

Особенности применения кубических тетраэдральных элементов при моделировании методом конечных элементов

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»

Выполнена верификация работоспособности алгоритма построения нерегулярной трехмерной адаптированной сетки на примере задачи потенциального обтекания летательного аппарата. Описана реализация интерполяции кубичным полиномом для потенциала скорости, концепция которого может быть использована при решении задач с реальным газом.

Ключевые слова: адаптированная сетка, тетраэдральный конечный элемент, полином, потенциальное течение, функция формы, функционал.

Наибольший интерес при проектировании летательных аппаратов представляют задачи, связанные с моделированием его трехмерного обтекания. Метод конечных элементов получил широкое применение при решении этих задач и обладает отличительными особенностями, приведенными в работе [2]. В отличие от плоских задач [2, 3] в трехмерных задачах усложняется алгоритм дискретизации расчетной области течения. Для построения расчетной сетки используем алгоритм построения трехмерной адаптированной сетки [4]. Из-за особенностей согласования узлов расчетной сетки в качестве конечного элемента применяем тетраэдральные конечные элементы.

Для интерполяции искомого значения φ внутри тетраэдрального элемента используем кубичный интерполяционный полином, имеющий вид

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \alpha_6 yz + \alpha_7 xz + \alpha_8 x^2 + \alpha_9 y^2 + \alpha_{10} z^2 + \alpha_{11} xyz + \alpha_{12} x^2 y + \alpha_{13} xy^2 + \alpha_{14} y^2 z + \alpha_{15} yz^2 + \alpha_{16} x^2 z + \alpha_{17} xz^2 + \alpha_{18} x^3 + \alpha_{19} y^3 + \alpha_{20} z^3. \quad (1)$$

Для однозначного определения коэффициентов α полинома (1) необходимо, чтобы тетраэдральный элемент имел двадцать узлов [1]. Расположение узлов в кубичном тетраэдре показано на рис. 1.

Используемый интерполяционный полином позволяет получить гладкую аппроксимацию решения для первых производных от искомой функции φ внутри и на границах конечного элемента. В любой точке внутри конечного элемента e значение функции φ можно выразить через значения этой функции Φ в узлах таким образом:

$$\varphi^{(e)} = [N^{(e)}] \cdot \{\Phi\}, \quad (2)$$

где N – функции формы.

Особенности моделирования методом конечных элементов с использованием тетраэдральных конечных элементов рассмотрим на задаче потенциального обтекания летательного аппарата. Для потенциального течения в любой точке должно выполняться дифференциальное уравнение для потенциала скорости φ в таком виде:

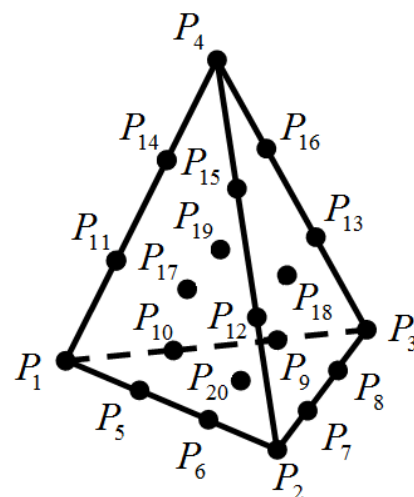


Рис. 1. Схема кубического тетраэдрального элемента

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (3)$$

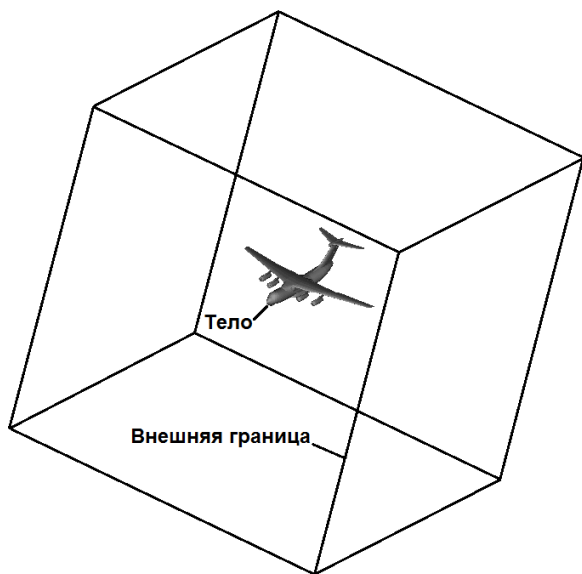


Рис. 2. Расчетная область течения

Для однозначного решения уравнения (3) необходимо задать граничные условия в расчетной области (рис. 2). На поверхности тела должно выполняться условие непротекания

$$V_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot l_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot l_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot l_z = 0,$$

где l_x, l_y, l_z – направляющие косинусы единичной нормали n к поверхности тела.

