят ускорения замещающих точек, а затем и силы инерции.

Присоединив эти силы к заданным силам, действующим на звенья механизма, производят кинетостатический анализ механизма методами, изложенными в §§ 23-25.

§ 22. Статика передач

Статика передач занимается определением усилий, действующих на элементы этих передач без учета сил инерции.

Определение этих усилий необходимо при расчете элементов на прочность, на износ и на нагрев.

Из наиболее часто встречающихся в практике передач мы рассмотрим лишь зубчатые и червячные передачи. Статика передач гибкой связью легко может быть разрешена на основании изложенного в § 13 (первая часть).

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КОЛЕСА С ПРЯМЫМИ ЗУБЦАМИ

Пусть мы имеем два зубчатых колеса с внешним зацеплением (фиг. 98). Пусть мощность на валу первого, ведущего, колеса будет N л.с., число оборотов этого колеса n_1 об/м.; число оборотов второго колеса - n_2 об/м.; число зубцов, соответственно, z_1 и z_2; модуль m.

Усилие, действующее по начальной окружности первого колеса,

$$P_{окр.} = \frac{M_{1\,кр}}{r_1}, \tag{264}$$

где

$$M_{1\,кр} = 71620 \frac{N}{n} \text{ кг.см.}$$

а r - радиус начальной окружности первого колеса, равный $\frac{z\,m}{2}$

Следовательно,

$$P_{окр} = \frac{71620\, N \cdot 2}{n_1 z_1 m} \tag{265}$$

Пренебрегаем трением скольжения профилей, т.е. считаем давление зубца ведущего колеса на зубец ведомого направленным по нормали к профилям в точке соприкосновения (для эвольвентных профилей - по линии зацепления).

Из этого допущения вытекает два следствия:

а) Окружное усилие на ведомом колесе равно окружному усилию на ведущем, а крутящий момент на ведомом колесе будет равен

$$M_{2\,кр} = P_{о\,кр}\, r_2 = M_{1\,кр} \cdot \frac{r_2}{r_1}$$

или

$$\frac{M_{2\,кр}}{M_{1\,кр}} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{n_1}{n_2} \tag{266}$$

т.е. крутящие моменты на валах прямо пропорциональны радиусам колес или обратно пропорциональны числам оборотов;

б) Для получения необходимого окружного усилия нормальное давление на зубец должно быть равно

$$\mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}_{окр}}{\cos\varphi} = \frac{M_{1\,кр}}{r_1 \cos\varphi} \qquad (267)$$

Приведя силу P к точке O_2 и разложив ее по горизонтальному и вертикальному направлениям, получим:

Усилие $\mathcal{P}_{окр}$, изгибающее вал $\underline{II}$ в вертикальной плоскости; усилие $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_{окр} \operatorname{tg}\varphi$, изгибающее вал $\underline{II}$ в горизонтальной плоскости.

Такие же усилия, но в противоположном направлении, действуют и на вал $\underline{I}$.

Таким образом, валы $\underline{I}$ и $\underline{II}$, кроме скручивание, соответственно, моментами $M_{1\,кр}$ и $M_{2\,кр}$, подвержены еще изгибу в вертикальной и горизонтальной плоскостях от действия окружного усилия - $\mathcal{P}_{окр}$ и „распирающей" силы $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_{окр} \operatorname{tg}\varphi$.

Цилиндрические колеса со спиральными зубцами

На фиг. 99 схематически представлены два цилиндрических колеса со спиральными зубцами в зацеплении. Ведущее колесо O_1 имеет правую спираль с углом β на делительном цилиндре ведомое колесо O_2 имеет зубцы, расположенные на левой спирали с таким же углом на делительном цилиндре. Вследствие этого валы $\underline{I}$ и $\underline{II}$ будут параллельны.

Если обозначить через r_1 и r_2 радиусы делительных (начальных) цилиндров; z_1 и z_2 - числа зубцов; n_1 и n_2 - числа оборотов; m_s - торцевой модуль, - то между этими величинами будут существовать такие же зависимости, как и для цилиндрических колес с прямыми зубцами:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad и \; 2r_1 = z_1 m_s, \; а \; 2r_2 = z_2 m_s$$

(Торцевые модули у данных колес будут равны, так как равны углы спиралей).

Окружным усилием в этих колесах называют также усилие, отнесенное к окружности перпендикулярного к оси зубчатки сечения начального цилиндра.

Следовательно, если мощность на ведущем колесе задана, то окружное усилие легко определяется по формуле (265):

$$P_{окр} = \frac{71620 . N . 2}{n_1 z_1 m_s} \tag{268}$$

Пренебрегая трением зубцов, мы получим зависимость между крутящими моментами, выраженную ур-ием (266).

Усилия, действующие на зубчатки и валы, легко выражаются через $P_{окр}$ следующим образом:

Пусть в рассматриваемый момент ведущее колесо передает движение боковой частью зубца ab (фиг. 100). Разрежем этот зубец плоскостью mn, перпендикулярной к его оси и проходящей через его середину (отпечаток помещен вверху). В сечении начального цилиндра получим эллипсис. Будем называть его начальным эллипсисом. Давление зубца и ведущего колеса на зубец ведомого колеса будет направлено по нормали к профилю (на отпечатке). Обозначим это давление через P_n и разложим его по двум направлениям: по направлению касательной к начальному эллипсису и по направлению нормали, что совпадает с радиусом колеса.

Величина касательной составляющей определится из формулы:

$$P = P_n \cos \varphi \tag{269}$$

Величина нормальной (радиальной) составляющей

$$P_1 = P_n \sin \varphi = P \operatorname{tg} \varphi \tag{270}$$

Если совместить отпечаток с плоскостью сечения mn, то усилие P пойдет по линии mn, а усилие P_1 — перпендикулярно к плоскости чертежа и, действуя на нас будет стремиться раздвинуть зубчатые колеса. Назовем его „распирающим" усилием.

Разложив усилие P по направлениям, перпендикулярному и параллельному оси колеса, мы получим $P_{окр}$ и P_a. Последнее усилие действует вдоль оси, почему называется осевым или аксиальным.

Зависимость между этими усилиями легко устанавливается из чертежа:

$$P_a = P_{окр}\, tg\beta \qquad (271)$$

Аксиальное усилие будет стремиться сдвинуть ведомую шестерню вниз по фиг. 100 (вправо по фиг. 99).

Так как $P = \frac{P_{окр}}{\cos\beta}$, то величина распирающей силы на основании ур-ия (270) определится так:

$$P_1 = P_{окр}\, \frac{tg\varphi}{\cos\beta}, \qquad (272)$$

где φ - угол зацепления.

Усилия $P_{окр}$, P_a и P_1 передадутся на вал II и кроме скручивания моментом $P_{окр}\cdot r_2$ вызовут изгиб его в двух плоскостях (фиг. 99; силы P_1 и P_a будут изгибать вал II в вертикальной плоскости, а сила $P_{окр}$ - в горизонтальной).

На фигурах 99 и 100 показаны давления на зубец ведомого колеса. По 3 закону Ньютона на ведущую шестерню будут действовать такие же силы, только в обратном направлении.

Уравнение (271) показывает, что с увеличением угла β аксиальное усилие увеличивается и при $\beta = 45°$ становится равным окружному усилию. Для восприятия его нужно ставить на валах упорные подшипники или, если на валу закрепляются две шестерни со спиральными зубцами, располагать их таким образом, чтобы осевые давления взаимно уравновешивались - полностью или в большей части.

В шевронных шестернях осевые давления уравновешены.

Уравнение (272) показывает, что распирающее усилие P_1 в спиральных (и в шевронных) шестернях больше, чем в шестернях с прямыми зубцами при прочих равных условиях.

При этом распирающее усилие также увеличивается с увеличением угла β.

Если $\varphi = 20°$, то распирающее усилие достигает половины окружного усилия при $\beta = 43°20'$, так как

$$P_1 = P_{окр} \frac{tg. 20°}{Cos\, 43°20'} = 0{,}5 P_{окр}$$

Конические колеса с прямыми зубцами

На фиг. 101 представлена схема двух конических колес с прямыми зубцами. I-ое ведущее колесо, вращается по часовой стрелке, если смотреть сверху, II-ое ведомое вращается против часовой стрелке, если смотреть справа. Оси колес пересекаются под прямым углом, т.е. $\alpha_1 + \alpha_2 = 90°$.

При допущении равномерного распределения давления по длине зубца можно считать, что равнодействующая этого давления приложена в точке c - его середине.

Рассечем сцепляющиеся зубцы плоскостью, перпендикулярной к общей образующей начальных конусов и проходящей через точку c. Отпечаток изображен на фиг. 101 (сверху). Давление зубца ведущего колеса на зубец ведомого направлено по нормали к профилям. Обозначим величину его через P_n и разложим по направлению общей касательной к окружностям, проведенным радиусами ρ_1 и ρ_2. (Радиусы ρ_1 и ρ_2, как известно из кинематики механизмов, — длины образующих средних дополнительных конусов - конусов Тредгольда), и по направлению ρ_2.

Первая составляющая, очевидно, будет $P_{окр}$, так как после совмещения отпечатка с плоскостью сечения mn она пойдет перпендикулярно к чертежу на нас и будет вращать колеса II.

Вторая составляющая P_1 при совмещении отпечатка с плоскостью ТП пойдет по прямой CO_2. Разложив ее по направлению оси колеса O_2 и направлению, перпендикулярному к этой оси, получим составляющие Q_2 и Q_1

Из чертежа легко устанавливаются следующие соотношения:

$$P_1 = P_{окр.} \, tg\varphi$$

$$Q_1 = P_1 \sin\alpha_1 = P_{окр.} \, tg\varphi \cdot \sin\alpha_1 \qquad (273)$$

$$Q_2 = P_1 \sin\alpha_2 = P_{окр.} \, tg\varphi \sin\alpha_2 \qquad (274)$$

$P_{окр.}$ определяется здесь обычным способом по формуле

$$P_{окр} = \frac{M_1}{r_{1ср}},$$

где M_1 - крутящий момент на I валу, а

$r_{1ср}$ - средний радиус первого конического колеса.

Усилия $P_{окр}$, Q_1 и Q_2 передаются на вал II и, кроме скручивания его моментом $P_{окр.} r_{2ср}$, вызывают изгиб в двух плоскостях. в плоскости чертежа изгиб вызывают усилия Q_1 и Q_2, в плоскости перпендикулярной чертежу - усилие $P_{окр}$.

Кроме того усилие Q_2 стремится сдвинуть шестерню II вдоль вала. Следовательно, оно вызовет сжимающие усилия в этом валу и необходимость установки детали, воспринимающей это давление (напр., упорный подшипник).

На вал I будут действовать усилия, равные $P_{окр}$, Q_1 и Q_2 и противоположно направленные. Следовательно, здесь аксиальным усилием будет Q_1. Деформация его будет также сложной - кручение, изгиб и сжатие.

(Предполагается, что упорные подшипники на валах установлены со стороны больших оснований начальных конусов, как это чаще всего и встречается в практике)

Червячная передача

На фиг. 102 схематически представлена часть зубчатого венца червячного колеса в зацеплении с червяком.

По наклону зубцов на червячном колесе можно заключить, что червяк имеет правоходовую нарезку. Следовательно, при вращении червяка по часовой стрелке, если смотреть на него слева, червячное колесо будет вращаться против часовой стрелки, как показано на фигуре.

Если не учитывать трения, то давление зубца колеса на зубец червяка, будет направлено по нормали к соприкасающимся профилям. Обозначим его через P_n. Так как боковые поверхности зубцов колеса не перпендикулярны к плоскости чертежа, а представляют собою винтовые поверхности со средним углом наклона к плоскости чертежа, равным β (β угол подъема средней винтовой линии червяка), то нормальное давление P_n не будет лежать в плоскости чертежа, а составляет с ней угол β.

Возьмем систему координатных осей в которых начало совпадает с точкой приложения силы P_n, а ось X-ов направлена параллельно оси червяка, ось Y-ов параллельно оси колеса (перпендикулярно к плоскости чертежа), а ось Z-ов - перпендикулярно к осям колеса и червяка (по кратчайшему расстоянию между ними).

Разложение силы P_n по этим координатным осям представлено на фиг. 103.

Обозначив угол между силой P_n и осью Z через γ, легко найти проекции силы P_n на координатные оси:

$$P_x = P_n \sin\gamma \cos\beta \qquad (275)$$

$$P_y = P_n \sin\gamma \sin\beta \qquad (276)$$

$$P_z = P_n \cos\gamma \qquad (277)$$

Червячная пара представляет собою комплекс винтовой и зубчатой пары. Трением в зубчатой паре (сила трения зубчатой пары будет направлена по касательной к профилям) мы, как и раньше пренебрегаем. Сила трения в винтовой паре будет направлена по касательной к средней винтовой линии червяка, в сторону обратную относительной скорости точки соприкосновения профиля червяка с профилем колеса, т.е. на нас.

А так как касательная к винтовой линии в точке 0 (фиг. 102) лежит в плоскости XOY, то сила трения в винтовой паре F. составляющей на ось Z не даст.

Проекции ее на оси X и Y будут равны (фиг. 103)

$$F_x = F \sin\beta = \mu P_n \sin\beta \qquad (278)$$

$$F_y = F \cos\beta = \mu P_n \cos\beta \qquad (279)$$

Равнодействующая сил, направленных по оси X, будет ни чем иным как окружным усилием на колесе – $P_{окр.к.}$. Равнодействующая сил, направленных по оси Y, будет окружным усилием на червяке – $P_{окр.ч}$. Силу P_z будем называть распирающим усилием.

На основании фиг. 103 и вышенаписанных уравнений имеем

$$P_{окр.к} = P_x - F_x = P_n(\sin\gamma\cos\beta - \mu\sin\beta) \qquad (280)$$

$$P_{окр.ч} = P_y + F_y = P_n(\sin\gamma\sin\beta + \mu\cos\beta) \qquad (281)$$

$$P_z = P_n \cos\gamma \qquad (282)$$

Для определения усилий $P_{окр.к}$, $P_{окр.ч.}$ и P_z нам недостает еще двух уравнений, так как ур-ия (280), (281) и (282) содержат пять неизвестных (кроме искомых усилий еще P_n и γ).

Одно из недостающих уравнений напишем на основании данных для расчета червячной передачи. Чаще всего задается мощность на червяке и числа оборотов червяка и колеса. По этим данным расчетами, приводимыми в курсах деталей машин, определяется диаметр начальной окружности червяка.

Тогда:

$$\mathcal{P}_{окр.\,ч} = \frac{2M_{кр.\,ч}}{d_н} = \frac{71620\,N_ч \cdot 2}{n_ч\,d_н} \qquad (283)$$

где $N_ч$ - мощность на червяке в л.с.,

$n_ч$ - число оборотов в минуту червяка,

$d_н$ - диаметр начальной окружности червяка в см,

Второе недостающее уравнение составим на основании геометрических соотношений, взятых из чертежа (фиг. 103):

$$tg\,\gamma = \frac{AC}{AO} = \frac{AC \cdot AB}{AO \cdot AB} = \frac{AB}{AO} \cdot \frac{AC}{AB} = tg\,(90° - \varphi) \cdot \frac{1}{\cos\beta},$$

или
$$tg\,\gamma = \frac{ctg\,\varphi}{\cos\beta} \qquad (284)$$

Уравнения (280), (281), (282), (283) и (284) будем называть „точными" уравнениями, для определения усилий, действующих в червячной передаче. Будем лишь помнить, что при выводе этих „точных" уравнений мы пренебрегали трением в зубчатой паре.