На внешней границе расчетной области задаются значения проекций вектора скорости \vec{V}_∞

$$V_x = \partial \varphi / \partial x, \quad V_y = \partial \varphi / \partial y, \quad V_z = \partial \varphi / \partial z \quad (4)$$

или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot l_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot l_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot l_z = \vec{V}_\infty \cdot \vec{n},$$

где l_x, l_y, l_z – направляющие косинусы единичной нормали n к поверхности внешней границы расчетной области.

В качестве обтекаемого тела рассмотрен самолет Ил-76Д. На внешней границе значение скорости невозмущенного потока V_∞ принято 100 м/с.

Решение дифференциального уравнения (3) методом конечных элементов с учетом граничных условий сводится к минимизации функционала

$$\chi = \int_V \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \cdot dV + \int_S V_n \cdot \varphi \cdot dS. \quad (5)$$

Функционал (5) можно переписать как

$$\chi = \int_V \frac{1}{2} \cdot \{g\}^T \cdot \{g\} \cdot dV + \int_S V_n \cdot \varphi \cdot dS. \quad (6)$$

Здесь матрица $\{g\}$ имеет вид

$$\{g\}^T = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right].$$

Минимизацию функционала (6) необходимо выполнить в каждом конечном элементе e :

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\Phi\}} = \sum_{e=1}^E \frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{\Phi\}} = 0. \quad (7)$$

Учитывая выражение (2), выражение для матрицы $\{g\}$ можно переписать как

$$\{g^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \partial\varphi^{(e)}/\partial x \\ \partial\varphi^{(e)}/\partial y \\ \partial\varphi^{(e)}/\partial z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial N_1^{(e)}/\partial x & \partial N_2^{(e)}/\partial x & \dots & \partial N_{20}^{(e)}/\partial x \\ \partial N_1^{(e)}/\partial y & \partial N_2^{(e)}/\partial y & \dots & \partial N_{20}^{(e)}/\partial y \\ \partial N_1^{(e)}/\partial z & \partial N_2^{(e)}/\partial z & \dots & \partial N_{20}^{(e)}/\partial z \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \dots \\ \Phi_{20} \end{Bmatrix} = [B^{(e)}] \cdot \{\Phi\}. \quad (8)$$

Используя выражения (2) и (8), соотношение (7) можно записать в виде формулы

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^E \frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{\Phi\}} &= \sum_{e=1}^E \left(\frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \{\Phi\}^T \cdot [B^{(e)}]^T \cdot [B^{(e)}] \cdot \{\Phi\} \cdot dV + \frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \int_{S^{(e)}} V_n \cdot [N^{(e)}] \cdot \{\Phi\} \cdot dS \right) = \\ &= \sum_{e=1}^E \left(\int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T \cdot [B^{(e)}] \cdot \{\Phi\} \cdot dV + \int_{S^{(e)}} V_n \cdot [N^{(e)}]^T \cdot dS \right) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Выражение (9) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых значений $\{\Phi\}$ и в компактной форме имеет вид

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\Phi\}} = [k] \cdot \{\Phi\} - \{f\} = 0, \quad (10)$$

где

$$[k] = \sum_{e=1}^E \left(\int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T \cdot [B^{(e)}] \cdot dV \right), \quad (11)$$

$$\{f\} = - \sum_{e=1}^E \left(\int_{S^{(e)}} V_n \cdot [N^{(e)}]^T \cdot dS \right). \quad (12)$$

Используя естественную систему координат для тетраэдрального элемента, функции формы для каждого узла можно выразить через L-координаты: для углового узла

$$N_1 = 0.5 \cdot (3 \cdot L_1 - 1) \cdot (3 \cdot L_1 - 2) \cdot L_1;$$

для узлов на ребре

$$N_5 = 4.5 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot (3 \cdot L_1 - 1), \quad N_6 = 4.5 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot (3 \cdot L_2 - 1);$$

для узла на грани

$$N_{20} = 27 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_3.$$

Для вычисления производных $\partial N_\beta / \partial x$, $\partial N_\beta / \partial y$ и $\partial N_\beta / \partial z$ необходимо учитывать, что функции формы N_β определяются через L-координаты, которые не являются независимыми. Поэтому, выбирая в качестве независимых координат координаты $\xi(L_1)$, $\eta(L_2)$ и $\zeta(L_3)$, можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial \zeta} &= \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_\beta}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \zeta}. \end{aligned}$$