Последовательность решения этих уравнений такая: Сначала по ур-иям (283) и (284) определяют $\mathcal{P}_{окр\,ч}$ и γ, затем значения их подставляют в ур-ие (281) и определяют $\mathcal{P}_n$ (Угол подъема средней винтовой линии червяка β - определяется при расчете размеров червяка) и наконец, определяют $\mathcal{P}_{окр.\,к}$ и $\mathcal{P}_z$.

При таком расчете вычисления получаются сравнительно громоздкими; поэтому на практике часто пользуются упрощенными формулами, которые легко выводятся на основании следующих соображений.

Угол зацепления часто берется в червячных передачах равным $\varphi = 15°$; тогда из чертежа (фиг. 103) можно заключить, что $\gamma > 75°$ и, следовательно, $\sin\gamma \cong 1$.

После этого уравнения (280) и (281) перепишутся так:

$$\mathcal{P}_{окр.\,к} = \mathcal{P}_n\,(\cos\beta - \mu\sin\beta)$$

и $$P_{окр.\tau} = P_n (\sin\beta + \mu\cos\beta),$$

или, подставляя вместо $\mu = tg\rho = \frac{\sin\rho}{\cos\rho}$

$$P_{окр.к} = P_n (\cos\beta - \frac{\sin\rho}{\cos\rho}\sin\beta) = P_n \frac{\cos(\beta+\rho)}{\cos\rho} \qquad (285)$$

$$P_{окр.\tau} = P_n (\sin\beta + \mu\frac{\sin\rho}{\cos\rho}\cos\rho) = P_n \frac{\sin(\beta+\rho)}{\cos\rho} \qquad (286)$$

Разделив ур-ие (286) на (285), получаем:

$$\frac{P_{окр.\tau}}{P_{окр.к}} = tg(\beta+\rho)$$

или, окончательно:

$$P_{окр.к} = \frac{P_{окр.\tau}}{tg(\beta+\rho)} \qquad (287)$$

Последнее уравнение дает возможность определить $P_{окр\,к}$, не находя P_n и γ

Для более простого определения распирающей силы пренебрежем в уравнении (280) вычитаемым $\mu\sin\beta$, так как оно по сравнению с уменьшаемым $\sin\gamma\cos\beta$ очень мало.

В самом деле: $\gamma > 75°$; угол β в среднем равен $76°$.

Следовательно, $\sin\gamma\cdot\cos\beta \cong 0{,}93$, тогда как $\mu\sin\beta = 0{,}04\cdot0{,}2756 = 0{,}011$.

Таким образом, пренебрегая $\mu\sin\beta$, мы делаем ошибку в среднем, в 1,2%, что вполне допустимо при практических расчетах.

После этого уравнение (280) перепишется так:

$$P_{окр.к} = P_n \sin\gamma\cos\beta \qquad (288)$$

Разделив его на уравнение (282), получим:

$$\frac{P_{окр.к}}{P_z} = \frac{P_n\sin\gamma\cos\beta}{P_n\cos\gamma} = tg\gamma\cos\beta,$$

Откуда:

$$P_z = \frac{P_{окр.к}}{tg\,\delta\,Cos\,\beta},$$

или, на основании уравнения (284):

$$P_z = \frac{P_{окр.к}\,Cos\,\beta}{Ctg\,\varphi\,Cos\,\beta},$$

т.е.

$$P_z = P_{окр.к}\,tg\,\varphi \qquad (289)$$

Уравнения (283), (287) и (289) дают возможность очень просто и с достаточной для практики точностью определять усилия, действующие в червячной передаче.

Подчеркиваем, что на фиг. 102 и 103 показаны усилия действующие на червяк.

Усилия, действующие на червячное колесо, будут равны им и направлены противоположно.

Усилие P_z вызывает в червяке деформацию изгиба.

Усилие $P_{окр\,ч}$, приведенное к оси червяка (фиг. 104), даст пару сил с моментом $P_{окр.ч} \cdot ч_н$, скручивающую червяк, и силу $P_{окр.ч}$, изгибающую червяк в плоскости, перпендикулярной к чертежу.

Усилие $P_{окр.к}$, приведенное к оси червяка, даст пару сил $P_{окр.к.}\,ч_н$, изгибающую червяк в плоскости чертежа, и силу $P_{окр.к}$, сжимающую или растягивающую тело червяка в зависимости от того, с какой стороны находится упорный подшипник.

II. Статическое исследование механизмов с низшими парами

§ 23. Аналитический метод

При статическом исследовании механизмов обычно разрешаются три задачи:

1. Дан механизм и силы действующие на него. Найти силу приложенную к заданной точке и уравновешивающую все заданные силы.
2. Дан механизм и силы, действующие на него. Найти реакции в кинематических парах.
3. Дан механизм и силы действующие на него. Найти усилия в звеньях этого механизма.

Необходимость разрешения поставленных задач очевидна.

Если заданные силы являются движущими силами, то уравновешивающая будет равняться тому сопротивлению, которое машина может преодолеть в данный момент.

Реакции в кинематических парах необходимо знать для расчета размеров шарниров или направляющих. Усилия в звеньях механизма необходимо знать для расчета размеров этих звеньев.

В простейших механизмах эти три задачи разрешаются параллельно, в более сложных случаях они разрешаются разделено.

Аналитический метод и здесь, так же как и при кинематическом исследовании, удобно применять только к простейшим механизмам, как например, кривошипно-шатунным.

На фиг. 105 дан нормальный кривошипно шатунный механизм, на который действует сила P. Найти уравновешивающую, приложенную в точке A и направленную перпендикулярно к кривошипу, реакции в кинематических парах и усилия в звеньях механизмов.

Переносим силу P по линии ее действия в точку B

Раскладываем ее по двум направлениям: по направлению шатуна BA и по перпендикуляру к направляющим ползуна

Подчеркиваем: <u>силу можно раскладывать лишь по тем направлениям, где она может быть воспринята.</u>

Таких направлений, вообще говоря, может быть только три:
1) направление геометрической оси того или иного звена,
2) направление нормали к поверхности соприкосновения звеньев и
3) возможное направление действия силы полезного сопротивления, причем если ведомое звено, к которому прикладывается полезное сопротивленчя, совершает вращательное движение, то направление полезного сопротивления считают перпендикулярным к этому звену.

Обозначив угол поворота кривошипа, отсчитываемый от линии OB по часовой стрелке, через φ, а угол отклонения шатуна BA от линии BO – через β, находим из параллелограмма сил:

$$P_1 = P\,tg\,\beta \tag{290}$$

$$P_2 = \frac{P}{Cos\,\beta}, \tag{291}$$

где β выражается через φ по уравнению

$$Sin\,\beta = \frac{r}{l}\,Sin\,\varphi = \lambda\,Sin\,\varphi \tag{292}$$

P_1 определенное по уравнению (290), есть то усилие, с которым ползун прижимается к параллелям. Сила, равная P_1 и прямо противоположно направленая, будет реакцией направляющих ползуна без учета силы трения.

Из уравнения (290) видно, что давление на направляющие ползуна кривошипно-шатунного механизма, даже при постоянной силе P_1 есть величина переменная, увеличивающаяся с увеличением β.

В дезаксиальном кривошипно-шатунном механизме при смещении оси цилиндра (ползуна) в направлении вращения кривошипа угол β во время рабочего хода поршня будет меньше, чем в нормальном при одинаковых размерах механизмов и равных углах поворота кривошипа. Следовательно, дезаксиальный кривошипно-шатунный механизм будет более благоприятным для износа цилиндра, чем нормальный. (Еще одно преимущество этого механизма перед нормальными, кроме тех, которые отмечены в кинематике механизмов).

P_2, определяемое по ур-ию(291), есть усилие, сжимающее шатун. Оно же будет и реакцией во вращательной паре шатун-ползун, а также и во вращательной паре шатун-кривошип. Это усилие также увеличивается с увеличением β при постоянном P.

Перенося силу P_2 по линии ее действия в точку A и раскладывая по направлению кривошипа AO и перпендикуляра к кривошипу, получим составляющие P_3 и T по величине равные

$$P_3 = P_2 \cos(\varphi+\beta) = \frac{P \cos(\varphi+\beta)}{\cos\beta} \qquad (293)$$

$$T = P_2 \sin(\varphi+\beta) = \frac{P \sin(\varphi+\beta)}{\cos\beta}$$

Усилие P_3 сжимает кривошип, прижимает коренной вал к подшипникам, вызывая равную и прямо противоположно направленную реакцию (без учета трения!). Это и есть реакция во вращательной паре кривошип-стойка.

Усилие T, направленное по перпендикуляру к кривошипу, создает вращающий момент на валу, равный $T \cdot r$, воспринимающийся тем сопротивлением, для преодоления которого предназначена машина.

Усилие T называют тангенциальным усилием.

Очевидно, сила T_1 равная и прямо противоположно направленная тангенциальному усилию T, и будет уравновешивающей силой.

Таким образом путем последовательного разложения заданной силы и перенесения составляющих по линии действия, мы разрешили попутно все три вопроса, поставленные статическим исследованием кривошипно-шатунного механизма.

Построив механизм в масштабе и откладывая заданную силу в выбранном масштабе, мы смогли бы ответы на все поставленные вопросы получить чисто графически. Поэтому такой метод называют непосредственным методом, причем усилия могут определяться либо аналитически, либо графически.

При исследовании кривошипно-шатунного механизма усилия в звеньях его обычно определяются в зависимости от угла поворота кривошипа. Поэтому исключим из уравнений (290) (291), (293) и (294) угол β, выразив усилия P_1, P_2, P_3 и P_4 через функции угла φ.

$$P_1 = P\,tg\beta = P\frac{\lambda\ Sin\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\ Sin^2\varphi}} \tag{295}$$

или, приближенно:

$$P_1 \cong P\lambda\,Sin\,\varphi\left(1+\frac{1}{2}\lambda^2 Sin^2\,\varphi\right) \tag{296}$$

При $\lambda=\frac{1}{4}$ (часто встречается в двигателях внутреннего сгорания и всегда-в паровых машинах) с достаточной для практических расчетов точностью можно принять

$$P_1 \cong P_\lambda\,sin\varphi \tag{297}$$

(т.е. $tg\beta = sin\beta = \lambda\ sin\varphi$).

$$P_2 = \frac{P}{Cos\beta} = \frac{P}{\sqrt{1-\lambda^2\,sin^2\varphi}} \tag{298}$$

или, приближенно:

$$\mathcal{P}_2=\mathcal{P}\left(1+\frac{1}{2}\lambda^2 \sin^2 \varphi\right) \qquad (299)$$

При $\lambda \leq \frac{1}{4}$ можно принять $\mathcal{P}_2 \cong \mathcal{P}$

$$\mathcal{P}_3=\mathcal{P}\,\frac{\cos(\varphi+\beta)}{\cos\beta}=\mathcal{P}\left(\cos\varphi-\sin\varphi\, tg\beta\right)=$$

$$=\mathcal{P}\left(\cos\varphi-\frac{\lambda\sin^2\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}}\right) \qquad (300)$$

или, приближенно:

$$\mathcal{P}_3=\mathcal{P}\left[\cos\varphi-\lambda\sin^2\varphi\left(1+\frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\varphi\right)\right] \qquad (301)$$

При $\lambda \leq \frac{1}{4}$ можно принять

$$\mathcal{P}_3=\mathcal{P}\left(\cos\varphi-\lambda\sin^2\varphi\right) \qquad (302)$$

$$\mathcal{T}=\mathcal{P}\,\frac{\sin(\varphi+\beta)}{\cos\beta}=\mathcal{P}\left(\sin\varphi+\cos\varphi\, tg\beta\right)=$$

$$=\mathcal{P}\left(\sin\varphi+\frac{\lambda\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}}\right) \qquad (303)$$

или, приближенно:

$$\mathcal{T}=\mathcal{P}\left[\sin\varphi+\lambda\sin\varphi\cos\varphi\left(1+\frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\varphi\right)\right] \qquad (304)$$

При $\lambda \leq \frac{1}{4}$ можно принять

$$\mathcal{T}=\mathcal{P}\left(\sin\varphi+\frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi\right) \qquad (305)$$

Последней формулой особенно легко пользоваться для вычисления тангенциальных усилий, так как значение множителя, стоящего в скобках, можно брать из таблиц, где он вычислен для различных λ, через каждые 10° поворота кривошипа *)

Если взять координатные оси и по оси абсцисс отложить углы поворота кривошипа, или, что то же, путь точки A, а на соответствующих ординатах значения $\mathcal{T}$, то получим диаграмму

*) См., напр. Д.И. Костюк, „Кінематика-механізмів", стр. 106.

тангенциальных усилий, -диаграмму (T, S_A).

Эта же диаграмма может служить и диаграммой вращающих моментов на валу О.

Из формулы (305) легко видеть, что даже при постоянной силе P тангенциальное усилие T и вращающий момент $T \cdot r$ будут величинами переменными, обращающимися в нуль при $\varphi = 0$ и при $\varphi = 180°$, т.е. через каждые пол-оборота кривошипа.

Эта весьма важная конструктивная особенность кривошипного механизма, показывающая, что даже при постоянном давлении на поршень элементарная работа $[dL = T \cdot r \cdot d\varphi]$ на валу за угол поворота кривошипа $d\varphi$ будет разной, в зависимости от положения кривошипа.

Так как при вышеприведенном анализе мы пренебрегали трением, то на основании принципа возможных перемещений можно написать

$$P \cdot dS_B = T \cdot dS_A \tag{306}$$

или

$$P \; V_B = T \cdot V_A \tag{307}$$

Из последней формулы получаем:

$$T = P \frac{V_B}{V_A} \cong P \; \frac{r\omega (\sin\varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi)}{r\omega} =$$

$$= P (\sin\varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi), \tag{308}$$

т.е. совершенно иным путем мы получили ту же формулу для вычисления T.

Усилие T в данном случае называют <u>приведенной силой</u> (силу P мы „привели" в точку A).

Приведенной силой механизма к данной точке называется фиктивная сила, действующая по направлению скорости точки приведения, работа которой на рассматриваемом возможном перемещении равна сумме работ всех сил, приложенных к механизму.

Ниже мы покажем более сложные случаи приведения сил.

Не останавливаясь на исследовании иных механизмов аналитическим методом, переходим к другим методам дающим возможность исследовать статику более сложных механизмов.

§24. ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Метод Кеннеди

Исследование статики механизмов методом Кеннеди основано на теореме о трех силах: если три непараллельные силы, приложенные к твердому телу, находятся в равновесии, то они пересекаются в одной точке.

На фиг. 106 схематически изображен механизм парораспределения Джоя. Присоединением к основному кривошипу ОА диады шатун-поршень образован четырехзвенник-кривошипно-шатунный механизм ОАВ.

К кривошипно-шатунному механизму присоединена диада CDO_1, за ней диада EFO_2 и наконец диада ГН.

Таким образом данный механизм состоит из основного кривошипа и четырех диад, т.е. это — десятизвенный механизм первого класса, второго порядка, по классификации Ассура. Будем называть диаду АВ (шатун-ползун) первой группой, диаду CDO_1 - второй группой и т.д. в порядке наслоения.

Согласно указанию Ассура, статическое исследование механизмов нужно начинать с последней группы.

Это указание необходимо принять и при исследовании механизмов методом Кеннеди.

Пусть на ползун Н действует сила Р. Необходимо определить уравновешивающую, приложенную в точке А по направлению, перпендикулярному к кривошипу, реакции в кинематических парах и усилия в звеньях.

Перенесем силу Р в центр шарнира Н и разложим ее по направлению шатуна НГ и нормали к направляющим ползуна.

Силами трения везде будем пренебрегать. Составляющая P_1 и будет равна реакции в кинематической паре ползун-стойка. Составляющая P_2 есть усилие, сжимающее шатун НЈ и равное реакции в кинематической паре шатун-ползун.

На звено ЕЈ действуют три силы: сила P_2, приложенная в точке Ј и направленная по НЈ, реакция звена O_2F, приложенная в центре шарнира F, и реакция звена СД, приложенная в центре шарнира Е.

Если звено имеет только два концевых шарнира и находится лишь под действием реакций в этих шарнирах, то последние направлены по линии центров шарниров (две силы могут находиться в равновесии лишь тогда, когда линии действия их совпадают).

Следовательно, реакция звена O_2F направлена вдоль этого звена.

Продолжив звенья НЈ и O_2F до их взаимного пересечения в точке К, на основании теоремы о трех силах заключаем, что и реакция звена СД должна пройти через точку К. Таким образом, найдено и направление реакции звена СД. Сила P_2, действующая на шарнир Ј, и реакции в шарнирах F и Е находятся в равновесии. Следовательно, силовой треугольник, построенный на P_2 должен сам собою замкнуться. Этот треугольник построен у точки К, причем $P_4 \parallel KE$.

Звено ЕЈ, находясь под действием сил P_2, P_3 и P_4, будет в части FЈ изгибаться и растягиваться, а в части EF – сжиматься. Расчет прочных размеров его не представляет трудностей.

Так как реакция звена O_2F выразилась силой P_3, то по закону Ньютона действие звена $\mathcal{E}\mathcal{F}$ на звено $O_2\mathcal{F}$ выразится равной и прямо противоположной силой. Следовательно, звено $O_2\mathcal{F}$ будет растягиваться силой $P_3' = -P_3$; реакция же шарнира O_2 на звено $O_2\mathcal{F}$ будет геометрически равна P_3.

Переходим к диаде $C\mathcal{D}O_1$

На звено $C\mathcal{D}$ - действуют также три силы: $P_4' = -P_4$ (по закону Ньютона) в точке $\mathcal{E}$ и реакции в шарнирах C и $\mathcal{D}$.

На основании вышеподчеркнутого (стр.47) реакция в шарнире $\mathcal{D}$ направлена по звену $O_1\mathcal{D}$. Продолжив $O_1\mathcal{D}$ и $K\mathcal{E}$ до их взаимного пересечения в точке $\mathcal{L}$, заключаем, что реакция в шарнире C должна пройти через точку $\mathcal{L}$, т.е. она направлена по $C\mathcal{L}$.

По известным величине и направлению одной силы (P_4') и направлениям двух других сил строим замкнутый силовой треугольник (построен сбоку, чтобы не затемнять чертежа), из которого получаем величины реакций в шарнирах C $\mathcal{D}$ соответственно P_6 и P_5

Аналогично со сказанным относительно диады $\mathcal{E}\mathcal{F}O_2$ заключаем: звено $C\mathcal{D}$, находящееся под действием сил P_4' P_5 и P_6, подвергается изгибу, растяжению и сжатию, а звено $O_1\mathcal{D}$ - растяжению силой $P_5 = -P_6$.

Далее переходим к последней диаде - главный шатун - ползун B.

На шатун AB действуют три силы: $P_6' = -P_6$ (по 3-му закону Ньютона) в точке C и реакции в шарнирах A и B.

Так как на ползун B кроме реакции шатуна и направляющей не действуют никакие силы (усилие P в конечном счете уравновешивается усилием, приложенным в точке A), то реакция шатуна (а следовательно, и давление ползуна на шатун) должна быть направлена по перпендикуляру к направляющей ползуна. Продолжение CL пересекается с перпендикуляром к направляющим проведенным через точку B, в точке M.

Следовательно и реакция шарнира A должна пройти через точку M, т.е она направлена по AM.

По известной силе $P_6' \parallel CL$ строим силовой треугольник (построен сбоку), причем $P_7 \parallel BM$ и $P_8 \parallel AM$.

Искомые реакции в шарнире B и поступательной паре равны P_7, реакция в шарнире A равна P_8. На кривошип же действует сила $P_8' = -P_8$.

Раскладывая силу P_8' по направлению кривошипа и направлению, перпендикулярному к кривошипу, получим составляющие P_9 и P_{10}.

Сила P_9 сжимает кривошип, а сила P_{10} стремится повернуть его по направлению часовой стрелки. Для сохранения равновесия к кривошипу необходимо приложить силу $P_{10}' = -P_{10}$. Сила P_{10}' и есть искомая уравновешивающая сила.

Следовательно, на все поставленные вопросы ответы найдены.

В разобраном примере мы взяли простейший случай действия сил: механизм находится под действием лишь двух внешних сил P и уравновешивающей P_{10}'.

Задача не была-бы принципиально труднее, если бы кроме этих сил на каждое из подвижных звеньев действовали заданные внешние силы, так как число неизвестных от этого не увеличилось бы. Например, если бы на звено EF действовала заданная сила P_0 то, геометрически сложив ее с известной силой P_2, мы смогли бы затем применить теорему о трех силах и найти реакции в шарнирах E и F.

Недостатки этого метода:

1. Нельзя найти непосредственно уравновешивающую, не определив усилий, действующих на промежуточные звенья,

2. Точки пересечения двух известных линий действия сил (точки K, L, M) могут выходить за пределы чертежа; тогда определение направления третьей силы является затруднительным;
3. Метод применим лишь к механизмам с двухповодковыми группами, т.е. к механизмам 1го класса, второго порядка по классификации Ассура. Таким образом, он не является общим методом статического исследования механизмов.

Но так как громадное большинство существующих механизмов относится к этому типу механизмов, а метод Кеннеди весьма прост и нагляден, то изучение его целиком оправдывается.

Метод планов сил

Метод Кеннеди обычно относят к методу планов сил. Последний же можно изложить в общем виде для механизмов 1го класса, второго порядка (механизмов с двухповодковыми группами) по классификации Ассура следующим образом.

Пусть диада ABC представляет последнюю группу данного механизма (рис. 107). Равнодействующие P_1 и P_2 усилий, действующих на звенья AB и BC этой диады, даны по величине и по направлению. Необходимо определить величину и направление реакций в шарнирах A, B и C. Так как звенья диады жесткие тела, то величины и направления реакций не зависят от положения точек приложения равнодействующих P_1 и P_2 на линиях их действия.

Возьмем на этих линиях точки D и E. Соединим точку D с точками A и B, а точку E – с точками B и C. Полученные треугольники ABD и CBE считаем фермочками, что также не повлияет ни на величину, ни на направление реакций.

Построим для полученной (сложной) трехшарнирной фермы диаграмму Кремоны (фиг. 108).

Для этого из произвольно выбранной точки „a" проводим вектор ав, геометрически равный вектору силы P_1. На отрезке ав строим треугольник авс, причем ас $\parallel$ AD и вс $\parallel$ BD. Очевидно, отрезок ас в выбранном масштабе будет изображать усилие в стержне AD, а отрезок вс - усилие в стержне BD.

Таким же образом строим силовой треугольник вde, проводя вd $\#$ P_2; de $\parallel$ CE и ве $\parallel$ BE. В этом треугольнике отрезок de в выбранном масштабе изображает усилие в стержне CE, а отрезок ве - усилие в стержне BD.

Переходим к узлу B. Силовой четыреугольник усилий в стержнях BD, AB, BC и BE должен сам собою замкнуться. Усилия в стержнях BD и BE нам известны. Они выражаются, соответственно, векторами св и ве (оба направлены к узлу, стержни сжаты). Проводя через точку с линию cf $\parallel$ AB, а через точку f - линию ef $\parallel$ BC до взаимного их пересечения в точке е получим искомый силовой четыреугольник свеf. В нем отрезок fc выражает в принятом масштабе усилие в стержне AB, а отрезок ef - усилие в стержне BC (оба растянуты).

Равнодействующая усилий в стержнях BD и AB (или BC и BE) - геометрическая сумма векторов fc и cв (или ef и ве) - и будет искомой реакцией в шарнире B, т.е. R_B. Равнодействующая усилий в стержнях AB и AD - геометрическая сумма векторов ас и cf - будет искомой реакцией R_A шарнира A.

Равнодействующая усилии в стержнях CE и CB - геометрическая сумма векторов ed и fe - будет искомой реакцией R_C шарнира C.

Если рассмотренная нами диада присоединена шарнирами A и C к предпоследней группе исследуемого механизма (может быть случай, когда один из шарниров присоединен к основному механизму, или к одной из первых групп; то реакции R_A и R_C, взятые с обратными знаками, присоединяем к заданным силам действующим на предпоследнюю диаду; находим равнодействующие сил, приложенных к каждому звену этой диады в отдельности, и затем аналогичным способом находим реакции в шарнирах этой диады.

Продолжая таким образом исследование, пока не дойдем до основного механизма, мы определим реакции во всех кинематических парах и усилия в звеньях, а также и уравновешивающую в любой точке заданного механизма.

В рассмотренном нами случае диада имела три вращательные пары.

Покажем, как разрешается задача в том случае, когда в состав диады входят поступательные пары.

На фиг. 109 представлена диада, в которой шарнир С заменен поступательной парой.

На фиг. 110 для этой диады построен план сил (диаграмма Кремоны): $ab \# P_1$, $bd \parallel BD$; $cd \parallel AD$; $bc \# P_2$; а также параллельный оси поступательной пары; $ce \perp$ оси поступательной пары: $de \parallel AB$. Отрезок ea в принятом масштабе выражает реакцию в шарнире А; отрезок ce - реакцию направляющих поступательной пары; отрезок be - реакцию в шарнире В.

В качестве примера рассмотрим механизм вертикального двигателя „Дизель-Поляр", схема которого изображена на фиг. 111.

Здесь: звено (8) - стойка; звено (7) - основной кривошип; шатун (6) и поршень (5) образуют первую двухповодковую группу; серьга (4) и коромысло (3) - вторую группу; шатун (2) и поршень компрессора (1) - третью группу.

Даны силы $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ и P_7 - равнодействующие всех сил, приложенных к соответствующим подвижным звеньям механизма.

Необходимо определить реакции во всех кинематических парах и вращающий момент на главном валу двигателя. Условимся в дальнейшем обозначать через R_{mn} силу действия звена m на звено n. Следовательно, противодействие звена n, т.е. действие звена n на звено m, обозначается через R_{nm}.

Исследование начинаем с последней группы, т.е. с диады 1-2.

План сил для этой диады построен, на основании вышесказанного, на фиг. 112-а, для чего из произвольно взятой точки S_1 проведен отрезок $S_1a \# \mathcal{P}_2$, а через концы этого отрезка проведены линии: $ab \parallel \mathcal{F}\mathcal{G}$ и $S_1b \parallel \mathcal{G}E$. Далее: $ac \# \mathcal{P}_1$; $cd \perp ac$ и $bd \parallel E\mathcal{F}$.

Из этого плана находим R_{21}, R_{12} и R_{32}.

Действие звена (2) на звено (3) – R_{23} – будет равно R_{32} по величине, но противоположно ему по направлению.

Прикладываем силу R_{23} в точке E и находим равнодействующую двух известных сил, действующих на звено (3) — заданной силы $\mathcal{P}_3$ и найденной R_{23}.

Для этого переносим их по линиям действий в точку M и складываем по правилу параллелограмма. Получаем равнодействующую $\mathcal{P}_3'$. За точку приложения этой равнодействующей можно выбрать, согласно вышесказанному, любую точку на линии ее действия, отчего реакции не изменятся. Выбираем H' – точку пересечения линии действия силы $\mathcal{P}_3'$ с отрезком HE.

Переходим к исследованию следующей группы: коромысло (3) – серьга (4). Для этой группы построен план сил на фиг. 112-б.

Из произвольно выбранной точки S_2 проведен отрезок $S_2a \# \mathcal{P}_3'$. (Если планы сил строятся отдельно друг от друга, как это выполнено у нас, то масштабы сил можно брать не-одинаковые для всех планов, что иногда представляет значительные удобства), а через концы его проведены $ав \parallel H'D$ и $S_2в \parallel H'O_1$.

Далее проведены: $ac \# P_4$; $cd \parallel CJ$ и $ad \parallel DJ$; затем $de \parallel CD$ и $ве \parallel O_1D$.

Выполненные построения дали нам в принятом масштабе R_{64}, R_{83} и R_{43}. Изменив направление реакции R_{64} мы получим реакцию R_{46}, которую и приложим в точке С.

Переходя к исследованию последней диады – первой группы (шатун-поршень двигателя) – мы видим, что на шатун действуют две силы: заданная P_6 и реакция звена (4) – R_{46}. Находим их равнодействующую, для чего продолжаем их до пересечения в точке N и строим параллелограмм. Полученную равнодействующую обозначим через P_6', и за точку приложения ее возьмем K'.

На фиг. 112-в построен план сил для этой диады. Для этого из точки S_3 проведен отрезок $S_3a \# P_6'$, а через концы его проведены линии $ав \parallel K'B$ и $S_3в \parallel AK'$. Далее проведены: $ac \# P_5$; $cd \perp ac$ и $вd \parallel AB$.

Выполненные построения дали нам в принятом масштабе R_{85}, R_{56} и R_{76}. Очевидно, сила $R_{67} = -R_{76}$ будет выражать действие звена (6) на звено (7). Кроме нее на звено (7) действует еще заданная сила P_7. Перенося их в точку L' – точку пересечения линий действия – и складывая по правилу параллелограмма, получаем равнодействующую P_7'.

Приводим силу P_7' к точке O – оси вращения кривошипа – получаем пару с плечом h и силу P_7' направленную вниз – давление на коренной подшипник (реакция в последней кинематической паре).

Следовательно, искомый момент равен $P_7' \cdot h$ и направлен против часовой стрелки.

Разобранный пример показывает, что метод планов сил дает возможность весьма просто производить статическое исследование механизмов 1-го класса второго порядка. Единственным недостатком его является невозможность непосредственного определения уравновешивающей; уравновешивающая определяется лишь из условия равновесия основного кривошипа, т.е. после определения реакций в кинематических парах всех диад.

Рассматриваемый в следующем параграфе метод дает возможность легко и непосредственно определить уравновешивающую.

§25. Графо-аналитические методы
Метод Жуковского

Метод Жуковского, или, как его называют, кинематический метод основан на теореме Жуковского которую мы и предпошлем разбору механизмов *)

Пусть какой-либо механизм под действием заданных сил $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3 \dots \mathcal{P}_n$ находится в равновесии (фиг. 113). Точки приложения этих сил пусть имеют соответственно скорости $V_1, V_2, V_3 \dots V_n$, составляющие с силами углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n$ отложенные по часовой стрелке от соответствующих сил.

Так как механизм, обычно, представляет собою систему с двухсторонними связями, то, отнеся силы трения к заданным силам, к нему можно применить принцип возможных перемещений, на основании которого можно заключить, что сумма работ сил $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3 \dots \mathcal{P}_n$ на возможных пере-

---

*) Н.Е. Жуковский, „Сведение динамических задач о кинематической цепи к задачам о рычаге". Математический сборник Московск. Математ. О-ва, Изд. Московск. Университета, 1909 г.