Данные выражения представим в матричном виде

$$\begin{Bmatrix} \partial N_\beta / \partial \xi \\ \partial N_\beta / \partial \eta \\ \partial N_\beta / \partial \zeta \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \partial N_\beta / \partial x \\ \partial N_\beta / \partial y \\ \partial N_\beta / \partial z \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

Здесь матрица $[J]$ представляет собой якобиан

$$[J] = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi & \partial z / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta & \partial z / \partial \eta \\ \partial x / \partial \zeta & \partial y / \partial \zeta & \partial z / \partial \zeta \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Таким образом, производные от функций формы в декартовой системе координат определяют из выражения

$$\begin{Bmatrix} \partial N_\beta / \partial x \\ \partial N_\beta / \partial y \\ \partial N_\beta / \partial z \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \partial N_\beta / \partial \xi \\ \partial N_\beta / \partial \eta \\ \partial N_\beta / \partial \zeta \end{Bmatrix}. \quad (15)$$

Чтобы учесть зависимую координату L_4 в выражении (15), необходимо выполнить преобразование

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial \xi} = \frac{\partial N_\beta}{\partial L_1} - \frac{\partial N_\beta}{\partial L_4}, \quad \frac{\partial N_\beta}{\partial \eta} = \frac{\partial N_\beta}{\partial L_2} - \frac{\partial N_\beta}{\partial L_4}, \quad \frac{\partial N_\beta}{\partial \zeta} = \frac{\partial N_\beta}{\partial L_3} - \frac{\partial N_\beta}{\partial L_4}. \quad (16)$$

Якобиан в выражении (15) можно вычислить, если заменить в преобразованиях (16) функцию формы N_β на декартовы координаты x, y, z точки, расположенной внутри тетраэдра, а также учесть, что через L-координаты этой точки можно определить ее декартовы координаты из равенств

$$\begin{aligned} x &= X_1 \cdot L_1 + X_2 \cdot L_2 + X_3 \cdot L_3 + X_4 \cdot L_4, \\ y &= Y_1 \cdot L_1 + Y_2 \cdot L_2 + Y_3 \cdot L_3 + Y_4 \cdot L_4, \\ z &= Z_1 \cdot L_1 + Z_2 \cdot L_2 + Z_3 \cdot L_3 + Z_4 \cdot L_4, \end{aligned} \quad (17)$$

где X_i, Y_i, Z_i – декартовы координаты четырех вершин тетраэдра (см. рис. 1).

Подставляя равенства (17) в (16), находят элементы якобиана, которые представлены в табл. 1.

Таблица 1
Элементы якобиана, выраженные через координаты вершин тетраэдра

$\partial x / \partial \xi$	$X_1 - X_4$	$\partial y / \partial \xi$	$Y_1 - Y_4$	$\partial z / \partial \xi$	$Z_1 - Z_4$
$\partial x / \partial \eta$	$X_2 - X_4$	$\partial y / \partial \eta$	$Y_2 - Y_4$	$\partial z / \partial \eta$	$Z_2 - Z_4$
$\partial x / \partial \zeta$	$X_3 - X_4$	$\partial y / \partial \zeta$	$Y_3 - Y_4$	$\partial z / \partial \zeta$	$Z_3 - Z_4$

Используя значения табл. 1 для выражения (15), вычисляют обратную матрицу якобиана $[J]^{-1}$ (табл. 2). В табл. 2 величина rJ является обратным значением определителя матрицы (14) и находится из выражения

$$rJ = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)}.$$

Таблица 2

Элементы обратной матрицы якобиана $[J]^{-1}$

\bar{J}_{11}	$\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) \cdot rJ$	\bar{J}_{12}	$\left(\frac{\partial y}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \zeta}\right) \cdot rJ$	\bar{J}_{13}	$\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi}\right) \cdot rJ$
\bar{J}_{21}	$\left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \zeta}\right) \cdot rJ$	\bar{J}_{22}	$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi}\right) \cdot rJ$	\bar{J}_{23}	$\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) \cdot rJ$
\bar{J}_{31}	$\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta}\right) \cdot rJ$	\bar{J}_{32}	$\left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \zeta}\right) \cdot rJ$	\bar{J}_{33}	$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi}\right) \cdot rJ$

Используя представления функций формы в естественной системе координат и обратную матрицу $[J]^{-1}$, вычисляют из выражения (15) производные функций формы в декартовой системе координат. В табл. 3 приведены значения производных $\partial N_\beta / \partial x$, остальные производные вычисляют таким же образом.