мещениях их точек приложения $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \dots \delta_n$ равна нулю (с точностью до безконечно малых второго порядка), т.е

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i \delta_i \cos\alpha_i = 0 \qquad (309)$$

Если возможно малые перемещения совершаются за элемент времени Δt, то, разделив все члены суммы, стоящей в левой части уравнения (309), на Δt и имея в виду, что

$$\frac{\delta_i}{\Delta t} = V_i,$$ получим:

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i V_i \cos\alpha_i = 0 \qquad (310)$$

Следовательно, уравнение (310) выражает условие равновесия механизма.

Примем произвольную точку O за полюс плана скоростей (фиг. 114) и приняв масштаб для скоростей 1мм $-\beta \frac{м}{сек}$, построим план скоростей

На нем:

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= O\bar{a}_1 \cdot \beta \frac{м}{сек} \\ V_2 &= O\bar{a}_2 \cdot \beta \ \text{"} \\ V_n &= O\bar{a}_n \cdot \beta \ \text{"} \end{aligned}\right\} \qquad (311)$$

Примем векторы на плане скоростей за жесткие стержни, соединеные шарнирами, а полюс - за точку опоры Получим решетчатый рычаг, который может вращаться вокруг точки O. Перенесем на этот рычаг (будем называть его в дальнейшем вспомогательным рычагом) в изображения точек приложения все заданные силы, предварительно повернувших на 90° (все в одном направлении), и напишем условием равновесия его

$$\sum_{i=1}^{i=n} M_o P_i = 0, \qquad (312)$$

где $M_o P_i$ - момент силы P_i относительно точки O.

Момент силы P_1 относительно точки O равен

$$P_1 h_1 = P_1 O\bar{a} \cos\alpha_1 = P_1 \frac{V}{\beta} \cos\alpha_1,$$

Аналогично можно выразить моменты и всех остальных сил. Тогда уравнение (312) перепишется так

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i \frac{V_i}{\beta} \cos\alpha_i = 0 \qquad (313)$$

или, вынося $\frac{1}{\beta}$ за знак суммы и сокращая:

$$\sum P_i V_i \cos\alpha_i = 0,$$

Таким образом мы получили, что условие равновесия вспомогательного рычага (рычаг Жуковского) совпадает с условием равновесия механизма.

В этом состоит краткая формулировка теоремы Жуковского.

Подчеркиваем 1) Вспомогательным рычагом называется план скоростей, в котором векторы приняты за жесткие стержни, соединенные шарнирами, а полюс - за точку опоры;

2) План скоростей можно строить в произвольном масштабе, так как последний не входит в уравнение равновесия вспомогательного рычага;

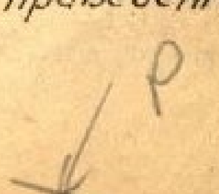
3) При перенесении сил на вспомогательный рычаг можно поворачивать их на 90° в любую сторону — но все в одном направлении;

4) Силы на вспомогательном рычаге прикладываются в изображениях точек приложения;

5) Вместо нормального плана скоростей можно строить повернутый. В этом случае силы на вспомогательный рычаг переносятся параллельно самим себе (не поворачивая)

Теоремой Жуковского очень удобно пользоваться для определения уравновешивающей и приведенной сил. Покажем это на двух разобранных выше примерах.

На кривошипно-шатунный механизм (фиг. 105) действует сила P. Определить уравновешивающую и приведенную силы в точку A методом Жуковского.



Строим повернутый план скоростей Аов и в изображение точки В переносим, не поворачивая, силу Р (фиг. 105). Момент перенесенной силы Р относительно О должен быть равен и по знаку противоположен моменту уравновешивающей $\mathcal{T}_1$, приложенной в изображении точки А (В данном случае изображение точки А на плане скоростей совпадает с самой точкой А) и направленной по линии ее скорости, т.е.

$$P \cdot \bar{o}\bar{b} = \mathcal{T}_1 \cdot \bar{o}\bar{A} \qquad (314)$$

(численное равенство на основании равновесия вспомогательного рычага Аов) Отсюда уравновешивающая

$$\mathcal{T}_1 = P\frac{ob}{OA} = P\frac{\sin(\varphi+\beta)}{\sin(90^\circ-\beta)} = P\frac{\sin(\varphi+\beta)}{\cos\beta}$$

Приведенная сила равна уравновешивающей по величине, но противоположно направлена.

Результат, полученный на основании теоремы Жуковского, совпадает с результатом, полученным выше (уравнение 294) но пришли мы к нему более просто.

Для определения уравновешивающей и приведенной силы для механизма Джая строим нормальный план скоростей (фиг. 106-а) у произвольно выбранного полюса V. В изображение точки Н-точку h-переносим силу P, повернув ее на 90° против часовой стрелки. На вспомогательном рычаге она дает положительный момент, равный $P\,\bar{V}\bar{h}$. Уравновешивающая этот рычаг, приложенная в точке a, должна дать отрицательный момент, численно равный $P \cdot \bar{V}\bar{h}$, т.е.

$$P'_{10} \cdot \bar{V}\bar{a} = P \cdot \bar{V}\bar{h},$$

откуда

$$P'_{10} = P\frac{\bar{V}\bar{h}}{\bar{V}\bar{a}}$$

Переносим полученную силу на механизм, повернув ее на 90° по часовой стрелке. Мы видим, что она совпадает с полученной ранее силой P'_{10}, приложенной в точке А.

Сила, равная уравновешивающей P'_{10} по величине, но противоположно направленная - сила P_{10}, - будет приведенной силой.

Пусть на механизм, изображенный на фиг. 115, действуют силы: P_1 - в точке D, P_2 - в точке E, P_3 - в точке F и P_4 - в точке G. Привести все эти силы в точку A и найти уравновешивающую все эти силы, приложенную в точке A по направлению ее скорости.

Сперва по теореме Жуковского определяем уравновешивающую, для чего у полюса O строим повернутый план скоростей. Находим на плане скоростей изображения точек приложения заданных сил и переносим в них заданные силы параллельно самим себе. Пишем уравнение равновесия вспомогательного рычага, направляя уравновешивающую силу P'_A приложенную в точке A так, чтобы она вращала вспомогательный рычаг по часовой стрелке

$$P_A \cdot OA + P_1 \cdot \overline{ad} - P \cdot h_2 + P_3 \cdot h_3 - P_4 \cdot h_4 = 0$$

Отсюда находим уравновешивающую:

$$P'_A = \frac{-P_1 \cdot \overline{ad} + P_2 h_2 - P_3 h_3 + P_4 h_4}{\overline{O}A} \qquad (315)$$

Если по уравнению (315) получится отрицательное значение для уравновешивающей P'_A, то, следовательно она направлена в противоположную сторону, т.е. вращает вспомогательный рычаг - против часовой стрелки.

Сила $P_A = -P'_A$ будет искомой приведенной силой.

Приведенные примеры достаточно ясно показывают, что первая задача статического исследования механизмов - определение уравновешивающей сил, действующих на механизм (а также определение приведенной силы), разрешается весьма просто для всех механизмов, для которых мы умеем строить планы скоростей.

Переходим к остальным двум задачам статического исследования методом Жуковского.

Пусть нам дан шарнирный четырехзвенник OABO. (фиг. 116), к которому приложены две силы P и Q, причем $P \perp O,B$, а $Q \perp OA$.

Если механизм под действием этих сил находится в равновесии, то по заданной одной из этих сил величина второй определяется на основании теоремы Жуковского по уравнению:

$$Q.\overline{oa} - P.ob = 0,$$

где отрезки oa и ob — векторы, взятые из построенного повернутого плана скоростей boa.

Определим усилия в стержнях вспомогательного рычага. Для этого вырежем сперва узел „b" и построим треугольник сил, действующих в этом узле (построен справа) — треугольник mne.

Из силового треугольника находим вектор ne в выбранном масштабе будет выражать усилие в стержне BA вспомогательного рычага, вектор em - усилие в стержне ab.

Вырезаем далее узел A и строим для него замкнутый силовой треугольник nek, из которого узнаем усилие в стержне OA вспомогательного рычага, выражающееся вектором ke.

Из многоугольника сил, построенного для вырезанного узла вспомогательного рычага переносят силы параллельно самим себе на соответствующие звенья механизма. Если после перенесения сила будет направлена к узлу механизма то данное звено сжато, при направлении от узла механизма - звено растянуто *)

*) Проф. Жуковский дает иное правило для определения знака напряжений в звеньях механизма, а именно: если направления вращений звена и вспомогательного рычага совпадают, то напряжение в звене и в стержне вспомогательного рычага будут одного знака; если направления вращений противоположны, то и знаки напряжений противоположны.

Вспомогательный рычаг в этом случае образован из повернутого плана скоростей.

Пользуясь этим правилом, мы на основании переноса векторов $пв$ и $вт$ на соответствующие звенья механизма, заключаем что звено АВ будет сжато, так как вектор $ав$ направлен к узлу В, а звено $О_1В$ – растянуто, так как вектор $вт$ направлен от узла.

Аналогично, перенося вектор $кв$ из плана $пкв$, построенного для вырезанного узла „а" на звено ОА, мы заключаем, что оно сжато так как вектор $кв$ направлен к узлу А.

Направление вектора $вп$, взятого на том же плане, к узлу А подтверждает сжатие звена АВ.

На фиг. 117 определены усилия в звеньях такого же шарнирного четырехзвенника в другом положении.

Здесь построены силовые треугольники $твп$ для узла „в" и $впк$ для узла „а" вспомогательного рычага.

Перенесением вектора $тп$ на звено $О_1В$ убеждаемся что последнее сжато, так как вектор направлен к узлу В. Звено АВ также сжато, так как вектор $вп$ направлен к узлу В (или вектор $пв$, взятый из плана $кпв$, направлен к узлу А). Направление вектора $кп$ (смотри план $кпв$) от узла А показывает, что звено ОА растянуто.

Непосредственным разложением сил Р и Q действующих на механизм, мы пришли бы к такому же результату. Равнодействующие реакции в шарнирах А и В разобранных механизмов будут соответственно равны Q и Р.

Реакции в шарнирах О и $О_1$ равны соответственно усилиям в звеньях ОА и $О_1В$.

Таким образом, для рассмотренного простейшего механизма и случая загрузки его лишь в сочленениях определение усилий в звеньях и реакций в кинематических парах не представляет трудностей.

Если кроме сил, приложенных в сочленениях на звенья действуют поперечные силы, приложенные где-либо между шарнирами, то (пользуясь законом независимости действия сил и свойством, по которому изображение точки на плане скоростей делит изображение отрезка в таком же отношении, в каком точка делит звено) заключаем, что и в этом случае усилия в стержнях вспомогательного рычага и реакции в сочленениях будут соответственно равны усилиям в звеньях механизма и реакциям в кинематических парах, т.е. изложенный метод и для данного случая загрузки будет применим.

Определение усилий в звеньях и реакций в кинематических парах более сложных механизмов сводится к определению усилий в стержнях и реакций в сочленениях сложных решетчатых рычагов (см на фиг. 106-а вспомогательный рычаг), которые лишь для механизмов с двухповодковыми группами будут статически определимыми, причем решение в основном сводится к применению метода Кеннеди.

Усилия в звеньях механизма (вернее, составляющую, направленную вдоль оси звена), можно определять, рассекая это звено и строя для данного случая план скоростей, приняв заданной скорость вдоль оси разгруженного звена.

Приняв построенный план скоростей за вспомогательный рычаг и применяя теорему Жуковского определяют усилие, действующее вдоль оси разрешенного звена.

Очевидно, практическое применение этого метода для определения усилий в звеньях механизма целесообразно лишь в самых простейших случаях.

Вообще же нужно отметить, что даже для более сложных механизмов 1-го класса 2-го порядка гораздо более удобным в отношении определения усилий в звеньях механизма является метод планов си

Комбинированный метод планов сил и уравнений моментов

Для определения усилий в звеньях сложных механизмов и реакций в их кинематических парах наиболее целесообразным является комбинированный графоаналитический метод. Мы рассмотрим его в применении к механизмам I-го класса, 2-го порядка по классификации Ассура, но легко убедиться, что он удобно применяется и для механизмов высших порядков и классов.

Исследуем различные модификации двухповодковых групп.

Случай а Двухповодковая группа имеет все три пары вращательные. (фиг. 118-а).

Силы $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ - равнодействующие всех известных нам сил, приложенных к поводкам. Необходимо определить реакции в шарнирах R_A, R_C и $R_{12}=-R_{21}$.

Реакции R_A и R_C представляем в виде проекций на два направления, из которых одно идет от внешнего шарнира к внутреннему, а второе получается из первого поворотом на 90° по часовой стрелке. Составляющие реакции, направленные по линии центров шарниров обозначим соответственно через R_A^n и R_C^n, а перпендикулярные к ним - через R_A^t и R_C^t.

Введем еще такое обозначение $M_S\mathcal{P}_K$ - момент силы $\mathcal{P}_K$ относительно точки S.

Так как изображенная двухповодковая группа под действием внешних сил находится в равновесии, то можно написать

$$\bar{R}_A^n+\bar{R}_A^t+\bar{\mathcal{P}}_1+\bar{\mathcal{P}}_2+\bar{R}_C^n+\bar{R}_C^t=0, \qquad (316)$$

т.е геометрическая сумма всех этих сил равна нулю.

Рассматривая же условия равновесия каждого поводка в отдельности, мы напишем два уравнения:

$$M_B \mathcal{P}_1 + M_B R_A^t = 0 \qquad (317)$$

и

$$M_B \mathcal{P}_2 + M_B R_c^t = 0 \qquad (318)$$

Ур-ия (317) и (318) выражают равенство нулю суммы моментов относительно точки В всех сил, действующих на каждый поводок в отдельности. Силы R_A^n, R_c^n, R_{12} и R_{21} в эти уравнения не вошли, так как моменты их относительно точки В равны нулю.

Из уравнения (317) определяем R_A^t, а из (318) - R_c^t.

После этого в векторном уравнении (316) останется лишь два неизвестных по величине вектора R_A^n и R_c^n. Последние определяются построением плана сил (фиг. 118-в).

Из произвольной точки „а" проводим отрезок $aв \# R_A^t$ (R_A^t на плане проведена в противоположную сторону, так как из ур-ия (317) она получается отрицательной).

Через точку „в" проводим отрезок $вc \# \mathcal{P}_1$ и через „с"-отрезок $cd \# \mathcal{P}_2$ и, наконец, через „d"-отрезок $de \# R_c^t$.

Из точки „а" проводим перпендикуляр к ав, а из точки „е" - к de. Точка пересечения этих перпендикуляров f даст отрезки ef и fa, выражающие в принятом масштабе, соответственно, R_c^n и R_A^n. Соединив точку „f" с „d" и „в", мы получим отрезки df и fв, выражающие в принятом масштабе, соответственно, R_c и R_A.

Так как силовой треугольник, составленный из сил $\mathcal{P}_1$, R_A и R_{21} должен сам собою замкнуться, то, очевидно, вектор $R_{21} \# cf$. Следовательно, $R_{12} \# fc$.

Таким образом, все реакции в кинематических парах найдены.

Случай в Двухповодковая группа имеет одну поступательную внешнюю пару (фиг. 119-а).

Реакцию R_A раскладываем по тем же направлениям, как и в случае а). Реакция R_c направлена перпендикулярно к оси tt поступательной пары, но точка приложения ее неизвестна.

Пишем условие равновесия всех сил, действующих на группу в виде векторного уравнения:

$$\bar{R}_A^n + \bar{R}_A^t + \bar{\mathcal{P}}_1 + \bar{\mathcal{P}}_2 + \bar{R}_c = 0 \qquad (319)$$

Так как в это уравнение входят три неизвестных по величине вектора (R_A^n, R_A^t и R_c), то решить его пока нельзя.