Таблица 3

Выражения для производных функций формы в декартовой системе координат

$\partial N_1 / \partial x$	$\bar{J}_{11} - 9\bar{J}_{11}L_1 + 13.5\bar{J}_{11}L_1^2$
$\partial N_2 / \partial x$	$\bar{J}_{12} - 9\bar{J}_{12}L_2 + 13.5\bar{J}_{12}L_2^2$
$\partial N_3 / \partial x$	$\bar{J}_{13} - 9\bar{J}_{13}L_3 + 13.5\bar{J}_{13}L_3^2$
$\partial N_4 / \partial x$	$-(\bar{J}_{11} + \bar{J}_{12} + \bar{J}_{13}) + 9(\bar{J}_{11} + \bar{J}_{12} + \bar{J}_{13})L_4 - 13.5(\bar{J}_{11} + \bar{J}_{12} + \bar{J}_{13})L_4^2$
$\partial N_5 / \partial x$	$-4.5\bar{J}_{12}L_1 - 4.5\bar{J}_{11}L_2 + 27\bar{J}_{11}L_1L_2 + 13.5\bar{J}_{12}L_1^2$
$\partial N_6 / \partial x$	$-4.5\bar{J}_{12}L_1 - 4.5\bar{J}_{11}L_2 + 27\bar{J}_{12}L_1L_2 + 13.5\bar{J}_{11}L_2^2$
$\partial N_7 / \partial x$	$-4.5\bar{J}_{13}L_2 - 4.5\bar{J}_{12}L_3 + 27\bar{J}_{12}L_2L_3 + 13.5\bar{J}_{13}L_2^2$
$\partial N_8 / \partial x$	$-4.5\bar{J}_{13}L_2 - 4.5\bar{J}_{12}L_3 + 27\bar{J}_{13}L_2L_3 + 13.5\bar{J}_{12}L_3^2$
$\partial N_9 / \partial x$	$-4.5\bar{J}_{13}L_1 - 4.5\bar{J}_{11}L_3 + 27\bar{J}_{13}L_1L_3 + 13.5\bar{J}_{11}L_3^2$
$\partial N_{10} / \partial x$	$-4.5\bar{J}_{13}L_1 - 4.5\bar{J}_{11}L_3 + 27\bar{J}_{11}L_1L_3 + 13.5\bar{J}_{13}L_1^2$
$\partial N_{11} / \partial x$	$4.5(\bar{J}_{11} + \bar{J}_{12} + \bar{J}_{13})L_1 - 4.5\bar{J}_{11}L_4 + 27\bar{J}_{11}L_1L_4 - 13.5(\bar{J}_{11} + \bar{J}_{12} + \bar{J}_{13})L_1^2$
$\partial N_{12} / \partial x$	$4.5(\bar{J}_{11} + \bar{J}_{12} + \bar{J}_{13})L_2 - 4.5\bar{J}_{12}L_4 + 27\bar{J}_{12}L_2L_4 - 13.5(\bar{J}_{11} + \bar{J}_{12} + \bar{J}_{13})L_2^2$
$\partial N_{13} / \partial x$	$4.5(\bar{J}_{11} + \bar{J}_{12} + \bar{J}_{13})L_3 - 4.5\bar{J}_{13}L_4 + 27\bar{J}_{13}L_3L_4 - 13.5(\bar{J}_{11} + \bar{J}_{12} + \bar{J}_{13})L_3^2$
$\partial N_{14} / \partial x$	$4.5(\bar{J}_{11} + \bar{J}_{12} + \bar{J}_{13})L_1 - 4.5\bar{J}_{11}L_4 - 27(\bar{J}_{11} + \bar{J}_{12} + \bar{J}_{13})L_1L_4 + 13.5\bar{J}_{11}L_4^2$
$\partial N_{15} / \partial x$	$4.5(\bar{J}_{11} + \bar{J}_{12} + \bar{J}_{13})L_2 - 4.5\bar{J}_{12}L_4 - 27(\bar{J}_{11} + \bar{J}_{12} + \bar{J}_{13})L_2L_4 + 13.5\bar{J}_{12}L_4^2$
$\partial N_{16} / \partial x$	$4.5(\bar{J}_{11} + \bar{J}_{12} + \bar{J}_{13})L_3 - 4.5\bar{J}_{13}L_4 - 27(\bar{J}_{11} + \bar{J}_{12} + \bar{J}_{13})L_3L_4 + 13.5\bar{J}_{13}L_4^2$
$\partial N_{17} / \partial x$	$-27(\bar{J}_{11} + \bar{J}_{12} + \bar{J}_{13})L_1L_2 + 27\bar{J}_{12}L_1L_4 + 27\bar{J}_{11}L_2L_4$
$\partial N_{18} / \partial x$	$-27(\bar{J}_{11} + \bar{J}_{12} + \bar{J}_{13})L_2L_3 + 27\bar{J}_{13}L_2L_4 + 27\bar{J}_{12}L_3L_4$
$\partial N_{19} / \partial x$	$-27(\bar{J}_{11} + \bar{J}_{12} + \bar{J}_{13})L_1L_3 + 27\bar{J}_{13}L_1L_4 + 27\bar{J}_{11}L_3L_4$
$\partial N_{20} / \partial x$	$27\bar{J}_{13}L_1L_2 + 27\bar{J}_{12}L_1L_3 + 27\bar{J}_{11}L_2L_3$

Каждый элемент результирующей матрицы $[B^{(e)}]^T \cdot [B^{(e)}]$ в выражении (11) имеет вид полинома

$$P_{\pi} = A + B(L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + C(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + L_4^2) + D(L_1L_2 + L_1L_3 + L_1L_4 + L_2L_3 + L_2L_4 + L_3L_4) + E(L_1^3 + L_2^3 + L_3^3 + L_4^3) + F(L_1^2L_2 + L_1^2L_3 + L_1^2L_4 + L_2^2L_1 + L_2^2L_3 + L_2^2L_4 + L_3^2L_1 + L_3^2L_2 + L_3^2L_4 + L_4^2L_1 + L_4^2L_2 + L_4^2L_3) + G(L_1L_2L_3 + L_1L_2L_4 + L_1L_3L_4 + L_2L_3L_4) + H(L_1^4 + L_2^4 + L_3^4 + L_4^4) + I(L_1^3L_2 + L_1^3L_3 + L_1^3L_4 + L_1L_2^3 + L_1L_3^3 + L_1L_4^3 + L_2L_3^3 + L_2L_4^3 + L_3L_4^3) + J(L_1^2L_2L_3 + L_1^2L_2L_4 + L_1^2L_3L_4 + L_1L_2^2L_3 + L_1L_2^2L_4 + L_2L_3^2L_4 + L_1L_2L_3^2 + L_1L_3L_4^2 + L_2L_3L_4^2) + K(L_1^2L_2^2 + L_1^2L_3^2 + L_1^2L_4^2 + L_2^2L_3^2 + L_2^2L_4^2 + L_3^2L_4^2) + LL_1L_2L_3L_4, \quad (18)$$

где A, B, \dots, L – коэффициенты полинома, имеющие вид чисел.

Для интегрирования полинома (18) внутри объема конечного элемента V из выражения (11) используем формулу

$$\int_V L_1^a \cdot L_2^b \cdot L_3^c \cdot L_4^d \cdot dV = \frac{a!b!c!d!}{(a+b+c+d+3)!} \cdot 6 \cdot V, \quad (19)$$

где a, b, c, d – показатель степени.

Результаты интегрирования полинома (18) с использованием формулы (19) представлены в табл. 4.

Таблица 4

Результаты интегрирования по объему тетраэдра

Интеграл	Результат
$\int_V AdV$	$A \cdot V$
$\int_V B(L_1 + L_2 + L_3 + L_4) dV$	$\frac{1}{4} \cdot B \cdot V$
$\int_V C(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + L_4^2) dV$	$\frac{1}{10} \cdot C \cdot V$
$\int_V D(L_1L_2 + L_1L_3 + L_1L_4 + L_2L_3 + L_2L_4 + L_3L_4) dV$	$\frac{1}{20} \cdot D \cdot V$
$\int_V E(L_1^3 + L_2^3 + L_3^3 + L_4^3) dV$	$\frac{1}{20} \cdot E \cdot V$
$\int_V F(L_1^2L_2 + L_1^2L_3 + L_1^2L_4 + L_2^2L_1 + L_2^2L_3 + L_2^2L_4 + L_3^2L_1 + L_3^2L_2 + L_3^2L_4 + L_4^2L_1 + L_4^2L_2 + L_4^2L_3) dV$	$\frac{1}{60} \cdot F \cdot V$
$\int_V G(L_1L_2L_3 + L_1L_2L_4 + L_1L_3L_4 + L_2L_3L_4) dV$	$\frac{1}{120} \cdot G \cdot V$
$\int_V H(L_1^4 + L_2^4 + L_3^4 + L_4^4) dV$	$\frac{1}{35} \cdot H \cdot V$
$\int_V I(L_1^3L_2 + L_1^3L_3 + L_1^3L_4 + L_1L_2^3 + L_1L_3^3 + L_1L_4^3 + L_2L_3^3 + L_2L_4^3 + L_3L_4^3 + L_1L_2L_3^2 + L_1L_2L_4^2 + L_2L_3L_4^2) dV$	$\frac{1}{140} \cdot I \cdot V$