На основании условия равновесия сил, действующих на (1) звено, можно написать скалярное уравнение

$$M_B\mathcal{P}_1 + M_B R_A^t = 0, \qquad (320)$$

из которого определится величина R_A^t. Так как при заданном направлении и положении силы $\mathcal{P}_1$ из уравнения (320) получится отрицательное значение R_A^t, то действительное направление будет противоположно показанному на фиг. 119-а.

После этого можно построить план сил выраженный уравнением (319), так же, как и в случае а.)

Из плана сил (фиг. 119-в), в котором $ab \# R_A^t$; $bc \# \mathcal{P}_1$; $cd \# \mathcal{P}_2$; $de \perp dc$ и $ae \perp ab$, получаем $Rc \# de$; $R_A^n \# ea$; $Ra \# eb$; $R_{21} \# ce$ и $R_{12} \# ec$, т.е получаем все реакции в кинематических парах данной диады.

Точку приложения С реакции R_c найдем на основании уравнения

$$M_B\mathcal{P}_2 + M_B R_c = 0 \qquad (321)$$

или

$$M_B\mathcal{P}_2 - R_c h = 0$$

откуда

$$h = \frac{M_B\mathcal{P}_2}{R_c}$$

Проводим через точку B линию, параллельную tt и откладываем на ней отрезок $BK = h$. Из точки K опускаем перпендикуляр на tt. Основание этого перпендикуляра и будет точка приложения R_c.

Заметим, что отрезок BK нужно откладывать в такую сторону, чтобы моменты сил R_C и $\mathcal{P}_2$ относительно точки B были противоположных знаков.

Случай С. Двухповодковая группа имеет одну поступательную внутреннюю пару (фиг. 120-а).

Реакции внешних шарниров выражаем ввиде составляющих, направленных по оси tt поступательной пары - R_A^t и R_C^t - и по перпендикуляру к ней - R_A^n и R_C^n

Из условия равновесия диады имеем

$$\bar{R}_A^n+\bar{R}_A^t+\bar{\mathcal{P}}_1+\bar{\mathcal{P}}_2+\bar{R}_C^n+\bar{R}_C^t=0 \qquad (322)$$

Проектируя на ось tt все силы, действующие на каждый поводок порознь получим два скалярных уравнения

$$R_A^t-\mathcal{P}_1^t=0 \qquad (323)$$

и

$$R_C^t-\mathcal{P}_2^t=0. \qquad (324)$$

где $\mathcal{P}_1^t$ и $\mathcal{P}_2^t$ проекции сил $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ на ось tt поступательной пары.

Из уравнений (323) и (324) определяем R_A^t и R_C^t. Но, подставив их в уравнение (322), мы не сможем найти R_A^n и R_C^n, так как линии действия их совпадут (фиг. 120-в на которой $ab \parallel tt$, $bc \# \mathcal{P}_1$; $cd \# \mathcal{P}_2$ $de \parallel tt$ и $ce \perp tt$;

Из плана сил находим

$$R_A^n+R_C^n=\bar{ea} \qquad (325)$$

и

$$R_{21}-R_A^n=\bar{ac} \qquad (326)$$

Напишем еще условие равновесия сил действующих на диаду в виде равенства нулю суммы моментов всех сил относительно точки С:

$$M_C R_A^n+M_C R_A^t+M_C\mathcal{P}_1+M_C\mathcal{P}_2=0 \qquad (327)$$

Так как плечи всех сил, входящих в уравнение (327), находятся из чертежа то в уравнении будет лишь одно неизвестная величина - R_A^n, которая, следовательно, легко определится. Затем по ур-иям (325) и (326) найдутся реакции R_C^n и R_B.

Отложив от точки „е" в направлении еа отрезок $ef=R_C^n$ и соединяя f с точками b и d, получим:

$$R_A = \overline{fb}\,;\ R_C = \overline{df}\,;\ R_{21} = \overline{cf}\,;\ R_{12} = \overline{fc}$$

Точка приложения B реакции $R_{12} = -R_{21}$ найдется на основании уравнения $M_C R_{12} + M_C \mathcal{P}_2 = 0$, точно так же, как и в предыдущем случае

<u>Случай d</u> Двухповодковая группа имеет две поступательных пары: внутреннюю и внешнюю (фиг. 121-а).

Реакцию вращательной пары выражаем в виде составляющих, направленных по оси tt внутренней поступательной пары - R_A^t и по перпендикуляру к ней - R_A^n. Равенство нулю суммы проекций всех сил, действующих на 1-ое звено, даст скалярное уравнение

$$R_A^t - \mathcal{P}_1^t = 0 \tag{328}$$

Равенство нулю геометрической суммы всех сил, действующих на диаду, даст векторное уравнение:

$$\bar{R}_A^n + \bar{R}_A^t - \bar{\mathcal{P}}_1 + \mathcal{P}_2 + \bar{R}_C = 0 \tag{329}$$

Найдя из ур-ия (328) величину R_A^t мы сможем на основании ур-ия (329) построить план сил, (фиг. 121-в, на которой: $ab \# R_A^t$; $bc \# \mathcal{P}_1$; $cd \# \mathcal{P}_2$; $de \perp tt$ и R_{21} $ae \perp tt$).

Из плана сил находим $R_C = \overline{dc}$, $R_A = \overline{eb}$; $R_{12} = \overline{ec}$ и $R_{21} = \overline{ce}$

Обращаем внимание, что в данном случае реакции в кинематических парах определились чисто графически, что же касается точек приложения реакций $\bar{R}_{12} = -R_{21}$ и R_C, то их придется находить аналитически (как и в случае „в"), взяв сперва сумму моментов всех сил, действующих на звено (1) относительно точки A (найдем точку B - точку приложения реакции R_{12}), а затем взяв сумму моментов всех сил действующих на звено (2) относительно точки B (найдем точку C - точку приложения реакции R_C).

Так как двухповодковая группа с тремя поступательными парами, будучи присоединена к стойке, обладает одной изменяемостью, т.е. не представляет жесткой системы, то рассмотренными случаями исчерпываются все разновидности двухповодковых групп.

На основании изложенного легко произвести статический анализ любого механизма $1^{го}$ класса $2^{го}$ порядка. Исследование необходимо начинать с последней двухповодковой группы и постепенно переходить к основному кривошипу, точно так же, как это мы показали на примере исследования механизма двигателя „Дизель-Поляр" методом планов сил (фиг. 111 и фиг. 112).

III. Основы регулирования хода механизмов

§26. Движение механизма под действием задаваемых сил

Выше (§4) мы уже говорили, что механизм имеет периодическое, или цикловое движение и что в работе его мы различаем три этапа: а) пуск в ход б) установившееся движение и с) выбег.

Во время установившегося движения скорости и ускорения, точек подвижных звеньев (по прошествии времени, равного или кратного периоду движения механизма) приобретают свои первоначальные величины. На протяжении же периода движения скорости и ускорения точек, вообще говоря, изменяются по величине.

Установившееся движение механизма обуславливается равенством работы движущих сил работе сил полезных и вредных обопротивлений за время периода движения.

Сопротивление, преодолеваемое механизмами в течение более или менее продолжительного промежутка времени изменяется по величине. Например нагрузка осветительной сети меняется вследствие включения и выключения ламп, нагрузка силовой сети меняется вследствие включения и выключения отдельных моторов; нагрузка станка (особенно обдирочного) меняется вследствие переменного сечения снимаемой стружки и неоднородности обрабатываемого материала; нагрузка молотилки меняется вследствие неравномерной подачи стеблей в барабан и т.д.

В соответствии с изменением полезного сопротивления меняются и вредные сопротивления. Суммарная работа этих сил за одинаковые промежутки времени будет различной по величине. Если приток движущих сил одинаков, то механизм будет двигаться либо ускоренно (в случае избытка работ движущих сил), либо замедленно (в случае избытка работ сил сопротивления). Установившееся движение нарушится. Для сохранения установившегося движения необходимо, в соответствии с изменением полезных и вредных сопротивлений, менять и приток движущих сил.

Роль эту выполняет регулятор

Регулятор необходим во всех машинах-двигателях как поршневых, так и ротативных.[*)]

Понятие о работе регуляторов мы дадим ниже.

Изменение скоростей точек подвижных звеньев механизма на протяжении периода движения происходит от периодического изменения величины движущей силы, или силы сопротивления, или той и другой вместе. В практике встречаются все три случая. Напр: 1) поршневая машина приводит в

---

*) В поршневых машинах приемник движущих сил (поршень) совершает возвратно-прямолинейное движение. В ротативных машинах приемник движущих сил (ротор) совершает вращательное движение; например, ротор паровой или гидравлической турбины, ротор электромотора.

движение динамомашину, 2) электромотор приводит в движение компрессор и 3) поршневая машина приводит в движение компрессор.

В первом случае мы имеем периодически изменяющуюся движущую силу и постоянное сопротивление (нагрузку сети за время, равное периоду движения механизма, можно считать постоянной).

Во втором случае - постоянна движущая сила, периодически меняется сопротивление.

В третьем случае изменение движущей силы происходит вследствие изменения упругости газов или пара, действующих на поршень (упругость газа или пара измеряется соответствующей ординатой индикаторной диаграммы).

С другой стороны конструкция кривошипно-шатунного механизма не дает возможности получить постоянное тангенциальное усилие на пальце кривошипа, - даже при постоянном давлении на поршень.

Тангенциальное усилие, как это мы установили в § 23 определяется по формуле

$$T = P\frac{\sin(\varphi+\beta)}{\cos\beta} \qquad (294)$$

где P - полное давление газов и пара на поршень,

φ - угол поворота кривошипа,

β - угол отклонения шатуна от среднего положения (оси цилиндра).

По одному и тому же закону с тангенциальным усилием будет меняться и вращающий момент на коренном валу.

На фиг. 122 показана диаграмма изменения тангенциального усилия (вращающего момента) по пути пальца кривошипа (по углу поворота кривошипа), построенная для одноцилиндрового четырехтактного двигателя внутреннего сгорания.

На этой диаграмме сплошной линией показано изменение тангенциального усилия от действия газов на поршень (приведенной к пальцу кривошипа силы давления газов на поршень).

Строится она на основании уравнения (294).

Из этой диаграммы мы видим что за время 1-го такта (всасывание), т.е за время поворота кривошипа от 0° (начало периода) до 180°, тангенциальное усилие (вращающий момент) отрицательно. Следовательно, в это время силы, действующие на поршень являются тормозящими силами, или силами сопротивления.

В начале 2-го такта (сжатие) силы, действующие на поршень, дают положительный эффект вследствие разрежения впереди поршня. Но уже при угле поворота кривошипа, примерно, в 210°, когда упругость газов впереди поршня сделается равной атмосфере, положительный эффект пропадает, и дальше мы опять имеем отрицательное тангенциальное усилие (вследствие сжатия газов впереди поршня) до поворота кривошипа на угол 360°, т.е. до конца 2-го такта. Во время 3-го такта (рабочий такт) мы имеем положительное тангенциальное усилие и, наконец, во время 4 го такта (выхлоп) - снова отрицательное.

Площадки f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, заключенные между разобранной нами кривой и осью абсцисс, выраженные в квадратных миллиметрах, будут выражать в масштабе $1 мм^2 - 6 \cdot \alpha$ кг.м. или $1 мм^2 - m_0 \beta$ кг.м. работу движущих сил за соответствующие промежутки времени.

Разделив алгебраическую сумму этих площадок, т.е. $-f_1+f_2-f_3+f_4-f_5$, на длину отрезка OM, мы получим среднюю ординату y_c, выражающую то постоянное сопротивление, которое может преодолеть двигатель при установившемся движении.

Это сопротивление может быть выражено либо в виде тангенциального же усилия, равного $У_с$ кг, либо в виде сопротивляющегося вращению вала момента, равного $У_с r_0$ кг м.

Проведем линию, параллельную оси абсцис, на расстоянии от нее $У_с$ (пунктирная линия на фиг. 122). Эта линия пересекла кривую изменения тангенциальных усилий в точках „а" и „в", соответствующих углам поворота кривошипа 366° и 528°.

На основании полученного движение механизма под действием приложенных к нему сил (периодически изменяющейся движущей силы и постоянного сопротивления) можно описать так: в начальный момент, соответствующий углу поворота кривошипа 0°, коленчатый вал вращается замедленно, так как в этот момент к валу приложено лишь усилие, сопротивляющееся вращению вала. Замедленное вращение вала будет продолжаться до поворота его на угол 366°. В этот момент приведенная к пальцу движущая сила кривошипа равна сопротивлению, приведенному в эту же точку.

Если бы такое соотношение сил сохранилось, то вал, начиная с этого момента, вращался бы равномерно с приобретенной угловой скоростью. Но при дальнейшем повороте вала от угла в 366° до угла в 528° мы имеем избыток движущих сил. Следовательно, в этом промежутке времени вал будет вращаться ускоренно, причем угловое ускорение до поворота вала, примерно, на угол в 435° будет расти, а дальше - до угла в 528° - убывать, оставаясь все время положительным. В момент, соответствующий точке „в", угловое ускорение вала переменит знак на отрицательный, т.е. вал с этого момента и до конца периода будет двигаться замедленно. Дальше процесс будет повторяться в такой же последовательности.

Таким образом, мы видим, что угловая скорость вращения вала в момент „а" достигает минимального значения (ωmin), а в момент „в" – максимального (ω_{max})

Для того, чтобы вал мог вращаться замедленно, начиная от положения „в" и кончая положением „а", он должен обладать соответствующей инерцией, необходимой для преодоления момента сопротивления на всем этом пути.

Из основного уравнения вращательного движения —

$$M = J\varphi'' - \qquad (330)$$

видно, что для того, чтобы замедление φ'' было не слишком велико (так как в противном случае будет сильное колебание угловой скорости вала или даже вал может остановиться) момент инерции вала необходимо выбирать возможно большим.

Обычно коленчатые валы обладают небольшой массой и небольшим моментом инерции относительно оси вращения, поэтому приходится искусственно увеличивать инерцию вала насаживая на него специальную деталь называемую маховиком.

Ниже мы покажем, как подобрать массу маховика, чтобы колебание угловой скорости вала не выходило из заданных пределов.

Посадка на вал маховиков большого веса вызывает дополнительную нагрузку на коренные подшипники, дополнительные расходы на изготовление, монтаж и проч, а в некоторых случаях (как например, в авиационных двигателях) маховики вообще нежелательны.

Из ур-ия (330) и предыдущих объяснений видно, что при одном и том же колебании угловой скорости коленчатого вала потребуется тем меньший момент инерции его чем меньший момент сопротивления необходимо преодолевать при помощи инерции и чем меньше промежуток времени, на протяжении которого преобладают либо движущие силы, либо силы сопротивления.

Так как момент сопротивления преодолеваемый инерцией вала и маховика, представляет собою разность между моментом движущих сил и моментом сил сопротивления, то естественно стремиться к уменьшению этой разности.

Для этой цели строятся многоцилиндровые двигатели.

На фиг. 123 представлена диаграмма тангенциальных усилий для четырехцилиндрового двигателя. В четырехцилиндровом двигателе распределение устанавливается таким образом, что в любой момент процессы, происходящие в цилиндрах, будут разными: если в одном - рабочий ход, то в другом - сжатие, в третьем - всасывание, в четвертом - выхлоп.

Так как действие газов на поршни передается на один и тот же вал, то в результате крутящие моменты на коленчатом валу будут алгебраически складываться.

Обычно считают, что все цилиндры имеют одинаковую диаграмму тангенциальных усилий (крутящих моментов). Тогда для построения суммарной диаграммы достаточно иметь диаграмму для одного цилиндра. Для поворота кривошипа на каждые 180° суммарная диаграмма получится наложением всех четырех тактов диаграммы, построенной для одного цилиндра.

Из приведенной диаграммы для четырехцилиндрового двигателя мы видим, что момент сил сопротивления который может преодолеть данный двигатель, увеличился в 4 раза $y_c' = 4y_c$. Этот момент должен преодолеваться и инерцией маховика в мертвых положениях, т.е. через каждые 180° поворота кривошипа. На первый взгляд может показаться, что в данном случае понадобится маховик с большим моментом инерции, чем для одноцилиндрового двигателя. Но дело в том, что такое соотношение сил имеет место одно мгновение; разность между моментом сопротивления и моментом движущих сил быстро падает и уже при повороте вала, примерно, на 30° становится равной нулю, а затем мы имеем уже преобладание момента движущих сил.

За такой короткий промежуток времени (примерно, время поворота вала на 90°), даже при значительном угловом ускорении или замедлении, угловая скорость будет изменяться на небольшую величину.

Еще более благоприятная картина получается для шестицилиндрового двигателя.

Суммарную диаграмму для него можно построить делением диаграммы одного цилиндра на шесть равных частей и наложением всех этих шести частей друг на друга.

Такое построение выполнено на фиг. 124.

Из этой диаграммы видно, что построение можно было делать лишь для угла поворота кривошипа на 120°, так как дальше кривая повторяется.

Максимальные разности между моментами сопротивления и моментами движущих сил достигают здесь незначительной величины. Промежутки времени, во время которых действует тот или иной избыточный момент, еще меньше (прямая сопротивлений mn пересекает диаграмму в 12 точках) следовательно, эти промежутки соответствуют, примерно, времени поворота вала на 60°)

Следовательно, в этом случае условия уменьшения колебания угловой скорости коренного вала еще более благоприятны.

Очевидно, при большом увеличении числа цилиндров равномерность вращения коренного вала будет еще большей.

§27. Коэфициент неравномерности хода механизма

Неравномерность хода механизма вредно отражается как на самом механизме, так и на соединенных с ним агрегатах, вызывая дополнительные динамические нагрузки на отдельные детали, ухудшая смазку трущихся поверхностей и т. д.

Кроме того, резкое изменение угловой скорости двигателя, приводящего в движение станки, вредно отзывается на точности работы станков; колебание угловой скорости двигателя, приводящего в движение динамо-машину приводит к миганию электрических лампочек и т. п. Вследствие этого стремятся, по возможности, уменьшить неравномерность вращения коренного вала.

Если обозначить через ω_{max} максимальную угловую скорость вращения коренного вала в пределах периода установившегося движения, через ω_{min} - минимальное значение этой угловой скорости, а через $\omega_{ср.}$ - среднее значение, определяемое на основании равенства:

$$\omega_{ср} = \frac{\pi n}{30}, \qquad (331)$$

где n - число оборотов вала в минуту, - то мы получим отношение

$$\frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{ср}},$$

которое называют коэфициентом неравномерности хода механизма и обозначают его δ

Итак:

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{ср}} \qquad (332)$$

В зависимости от назначения двигателя коэфициент неравномерности может быть выбран из нижеследующей таблицы

Назначение двигателя	Значение КНХ δ
Для прокатных станков	$\frac{1}{10}$ — $\frac{1}{25}$
" прессов	$\frac{1}{6}$ — $\frac{1}{10}$
" лесопильных рам	$\frac{1}{25}$ — $\frac{1}{30}$
" насосов, компрессоров	$\frac{1}{20}$ — $\frac{1}{50}$

для мастерских	$\frac{1}{35}$ - $\frac{1}{40}$
" ткацких станков и бумагоделательных машин	$\frac{1}{40}$ - $\frac{1}{100}$
" прядильных машин	$\frac{1}{60}$ - $\frac{1}{100}$
" автомобилей	$\frac{1}{60}$ - $\frac{1}{100}$
" мукомольных мельниц.	$\frac{1}{50}$ - $\frac{1}{60}$
" динамо постоянного тока	$\frac{1}{100}$ - $\frac{1}{200}$
" динамо переменного тока при независимой работе	$\frac{1}{175}$ - $\frac{1}{200}$
" динамо переменного тока при параллельной работе	$\frac{1}{250}$ - $\frac{1}{300}$

Многоцилиндровые моторы работающие без маховика (авиационные моторы), дают коэфициент неравномерности хода, колеблющийся в пределах от $\frac{1}{100}$ до $\frac{1}{500}$

§28. Расчет маховика методом касательных усилий (Метод Портер-Радингера).

Расчет маховика методом касательных усилий производят в следующем порядке.

а) По заданной (или построенной на основании определенных данных) индикаторной диаграмме строят диаграмму свободных давлений газа (или пара) на поршень.

Под свободным давлением газа (или пара) на поршень разумеется результирующее давление на две стороны поршня. В двигателях внутреннего сгорания на свободную сторону поршня действует атмосферное давление. Следовательно, для получения результирующего (свободного) давления газов нужно от давления газов на дно поршня отнять $1 кг/см^2$ (техническая атмосфера).

Иными словами результирующее давление необходимо отсчитывать не от оси абсцисс, а от атмосферной линии на индикаторной диаграмме.

В паровых машинах двойного действия нужно отнимать от давления на заднюю стенку (по отношению к движению поршня) давление на переднюю стенку.

Полученные давления откладываются на соответствующих ординатах координатных осей, в которых на оси абсцисс отложен развернутый путь поршня, соответствующий периоду движения механизма.

б) Строят диаграмму давлений сил инерций на поршень по развернутому пути поршня.

Для определения давления сил инерции на поршень к массе поршня прибавляют часть массы шатуна, полученную от статического разноса его массы к двум головкам

Величину силы инерции определяют по формуле

$$P_i = -(m_n + m_B) W_B = -m_{усп} r \omega^2 (\cos\varphi + \lambda \cos 2\varphi), \qquad (333)$$

где m_n - масса поршня;

m_B - часть массы шатуна, отнесенная к поршневой головке;

$m_{усп} = m_n + m_B$ - условная масса поступательно движущихся частей;

W_B - ускорение поршня, определяемое по формуле, выведенной в кинематике механизмов:

$$W_B = r\omega^2 (\cos\varphi + \lambda \cos 2\varphi)$$

В последней формуле мы сталкиваемся с коренным противоречием, которое кроется в этом методе: ускорение определяется из условия, что угловая скорость кривошипа постоянна, и на основании этого производится расчет маховика, обеспечивающего лишь определенный коэффициент неравномерности хода.

в) Строят суммарную диаграмму давлений на поршень от газа или пара и сил инерции

г) По последней диаграмме строят диаграмму касательных (тангенциальных) усилий, причем по оси абсцисс откладывают уже развернутый путь пальца кривошипа за период движения механизма.

Касательное (тангенциальное) усилие определяют либо аналитически по вышеприведенной формуле

$$T = P \frac{\sin(\varphi+\beta)}{\cos\beta},$$

либо графически, как это будет указано ниже.

Если двигатель многоцилиндровый то на основании диаграммы касательных усилий, построенной для одного цилиндра, строят еще суммарную диаграмму для всех цилиндров.

д) На координатных осях, на которых построена диаграмма касательных усилий строят диаграмму сопротивлений, относя эти сопротивления к пальцу кривошипа.

На фиг. 124 мы, например, приняли сопротивление постоянным, и диаграмма сил сопротивлений выразилась прямой mn, параллельной оси абсцисс.

На этом заканчивается графическая часть решения поставленной задачи. Дальше идет аналитическая часть

е) Определяют в мм^2 максимальную избыточную площадку, заключенную между диаграммой касательных усилий и диаграммой сопротивлений.

На фиг 122 такой площадкой будет $acв = F_{max}$ (или $amoвa + вKMn = F_{max}$).

На фиг. 123 площадка $aвc = F_{max}$, или равная ей

$$вcd = F_{max}$$

ж) Определяют избыточную работу.

Избыточная площадка в масштабе 1мм^2 - 6Lкг м или 1мм^2 - $m_0 P$ выражает избыточную работу движущих сил (или сил сопротивления). Следовательно, величина ее определится по формуле $\mathcal{L}_{max} = F_{max}\, 6\mathcal{L}$ кг м.

Эта работа даст увеличение (уменьшение) кинетической энергии механизма.

Если пренебречь массой поршня, шатуна и вала по сравнению с массой маховика, то можно считать, что вся эта работа пошла на увеличение (или на уменьшение) кинетической энергии маховика.

Мы можем написать на основании закона живой силы:

$$J\frac{\omega^2_{max} - \omega^2_{min}}{2} = \mathcal{L}_{max}, \qquad (334)$$

где J - момент инерции маховика.

3) Из ур-ия (334) определяют момент инерции маховика по заданному К.Н.Х., сделав допущение (вторая погрешность этого метода!), что

$$\frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2} = \omega_{cp} \qquad (335)$$

На основании уравнений (332) и (335) равенство (334) перепишется так:

$$J\frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}(\omega_{max} - \omega_{min}) = J\omega^2_{cp}\,\delta = \mathcal{L}_{max},$$

откуда

$$J = \frac{\mathcal{L}_{max}}{\omega^2_{cp}\,\delta}$$

или, подставив вместо ω_{cp} его значение по уравнению (331)

$$J = \frac{900\,\mathcal{L}_{max}}{\pi^2 n^2 \delta} \qquad (336)$$

По моменту инерции диаметр и вес маховика конструкторами определяются различно.

Приведем один из вариантов

Обозначив диаметр окружности, описываемой центром тяжести сечения обода маховика, через D, мы можем написать:

$$\frac{G_0}{g} \cdot \frac{D^2}{4} = J,$$

где G_0 – вес маховика приведенный к центру тяжести сечения обода,

откуда $G_0 D^2 = 4gJ$. (337)

Произведение $G_0 D^2$ называют <u>характеристикой маховика</u>, или его <u>маховым моментом</u>.

Уравнение (337) содержит два неизвестных. Для его решения нужно одним неизвестным задаться. Обычно, задаются диаметром D или определяют его, задавшись окружной скоростью.

Для чугунных маховиков окружную скорость принимают

$$V \leq 30 \text{ м/сек}$$

Следовательно, приведенный вес маховика будет:

$$G_0 = \frac{4gJ}{D^2} = \frac{3600 g \mathcal{L}_{max}}{\pi^2 n^2 \delta D^2} \qquad (338)$$

Приняв $\pi^2 \cong g$, последнее уравнение окончательно перепишем так:

$$G_0 = \frac{3600 \cdot \mathcal{L}_{max}}{n^2 \delta D^2} \qquad (339)$$

Действительный вес маховика примерно на 30% больше приведенного.

Это можно объяснить следующим образом:

Вес спиц в существующих маховиках составляет (приблизительно) 1/3 веса обода. Рассматривая спицу как материальную линию, получим момент инерции ее относительно оси, проходящей через конец, равным 1/3 массы ее, помноженной на $\frac{D^2}{4}$.

Следовательно, момент инерции всех спиц относительно оси маховика равен

$$J_1 = \frac{1}{3} \frac{G}{3g} \cdot \frac{D^2}{4},$$

где G – вес обода маховика:

Момент инерции обода маховика:

$$J_2 = \frac{G}{g} \cdot \frac{D^2}{4} \qquad (341)$$

Пренебрегая моментом инерции ступицы, масса которой сосредоточена близко около оси, можно принять

$$J_1 + J_2 = J,$$

или:

$$\left(\frac{G}{9g} + \frac{G}{g}\right)\frac{D^2}{4} = J = \frac{G_0}{g}\frac{D^2}{4}$$

Откуда $G = \frac{9}{10} G_0$, т. е. вес обода составляет 0,9 приведенного веса маховика. Тогда вес спиц будет равным $0{,}3 G_0$.

Если вес ступицы принять равным $0{,}1 G_0$, то получим полный вес маховика равным $1{,}3 G_0$.

IV. Примеры расчета маховика методом касательных усилий

Пример 1-й

Определить момент инерции маховика одноцилиндрового четырехтактного двигателя внутреннего сгорания, работающего по циклу Отто (мгновенное горение).

Дано: диаметр цилиндра $d = 127$ мм,
радиус кривошипа $R = 90$ мм,
длина шатуна $L = 360$ мм,
число оборотов $n = 1700$ мм,
вес шатуна $G_ш = 2{,}5$ кг,
вес поршня $G_п = 2{,}2$ кг,

Расстояние центра тяжести шатуна от центра пальца кривошипа $a = 100$ мм.

Коэффициент неравномерности хода $\delta = \frac{1}{60}$.

Индикаторную диаграмму взять из специальных курсов двигателей внутреннего сгорания для подобного типа двигателей.

Массу шатуна статически разнести к двум головкам шатуна.

Решение. Индикаторную диаграмму берем из книги

Р. Девиллвера[x)], вычертив ее в таком же размере (фиг. 125)

В задании могло быть обусловлено построение индикаторной диаграммы. В таком случае необходимо дополнительно задать степень сжатия, показателей политроп расширения и сжатия, давления всасывания и давления выпуска. Тогда индикаторная диаграмма строится способом Брауэра (см. справочник Hütte, т. I, стр. 586).

Устанавливаем на вычерченной диаграмме масштаб давлений. Так как отрезок, изображающий 30 атм, равняется 60 мм, то, следовательно, 1мм - 0,5кг/см^2.

Через точку О под произвольным углом к оси абсцисс проводим луч ОА на котором откладываем отстояния поршня от крайнего левого положения, соответствующие углам поворота кривошипа через каждые 20°, в масштабе 1:2 (при больших размерах диаграммы и малых размерах кривошипа отстояния откладываются в натуральную величину).

Величину отстояний проще всего определять аналитически, по формуле, выведенной в кинематике механизмов:

$$X=R\left[\left(1+\frac{\lambda}{4}\right)-\left(\cos\varphi+\frac{\lambda}{4}\cos 2\varphi\right)\right],$$

или

$$X=R\,K_s,$$

где значком K_s обозначен многочлен, стоящий в квадратных скобках

Значение K_s для различных λ через каждые 10° угла поворота кривошипа приведены в таблице курса кинематики механизмов.

Для нашего случая имеем:

---

x) Р. Девилльер, Легкие двигатели внутреннего сгорания, т. I, Г.Н.Т.И, 1931 г., стр. 239.

φ°	0°	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	180°
K_S	0,000	0,076	0,280	0,594	0,948	1,295	1,504	1,818	1,954	2,000

Эти отстояния можно определять и графически:

а) способом засечек, изложенным в кинематике механизмов,

б) способами Мюллера, Брикса и др., которые приводятся в специальных курсах.

Точку М, соответствующую крайнему правому положению поршня, соединяем с точкой В, а через промежуточные точки проводим линии, параллельные МВ, до пересечения их с осью абсцисс. Через точки пересечения проводим вертикальные линии пересекающие индикаторную диаграмму в четырех точках.

Отрезки вертикальных линий между атмосферной линией и соответствующей частью индикаторной диаграммы будут выражать (в масштабе 1мм - 0,5кг/см²) давление газов на 1см² поршня.

Так например, отрезок $a_3 b_3$ выражает давление газов на 1см² поршня (отрицательное, так как отрезок находится ниже атмосферной линии) при повороте кривошипа на угол 60° (I-ый такт-всасывание): отрезок $a_3 c_3$ выражает давление газов на 1см² поршня при повороте кривошипа на угол 300° (II-й такт - сжатие), отрезок $a_3 d_3$ выражает давление газов на 1см² поршня при повороте кривошипа на угол 420° (III-й такт - рабочий ход), отрезок $a_3 e_3$ выражает давление газов на 1см² поршня при повороте кривошипа на угол 660° (IV-й такт - выхлоп).