Продолжение табл. 4

$\int_V J \left(L_1^2 L_2 L_3 + L_1^2 L_2 L_4 + L_1^2 L_3 L_4 + L_1 L_2^2 L_3 + L_1 L_2^2 L_4 + L_1^2 L_3 L_4 + \right. \\ \left. + L_1 L_2 L_3^2 + L_1 L_3^2 L_4 + L_2 L_3^2 L_4 + L_1 L_2 L_4^2 + L_1 L_3 L_4^2 + L_2 L_3 L_4^2 \right) dV$	$\frac{1}{420} \cdot J \cdot V$
$\int_V K \left(L_1^2 L_2^2 + L_1^2 L_3^2 + L_1^2 L_4^2 + L_2^2 L_3^2 + L_2^2 L_4^2 + L_3^2 L_4^2 \right) dV$	$\frac{1}{210} \cdot K \cdot V$
$\int_V LL_1 L_2 L_3 L_4 dV$	$\frac{1}{840} \cdot L \cdot V$

На боковых поверхностях конечного элемента, смежных с внешней границей, вычисляется интеграл (12). Интегрирование вдоль поверхности удобно выполнять с использованием формулы

$$\int_{S_{123}} L_1^a \cdot L_2^b \cdot L_3^c \cdot dS_{123} = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} \cdot 2 \cdot S_{123}, \tag{20}$$

где S_{123} – площадь грани тетраэдра, образованная вершинами P_1, P_2 и P_3 .

Для остальных граней тетраэдра можно аналогично записать формулы для интегрирования, но из-за особенностей адаптированной сетки поток будет входить в конечный элемент только через грань с вершинами P_1, P_2 и P_3 . Это объясняется тем, что для всех тетраэдров, расположенных в кубической ячейке, вершина P_4 совпадает с узлом P_s (центром кубической ячейки).

Результаты интегрирования выражения (12) представлены в табл. 5.

Таблица 5

Результаты интегрирования вдоль грани тетраэдра

Интеграл	Результат
$-\int_s V_n \cdot \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot L_1 - 1) \cdot (3 \cdot L_1 - 2) \cdot L_1 \cdot dS,$ $-\int_s V_n \cdot \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot L_2 - 1) \cdot (3 \cdot L_2 - 2) \cdot L_2 \cdot dS,$ $-\int_s V_n \cdot \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot L_3 - 1) \cdot (3 \cdot L_3 - 2) \cdot L_3 \cdot dS$	$-\frac{1}{30} \cdot V_n \cdot S$
$-\int_s V_n \cdot \frac{9}{2} \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot (3 \cdot L_1 - 1) \cdot dS,$ $-\int_s V_n \cdot \frac{9}{2} \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot (3 \cdot L_2 - 1) \cdot dS,$ $-\int_s V_n \cdot \frac{9}{2} \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot (3 \cdot L_2 - 1) \cdot dS,$ $-\int_s V_n \cdot \frac{9}{2} \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot (3 \cdot L_3 - 1) \cdot dS,$ $-\int_s V_n \cdot \frac{9}{2} \cdot L_3 \cdot L_1 \cdot (3 \cdot L_3 - 1) \cdot dS,$ $-\int_s V_n \cdot \frac{9}{2} \cdot L_3 \cdot L_1 \cdot (3 \cdot L_1 - 1) \cdot dS$	$-\frac{3}{40} \cdot V_n \cdot S$
$-\int_s V_n \cdot 27 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot dS$	$-\frac{9}{20} \cdot V_n \cdot S$