Построение развернутой индикаторной диаграммы

Развернутую индикаторную диаграмму (диаграмму свободных давлений) строим, приняв за ось абсцисс атмосферную линию (фиг. 126 - сплошная линия). По оси абсцисс откладываем четыре раза отрезок ОВ, взятый из фиг. 125 с выполненной разметкой. Через размеченные точки проводим ординаты, на которых и откладываем соответствующие отрезки вертикальных прямых из фигуры 125, отсчитанные от атмосферной линии (напр., отрезки $\bar{a_3}b_3$, $\bar{a_3}c_3$, $\bar{a_3}d_3$ и т. д.).

Для большей ясности чертежа эти отрезки при отложении увеличены вдвое, почему масштаб давлений на развернутой индикаторной диаграмме получился 1мм - 0,25 кг/см^2

Заметим, что некоторые авторы делят отрезок, отложенный по оси абсцисс и выражающий четыре хода поршня, на равные части /в нашем случае на 36 равных частей/. Таким образом получается диаграмма свободных давлений на углу поворота.

При построении диаграммы свободных давлений знак результирующего (свободного) давления мы считали положительным, если это давление направлено к коренному валу; в противном случае - отрицательным.

Многие авторы знак свободного давления выбирают в зависимости от того, помогает ли оно движению или тормозит его. В первом случае берут положительный знак, а во втором отрицательный.

По этому способу построена диаграмма свободных давлений на фиг. 127 (сплошная линия).

Отличается она от предыдущей лишь переменой знаков у ординат второго такта (сжатие) и четвертого такта (выхлоп)

Результаты построений заносим в таблицу /см стр. 91/, причем знаки при ординатах в таблице ставим по первому способу, т. е. согласно фиг. 126.

Построение диаграммы давлений сил инерции.

Массу шатуна, отнесенную к поршневой головке - m_3, определяем (согласно условию) на основании следующих равенств:

$$m_A + m_B = \frac{G_ш}{g} \quad и \quad m_A \cdot a = m_B(\ell - a),$$

или, подставляя данные:

$$m_A + m_B = \frac{2,5}{9,81}; \quad m_A \cdot 0,1 = m_B \cdot 0,260$$

Откуда:

$$m_B = \frac{2,5}{9,81 \cdot 3,6} = 0,071 \frac{кг.сек^2}{м}$$

Масса поршня

$$m_n = \frac{2.2}{9,81} = 0,225 \frac{кг.сек^2}{м}$$

Условная масса поступательно движущихся частей

$$m_{усл} = m_n + m_B = 0,225 + 0,071 = 0,296 \frac{кг.сек^2}{м}$$

Давление сил инерции на $1 см^2$ поршня определяем по формуле:

$$P_i = -\frac{m_{усл}}{\frac{\pi d^2}{4}} W_B = -\frac{m_{усл}}{\frac{\pi d^2}{4}} r\omega^2 (\cos\varphi + \lambda \cos 2\varphi) = -\frac{m_{усл}}{\frac{\pi d^2}{4}} r\omega^2 k_W =$$

$$= -\frac{0,294 \cdot 4 \cdot 0,09 \cdot 3.14^2 \cdot 1700^2}{3.14 \cdot 12,7^2 \quad 30^2} k_W = -6,6 k_W \frac{кг}{см^2}$$

где

$$k_W = (\cos\varphi + \lambda \cos 2\varphi)$$

Результаты подсчетов P_i сведены в ту же таблицу (стр. 91) а в следующем столбце этой таблицы выписаны ординаты диаграммы давлений силы инерции, вычисленные на основании формулы:

$$y_i = \frac{P_i}{0,25} мм,$$

где 0,25 - масштаб диаграммы давлений /$1 мм - 0,25 \frac{кг}{см^2}$/, принятый равным масштабу кривой свободных давлений для возможности построения этих кривых на одних и тех же координатных осях.

На фиг. 127 построена кривая инерционных давлений по второму способу, т.е. знак инерционного давления выбирался в зависимости от того, помогают ли силы инерции движению поршня или же они тормозят это движение.

Из фиг. 126 и фиг 127 видно, что кривая сил инерции состоит из четырех одинаковых ветвей, соответствующих отдельным тактам.

Ветви эти можно построить графическим способом, предложенным

Толле. Способ этот заключается в следующем. Легко показать, что кривую ускорений по перемещению точки B ползуна кривошипно-шатунного механизма (кривую W, S') можно принять за параболу.

В самом деле. Приближенные формулы перемещения и ускорения напишутся так:

$$S = r\left[\left(1+\frac{\lambda}{4}\right)-\left(\cos\varphi+\frac{\lambda}{4}\cos 2\varphi\right)\right]$$

и

$$W = r\omega^2(\cos\varphi+\lambda\cos 2\varphi)$$

Исключаем из этих уравнений угол φ:

$$\cos\varphi+\frac{\lambda}{4}\cos 2\varphi = 1+\frac{\lambda}{4}-\frac{S}{r}$$

$$\cos\varphi+\lambda\cos 2\varphi = \frac{W}{r\omega^2}$$

откуда:

$$\cos 2\varphi = \left(\frac{W}{r\omega^2}-1-\frac{\lambda}{4}+\frac{S}{r}\right)\frac{4}{3\lambda}$$

а

$$\cos\varphi = \frac{1}{3}\left(4+\lambda\cdot\frac{4S}{r}-\frac{W}{r\omega^2}\right)$$

Но

$$\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi-1$$

Следовательно,

$$\left(\frac{W}{r\omega^2}1-\frac{\lambda}{4}+\frac{S}{r}\right)\frac{4}{3\lambda} = \frac{2}{9}\left(4+\lambda-\frac{4S}{r}-\frac{W}{r\omega^2}\right)^2-1, \qquad (342)$$

это и есть уравнение параболы

Найдем координаты точек этой параболы, соответствующих мертвым положениям кривошипно-шатунного механизма.

При $S_1 = 0$ получим:

$$\left(\frac{W}{r\omega^2}-1-\frac{\lambda}{4}\right)\frac{4}{3\lambda} = \frac{2}{9}\left(4+\lambda-\frac{W_1}{r\omega^2}\right)^2-1$$

Откуда:

$$W_1 = r\omega^2(1+\lambda)$$

При $S_2 = 2r$ получим:

$$\left(\frac{W_2}{r\omega^2}-1-\frac{\lambda}{4}+2\right)\frac{4}{3\lambda} = \frac{2}{9}\left(4+\lambda-8-\frac{W_2}{r\omega^2}\right)^2-1$$

Откуда:

$$W_2 = -r\omega^2(1-\lambda)$$

Найдем уравнения касательных, проведенных в крайних точках параболы.

На основании ур-ия (342) имеем:

$$\frac{dW}{dS}=\frac{-16-4\lambda+\frac{16S}{r}+\frac{4W}{r\omega^2}-\frac{3}{\lambda}}{\frac{3}{\lambda}+4+\lambda-\frac{4S}{r}-\frac{W}{r\omega^2}} \qquad (343)$$

Для первой крайней точки при $S_1=0$ и $W_1=r\omega^2(1+\lambda)$ получаем:

$$\left(\frac{dW}{dS}\right)_1=-\omega^2\frac{1+4\lambda}{1+\lambda}$$

Следовательно, уравнение касательной в этой точке будет

$$W=-\omega^2\frac{1+4\lambda}{1+\lambda}S+r\omega^2(1+\lambda) \qquad (344)$$

Для второй крайней точки, при $S_2=2r$ и $W_2=-r\omega^2(1-\lambda)$, уравнение (343) дает:

$$\left(\frac{dW}{dS}\right)_2=\omega^2\frac{1-4\lambda}{1+\lambda},$$

а уравнение касательной в этой точке будет:

$$W=\omega^2\frac{1-4\lambda}{1+\lambda}S-r\omega^2(1-\lambda) \qquad (345)$$

Координаты точки пересечения этих касательных найдем, решая совместно уравнения (344) и (345)

$$W_3=-3\lambda r\omega^2 \qquad (346)$$

$$S_3=r(1+\lambda) \qquad (347)$$

На основании сказанного построение кривой (W,S) производится следующим образом (фиг.128).

Берем отрезок AB, изображающий ход поршня в натуральную величину, или в выбранном масштабе. Из конечных точек восстанавливаем перпендикуляры в разные стороны: из точки A вверх (положительное направление), а из точки B вниз (отрицательное направление). На перпендикуляре AC откладываем отрезок, изображающий в выбранном масштабе $W_1=r\omega^2(1+\lambda)$, а на перпендикуляре BD в том же масштабе - отрезок, изображающий $W_2=r\omega^2(1-\lambda)$. Точки C и D и будут крайними точками искомой параболы.

Отложив отрезок AD, изображающий в масштабе хода поршня

$S_3 = r(1+\lambda)$, и проведя к прямой АВ (вниз) перпендикуляр DE, по длине, выражающий в принятом масштабе $W_3 = 3\lambda r\omega^2$, найдем точку E – точку пересечения касательных к искомой параболе в ее крайних точках C и D.

Парабола строится как огибающая прямых известным способом. Заметим, что точка D совпадает с точкой пересечения прямых АВ и CD, что легко доказать. Очевидно, кривая давлений сил инерции по пути поршня может быть построена совершенно аналогичным способом. В этом случае отрезки АС и ВD откладываются уже в обратные стороны, и длины их вычисляются таким образом, чтобы они выражали в принятом масштабе давлений, соответственно

$$\frac{m_{усл.}}{\frac{\pi a^2}{4}} r\omega^2(1+\lambda) \quad и \quad \frac{m_{усл.}}{\frac{\pi a^2}{4}} r\omega^2(1-\lambda)$$

Построение диаграммы суммарных давлений

На основании построенной диаграммы свободных и инерционных давлений строим диаграмму суммарных давлений, ординаты которой равняются алгебраической сумме соответствующих ординат построенных ранее кривых

На фиг. 126 и фиг. 127 для удобства суммирования ординаты кривой инерционного давления отложены в обратные стороны, т.е. положительные вниз, а отрицательные вверх. Кривые суммарных давлений нанесены штрих-пунктирной линией.

Ординаты суммарных давлений, как и сами давления, вписаны в ту же таблицу *)

Построение диаграммы касательных усилий

Для построения диаграммы касательных усилий необходимо прежде всего определить полное давление на поршень для различных положений кривошипа по формуле

$$P = p \cdot F$$

---

*) См. таблицу на стр. 91.

где $\mathcal{F}$ - площадь поршня заданного двигателя в $см^2$; следовательно

$$\mathcal{F} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi\ 12{,}7^2}{4} = 126{,}68\ см^2$$

Давления эти вычислены и вписаны в колонку 10-ую таблицы 11.

Касательное усилие определяем аналитически по формуле:

$$T = P \frac{\sin(\varphi+\beta)}{\cos\beta} = P \cdot K_{T},$$

где

$$K_{T} = \frac{\sin(\varphi+\beta)}{\cos\beta} \text{ для заданного } \lambda = \frac{r}{\ell}$$

берем из таблиц и вписываем в колонку 11-ую той же таблицы.

Вычисленные касательные усилия вписываем в колонку 12-ую, а ординаты - в колонку 15-ую. При вычислении ординат касательного усилия принят масштаб 1мм - 10кг.

Построение кривой производим обычным способом (фиг. 129).

По оси абсцисс откладываем путь пальца кривошипа за период движения механизма, т.е. $4\pi r = 1131{,}4$ мм $= 1{,}1314$ м.

Примем масштаб пути пальца кривошипа 1мм - 0,005м. Тогда длина отрезка OM, изображающего путь пальца кривошипа за период движения двигателя, будет равна $OM = \frac{1{,}1314}{0{,}005} = 225{,}28$ мм. Разделим отрезок OM на 36 равных частей, через точки деления проведем ординаты и на них отложим соответствующие величины, вписанные в колонку 13-ую.

Соединяя концы ординат плавной линией, получим искомую кривую (T, S_A). Заметим, что при вычислении касательных усилий мы пользовались кривой суммарных давлений, построенной на фиг. 126. Если же пользоваться кривой суммарных давлений, построенной на фиг. 127 то коэффициент K_T нужно брать <u>всегда положительным.</u> В этом случае получится такая же кривая.

Касательные усилия по вычисленным P можно найти графически следующим образом.

ТАБЛИЦА 1

№№ положений	φ°	Орд. св. давл. $y_{св.}$ мм	Свободн. давл. $P_{св.}$ $\frac{кг}{см^2}$	K_w	Инерц. давлен. P_i $\frac{кг}{см}$	Ордин. инерц. давл. y_i мм	Суммарн. ордин. y мм	Суммарн. давлен p $\frac{кг}{см^2}$	$P=p\cdot F$ кг	K_v	Танг. усилие $T=P\cdot K_v$ кг.	Ордин. танг. усил. y' мм
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	0	0	1,250	8,25	- 33	33	-8,25	-1045	0,00	0,00	0
1	20	0,4	- 0,1	1,131	7,48	-29,9	- 30,3	-7,58	- 952	0,422	- 406	- 40,6
2	40	- 0,4	- 0,1	0,810	5,34	- 21,4	- 21,8	-5,44	- 590	0,766	- 452	- 45,2
3	60	- 0,4	-0,1	0,375	- 2,47	- 9,9	- 10,3	-2,57	- 325	0,974	- 316	- 31,6
4	80	- 0,4	-0,1	-0,061	-0,403	1,6	1,2	0,303	38,5	1,028	39,6	3,96
5	100	- 0,4	-0,1	-0,409	2,70	10,8	10,4	2,6	330	0,942	311	31,1
6	120	- 0,4	-0,1	-0,625	4,19	16,5	16,1	4,02	510	0,735	386	38,6
7	140	- 0,4	- 0,1	-0,723	4,78	19,1	18,7	4,68	594	0,520	309	30,9
8	160	- 0,4	-0,1	-0,748	4,94	19,75	19,35	4,84	614	0,252	161	16,1
9	180	- 0,4	-0,1	- 0,75	4,95	19,8	19,4	4,85	615	0,00	0,00	0
10	200	- 0,3	-0,075	-0,748	4,94	19,75	19,45	4,865	617	-0,262	-162	-16,2
11	220	- 0,2	-0,05	-0,723	4,78	19,1	18,9	4,72	600	-0,520	-311	-31,1
12	240	0	0	-0,625	4,12	16,5	16,5	4,12	522	-0,758	-395	-39,5
13	260	0,4	0,1	-0,409	2,70	10,8	11,2	2,8	255	- 0,942	- 241	-24,1
14	280	2	0,5	-0,061	0,403	1,6	3,6	0,903	114,5	- 1,028	-117,5	-11,75

15	300	7	1,75	0,375	2,47	-9,9	-2,9	-0,72	-91,3	-0,974	89	8,9
16	320	15	3,75	0,810	-5,34	-21,4	6,4	-1,59	-202	-0,766	164,5	15,45
17	340	35	8,75	1,131	-7,48	-20,9	5,1	1,27	161	-0,422	-67	-6,7
18	360	93	23,25	1,250	-8,25	-33	60	15	1903	0,00	0 00	0
19	380	126	31,5	1,131	-7,48	-29,9	96,1	24,02	3050	0,422	1278	127,8
20	400	84	21	0,810	-5,34	-21,4	62,6	15,65	1990	0,766	1580	158
21	420	48	12	0,375	-2,47	-9,9	38,1	2,52	1208	0,974	1170	117
22	440	30	7,5	-0,061	0,403	1,6	31,5	1,9	1002	1,028	1030	103
23	460	21	5,25	-0,409	2,70	10,8	31,8	7,95	1008	0,942	952	95,2
24	480	16	4	-0,625	4,12	16,5	32,5	8,125	1090	0,758	730	78,0
25	500	13,6	3,4	-0,723	4,78	19,1	32,7	8,175	1036	0,520	539	539
26	520	10,4	2,6	-0,748	4,94	19,75	31,15	7,79	988	0,262	259	25,9
27	540	8,4	2,1	-0,750	4,95	19,8	28,2	7,05	895	0,00	0,00	0
28	560	4,1	1	-0,748	4,94	19,75	23,75	5,94	756	-0,262	-195	-19,5
29	580	2	0,5	0,723	4,78	19,1	21,1	5,275	618	-0,520	-322	-32,2
30	600	0,8	0,2	-0,625	4,12	16,5	17,3	4,325	548	-0,758	-415	-41,5
31	620	0,4	0,1	-0,409	2,70	10,8	11,2	2,8	355	-0,942	-334	-33,4
32	640	0,4	0 1	-0,061	0,403	1,6	2	0,5	63,3	-1,028	-65,1.	-6,51
33	660	0,4	0,1	-0,375	-2,47	-9,9	-9,5	-2,375	-301	-0,974	293	29,3
34	680	0,4	0,1	0,810	-5,34	-21,4	-21	-5,25	-667	-0,766	510	51
35	700	0,4	0,1	1,131	-7,48	-29,9	-29,5	-7,37	-935	-0,422	394	39,4
36	720	0	0	1,250	-8,25	-33	-33	-8,25	-1045	0,00	0,00	0

Строим кривошипно-шатунный механизм в различных положениях через каждые 20° (на фиг. 130 взяты лишь положения: $\varphi=60°$; $\varphi=320°$ и $\varphi=420°$).

От точки A в направлении продолжения радиуса OA, в случае положительного $\mathcal{P}$ или в направлении AO, в случае отрицательного $\mathcal{P}$, откладываем отрезок AC, изображающий в выбранном масштабе (у нас 1мм - 10кг) давление $\mathcal{P}$.

Через полученную точку проводим вертикаль CD до пересечения с шатуном или его продолжением.

Длина отрезка CD - в том же масштабе - даст нам величину касательного усилия, т.к. из ΔACD имеем:

$$CD = AC\frac{\sin(\varphi+\beta)}{\sin(90°-\beta)} = AC\frac{\sin(\varphi+\beta)}{\cos\beta}$$

Знак касательного усилия при первом способе определения полного давления на поршень (т.е. по фиг. 126) определяется так: отрезку DC дают направление от точки D к точке C, т.е. от шатуна или его продолжения к кривошипу или его продолжению. Если вектор DC направлен вверх, то касательное усилие - положительное. В противном случае - отрицательно.

На фиг. 130 при $\varphi=60°$, DC=31,5мм. /направлен вниз/.
при $\varphi=320°$, DC=15,45 " /направлен вверх/.
при $\varphi=420°$, DC=117 " *) /направлен вверх/.

Следовательно, результаты совпадают с теми, которые получены аналитическим способом.

При втором способе определения полного давления на поршень, т.е. на основании фиг. 127, знак касательного усилия совпадает со знаком $\mathcal{P}$, так как K_v в этом случае, как отмечалось выше, всегда положительно.

---

*) На чертеже масштаб уменьшен в два раза

Построение диаграммы сил сопротивления

Принимаем что за время, равное периоду движения механизма, сопротивление не меняется.

При установившемся движении работа движущих сил за период равна работе сил сопротивлений

Работа движущих сил за период измеряется площадью диаграммы тангенциальных усилий, т.е. равна алгебраической сумме площадей $f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6+f_7+f_8=\sum f$ помноженной на произведение масштабов сил и длин (на $10 \cdot 0{,}005=0{,}05 \frac{кг.м.}{мм^2}$)

Здесь: f_1 = площадь Oab.

f_2 = площадь bcd; и т.д. см. фиг. 129.

Измерение площадей помощью планиметра *) дало следующие результаты

$$f_1 = -750\,мм^2 \qquad f_5 = -45\,мм^2$$
$$f_2 = +800 \text{ "} \qquad f_6 = +4820 \text{ "}$$
$$f_3 = -825 \text{ "} \qquad f_7 = -875 \text{ "}$$
$$f_4 = +150 \text{ "} \qquad f_8 = +850 \text{ "}$$

Следовательно,

$$\sum f = 4125\,мм^2$$

Разделив эту площадь на длину диаграммы, найдем среднюю ординату y_c, выражающую в принятом масштабе то постоянное сопротивление, которое может преодолеть наш двигатель.

Таким образом;
$$y_c = -\frac{4125}{226.88} = 18{,}2\,мм,$$

а среднее сопротивление, отнесенное к пальцу кривошипа, равно $18{,}2 \cdot 10 = 182$ кг.

Прямая AB, проведенная параллельно оси абсцисс (параллельно OS_A на фиг. 129) на расстоянии от нее y_c, будет служить диаграммой сил сопротивлений приведенных к пальцу

---

*) Описание см., напр., у Гютте, т. I, стр. 710, изд. 1936 г.

кривошипа

На основании полученного легко определяется мощность двигателя без учета потерь на трение, а именно $N=\frac{M\omega}{75}$, где M- вращающий момент на валу, равный $182 \cdot 0{,}09=16{,}38$ кгм, а ω - угловая скорость кривошипа=

$$=\frac{\pi n}{30}=\frac{3{,}14 \cdot 1700}{30}\cong 178\ \frac{1}{сек}$$

Подставляя эти значения в формулу мощности, получим:

$$N=\frac{16{,}38 \cdot 178}{75}=39{,}1\ л.с.$$

При отсутствии планиметра площадки $f_1, f_2 \ldots$ можно определить по правилу Симпсона.

Для примера покажем определение с помощью этого правила площадки f_2, вычерченной отдельно на фиг. 131.

Длину отрезка $вd$, равную 32 мм., делим на 5 равных частей, (при больших длинах отрезков их делят на 10 или 20 частей). Из точек деления проводим ординаты y_1, y_2, y_3, y_4. Кроме того, проводим еще ординату y_0 на расстоянии $\frac{1}{4}$ деления от начала отрезка $вd$ и ординату y_0' на расстоянии одной четверти деления от конца отрезка $вd$.

Ординаты y_1, y_2, y_3, y_4 можно рассматривать как средние линии трапеций, высоты которых равны $\frac{вd}{5}$, а ординаты y_0 и y_0' - как средние линии трапеций с высотами $\frac{вd}{10}$. Следовательно, площадь фигуры

$$f_2=\frac{вd}{5}\left(y_1+y_2+y_3+y_4+\frac{y_0+y_0'}{2}\right)$$

Измерение дало:

$y_0=9$ мм $\qquad y_3=32$ мм.

$y_1=29$ " $\qquad y_4=18$ "

$y_2=39$ " $\qquad y_0'=5$

Подставив эти значения в формулу площади, получим:

$$f_2 = \frac{32}{5}\left(29+39+32+18+\frac{9+5}{2}\right) = \frac{32}{5}\ 125 = 800\text{мм}^2,$$

что совпадает с результатом планиметрирования.

Расчет маховика.

Рассматривая фиг. 129, видим, что наибольшая избыточная площадка будет равна площади tnu.

Планиметрированием этой площадки получаем F_{max} = площ. tnu = $=3868$ мм^2

Следовательно, $\mathcal{L}_{max} = 3868 . 10 . 0{,}005 = 193{,}4$ кг. м.

Момент инерции маховика находим по формуле 336:

$$J = \frac{900 . \mathcal{L}_{max}}{\pi^2 n^2 \delta} = \frac{900 . 193.4}{3.14^2\ 1700^2 . \frac{1}{60}} = 0{,}363 \text{ кг.м. сек.}^2$$

ПРИМЕР 2-ой

Определить момент инерции маховика двухтактного тракторного двигателя, имеющего два цилиндра, расположенных вертикально. Схема коленчатого вала с подшипниками дана на фиг. 132, а индикаторная диаграмма - на фиг. 133.

Данные: диаметры цилиндров . . . $D = 170$ мм,
Ход поршня . . . . . . $S = 180$ мм,
длина шатуна . . . . . $\ell = 351$ мм,
расстояние от центра
тяжести шатуна до нижней
(кривошипной) головки . . . . . $a = 120$ мм,
вес шатуна . . . . $G_ш = 15$ кг,
вес поршня . . . . $G_п = 15$ кг,
число оборотов . . . . $n = 700$ об/м,
Коэфициент неравномерности хода . . . . $\delta = \frac{1}{60}$

Массу шатуна статически разнести к двум точкам-головкам шатуна.

Решение Так как индикаторная диаграмма вычерчена у нас так, что длина ее в масштабе 1мм - 0,002м выражает ход поршня (масштаб 1:2), то размечаем длину диаграммы по углу поворота кривошипа и строим развернутую диаграмму свободных давлений (фиг. 134).

На тех же координатных осях строим диаграмму давлений сил инерции и суммарную диаграмму.

На фиг. 135 построена диаграмма касательных усилий для обоих цилиндров отдельно и результирующая диаграмма для двух цилиндров, причем последняя построена лишь для поворота кривошипа на 180°. При повороте на следующие 180° она будет такой же.

Давление сил инерции и касательные усилия определялись аналитически.

Результаты вычислений сведены в нижеследующей таблице (см. табл. 2) [*]

Площадь результирующей диаграммы касательных усилий (на фиг. 135 показана пунктирной линией), определенная помощью планиметра, оказалась равной 6000 мм^2.

Деление ее на длину диаграммы дала среднюю ординату

$$y_c = \frac{6000}{113} = 53{,}2 \text{ мм.}$$

Штрих-пунктирная линия am, проведенная параллельно оси абсцисс на расстоянии 53,2 мм, изображает диаграмму приведенных к пальцу кривошипа сил сопротивлений.

Очевидно величина этого сопротивления равна 532 кг, а мощность двигателя

$$N = \frac{M\omega}{75} = \frac{532 \cdot 0{,}09 \cdot \pi \cdot 700}{75 \cdot 30} = 46{,}6 \text{ л.с.}$$

Измерение избыточных площадок дало такие результаты

площадка Oaв = -175 мм^2

вcd = +675 "

---

[*] Табл. 2 см. на стр. 97.

ТАБЛИЦА 2

№№ п/п	φ° град.	$=1:3,9 =$ K_S	Отстояние S мм	Свободные давл. *) $P_{св}$ $\frac{кг}{см^2}$	$= K_W$	Инерц. давлен. P_1 $\frac{кг}{см^2}$	Суммарное давление $P = \frac{кг}{см^2}$	$\mathcal{P} = p \frac{\pi D^2}{4}$ кг.	K_T	Танг. усилие $T = \mathcal{P} \cdot K_T$ кг.	Суммарное тангенциал. усилие кг.	Ордината сумм. диагр. y мм
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	0,00	0,00	25,5	1,256	-5,6	20	4540	0,00	0,00	0,00	0
1	20	0,075	6,75	18,5	1,736	-1,96	13,54	3010	0,424	1275	1071	107,1
2	40	0,287	25,8	9,5	0,811	-3,56	5,95	1348	0,769	1035	667	66,
3	60	0,596	53,7	5,2	0,372	-1,65	3,55	807	0,977	790	285	28,5
4	80	0,951	85,6	3,3	-0,057	0,293	3,593	815	1,029	836	405	40,
5	100	1,298	116,8	2,8	-0,415	1,815	4,615	1048	0,941	986	754	75,
6	120	1,595	143,7	1,8	-0,628	2,75	4,55	1032	0,755	778	855,5	85,5
7	140	1,819	163,8	1,0	-0.721	3,16	4,16	945	0,516	488	584	58,4
8	160	1,955	176,2	0,3	-0,743	3,25	3,55	807	0,260	210	171,0	17,1
9	180	2,000	180	0,2	-0,744	3,26	3,46	786	0,000	0,00	0,00	0
10	200	1,955	176,2	0,2	-0,743	3,25	3,45	784	-0,260	-204		
11	220	1,819	163,8	0,2	-0,721	3,16	3,36	713	-0,515	-368		

12	240	1,596	143,7	0,2	-0,628	2,75	2,95	670	-0,755	-505		
13	260	1,298	116,8	0,2	-0,415	1,815	2,015	458	-0,941	-431		
14	280	0,951	85,6	0,7	-0,067	0,293	0,993	225	-1,029	-232		
15	300	0,596	53,7	1,3	-0,372	-1,65	-0,36	-79,5	-0,977	77,5		
16	320	0,287	25,8	3,0	0,811	-3,55	-0,55	-124,8	-0,769	96,0		
17	340	0,075	6,75	5,0	1,136	-4,96	0,04	90,8	-0,424	-38,5		
18	360	0,00	0,00	7,0	1,256	-5,5	1,5	340	0,00	0,00		

Отстояние $S = r\left[\left(1+\frac{\lambda}{4}\right) - \left(\cos\varphi + \frac{\lambda}{4}\cos 2\varphi\right)\right] = rK_S$

Масса шатуна, отнесенная к поршневой головке $m_B = \frac{G_ш}{g}\cdot\frac{a}{l} = \frac{15}{9,81}\cdot\frac{120}{351} = 0,522\ \frac{кг.сек^2}{м}$

Условная масса поступательно движущихся частей $m_{усп} = \frac{G_п}{g} + m_B = \frac{15}{9,81} + 0,522 = 2,052\ \frac{кг.сек^2}{м}$

Инерционное давление $P_i = -\frac{m_{усп}}{\frac{\pi D^2}{4}} = W_B = -\frac{m_{усп}}{\frac{\pi D^2}{4}} r\omega^2(\cos\varphi - \lambda\cos 2\varphi) = -\frac{m_{усп}}{\frac{\pi D^2}{4}} r\omega^2 \cdot K_W =$

$$= \frac{2.052.0,09.3,14^2.700^2}{226,98\quad 30^2} K_W = -4,38\ K_W$$

Тангенциальное усилие $T = P\frac{\sin(\varphi+\beta)}{\cos\beta} = P.K_T$

---

*) При определении величины свободного давления принималось, что давление на противоположную стенку поршня равна 1 атм. Для двухтактных двигателей, у которых кривошипная коробка используется для компрессии воздуха, это будет не совсем верно.

площадка $def = -435$ мм^2

$fgh = +685$ "

$hlm = -750$ "

Заметим, что правильность всех измерений подтверждается тем, что сумма избыточных площадок равна нулю.

В моменты, соответствующие положительным площадкам, мы имеем избыток движущих сил. Следовательно, коренной вал будет вращаться ускоренно. В противном случае - замедленно. Колебания угловой скорости будут максимальны при максимальной избыточной площадке. При построении результирующей (для двух цилиндров) диаграммы касательных усилий для второго такта, избыточная площадка hlm увеличилась бы на величину Oab и в сумме с ней дала бы $F_{max} = 925$ мм^2

Избыточная работа

$$\mathcal{L}_{max} = 925 . 10 . 0,0025 = 23,1 \text{ кг.м.}$$

Момент инерции маховика:

$$J = \frac{900 . \mathcal{L}_{max}}{\pi^2 n^2 \delta} = \frac{900 . 23,1}{3,14^2 . 700^2 \frac{1}{60}} = 0,258 \text{ кг.м.сек.}^2$$

Оглавление

Часть II-ая