После решения системы линейных алгебраических уравнений (10) по найденным значениям потенциала скорости в узлах сетки вычисляем проекции вектора скорости, используя выражения (4) и выражения из табл. 3:

$$V_x^{(e)} = \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial x} = \sum_{\beta=1}^{20} \frac{N_{\beta}^{(e)}}{\partial x} \cdot \Phi_{\beta}^{(e)}, \quad V_y^{(e)} = \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial y} = \sum_{\beta=1}^{20} \frac{N_{\beta}^{(e)}}{\partial y} \cdot \Phi_{\beta}^{(e)}, \quad V_z^{(e)} = \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial z} = \sum_{\beta=1}^{20} \frac{N_{\beta}^{(e)}}{\partial z} \cdot \Phi_{\beta}^{(e)}.$$

Результаты расчетов для расчетного случая обтекания рассматриваемого самолета Ил-76Д показаны на рис. 3 – 6. Из рис. 3 видно, что линии равного потенциала подходят к поверхности летального аппарата нормально, тем самым подтверждая выполнение условия непротекания на его поверхности. На рис. 4 и 6 вблизи носовой и хвостовой частей фюзеляжа, крыла и оперения видны участки торможения потока, характерные для потенциального течения несжимаемого газа.

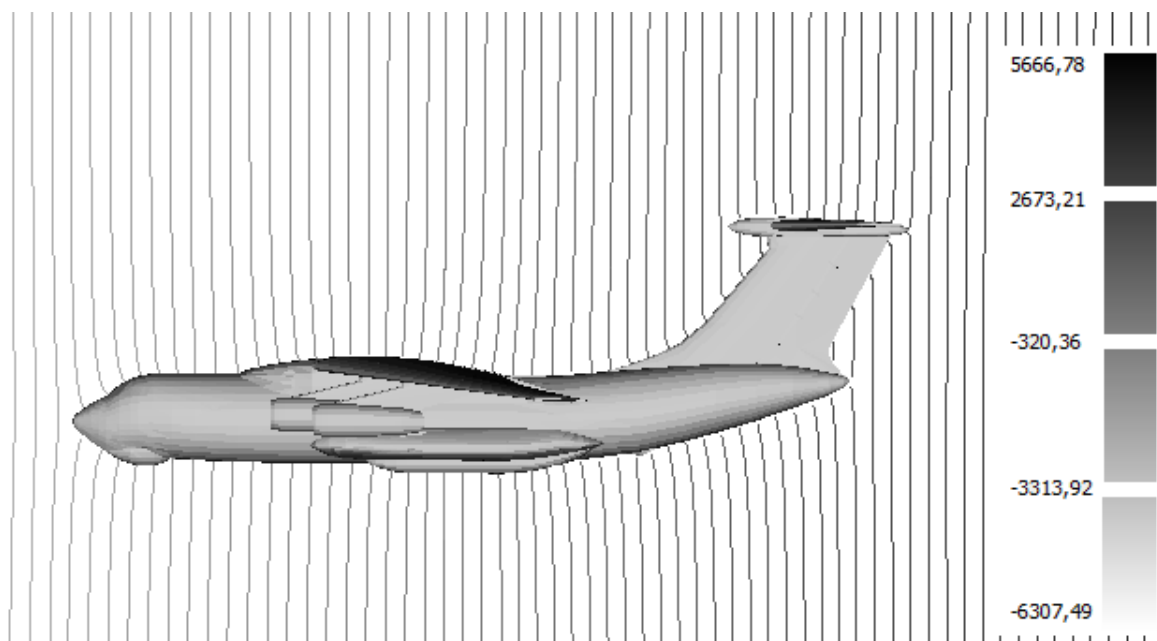


Рис. 3. Линии равного потенциала скорости в плоскости симметрии летательного аппарата

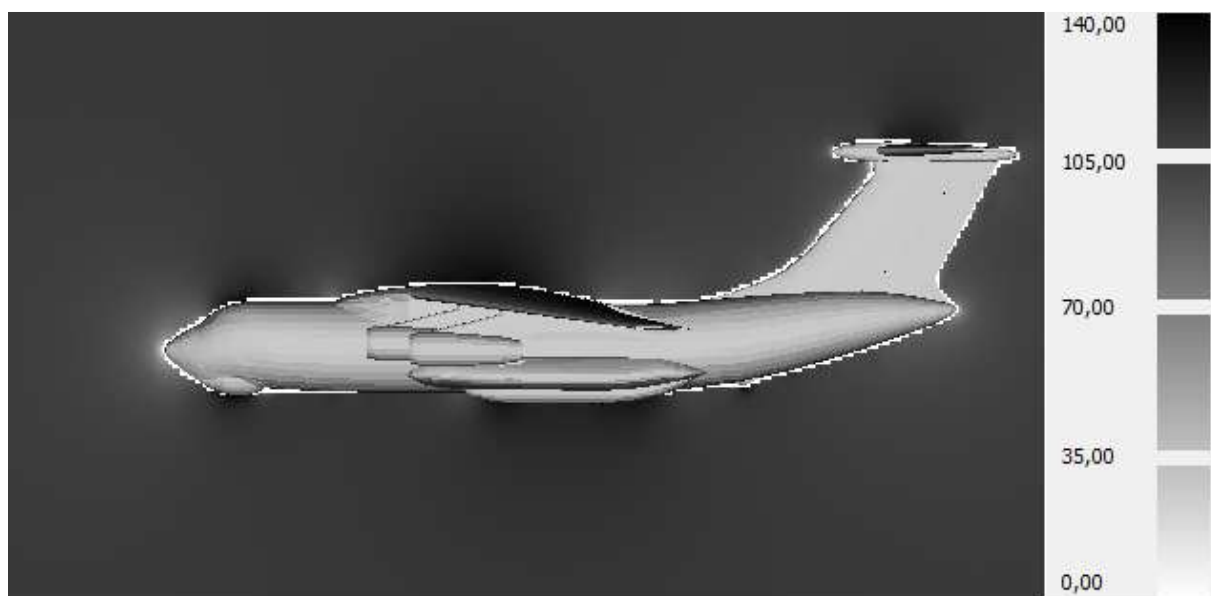


Рис. 4. Распределение модуля скорости в плоскости симметрии летательного аппарата

На основе рассмотренной задачи потенциального обтекания летательного аппарата выполнена верификация алгоритма построения нерегулярной адаптированной сетки. Используемые в качестве конечного элемента кубические тетраэдры позволили получить гладкое решение до второй производной для искомой функции на границе этих элементов.

О качестве алгоритма построения сетки, описанном в работе [4], в основе которой используются кубические тетраэдральные элементы, позволяет судить полученная картина течения (рис. 5 и 6) в местах сочленения несущих поверхностей и фюзеляжа летательного аппарата.



Рис. 5. Значения потенциала скорости на поверхности летательного аппарата



Рис. 6. Распределение модуля скорости вдоль поверхности летательного аппарата

В дальнейшем предполагается использование предложенного алгоритма построения адаптированной сетки с применением кубических тетраэдральных конечных элементов для исследования вязких течений. Перспективным является

внедрение тетраэдральных конечных элементов с криволинейными гранями и сторонами для более качественного согласования сетки с поверхностью тела.

Список литературы

1. Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация [Текст] / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
2. Тюрёв, В. В. Решение задач гидромеханики методом конечных элементов [Текст] / В. В. Тюрёв, В. А. Тараненко, Ю. С. Мащенко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 63. – Х., 2014. – С. 127 – 133.
3. Сургайло, М. Л. Моделирование двумерного течения грунтовых вод [Текст] / М. Л. Сургайло, П. Н. Соляник, В. А. Тараненко, Ю. С. Мащенко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 65. – Х., 2014. – С. 182 – 191.
4. Крашаница, Ю. А. Алгоритм построения трехмерной адаптированной сетки для задач аэродинамики, решаемых методом конечных элементов [Текст] / Ю. А. Крашаница, А. В. Бахир, В. А. Тараненко, Ю. С. Мащенко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 66. – Х., 2014. – С. 105 – 110.

Поступила в редакцию 12.03.2015

Особливості застосування кубічних тетраедральних елементів при моделюванні методом скінченних елементів

Виконано верифікацію працездатності алгоритму побудови нерегулярної тривимірної адаптованої сітки на прикладі задачі потенційного обтікання літального апарата. Описано реалізацію інтерполяції кубічним поліномом для потенціалу швидкості, концепція якого може бути використана при вирішенні задач з реальним газом.

Ключові слова: адаптована сітка, тетраедральний скінченний елемент, поліном, потенціальна течія, функція форми, функціонал.

Features of application of cubic tetrahedral elements at simulation by a finite element method

Verification of serviceability executed for algorithm of construction the non-regular three-dimensional adapted grid on a problem of potential flow of aircraft. Described is realization of interpolation by a cubic polynomial for a velocity potential, which concept can be used at problem solving with a real gas.

Keywords: adapted grid, tetrahedral finite element, polynomial, potential flow, shape function, functional.