

## **Моделирование потери устойчивости цилиндрических оболочек за пределами упругости**

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского  
"Харьковский авиационный институт"*

Разработана методика моделирования процесса пластического течения материала при потере устойчивости. Методика основана на комбинировании линейного анализа потери устойчивости с анализом закритического поведения материала. Показано, что метод Рикса позволяет найти решение задачи потери устойчивости и использовать его для анализа реальных систем. Сформулированы задачи дальнейших исследований.

**Ключевые слова:** потеря устойчивости, закритическое поведение, нелинейность, цилиндрическая оболочка, моделирование, задача.

### **Введение**

Важное место в авиационном машиностроении занимает производство деталей из тонкостенных трубных заготовок, когда по схеме раздачи или обжима получают элементы типа фланцев, гофров и др. [1]. В работах предложены схемы получения гофрированных элементов трубопроводов, в которых схема раздачи комбинируется с осевой нагрузкой, что позволяет избежать излишнего утонения при деформации. Для гидроэластичной штамповки важно иметь зависимость осевой нагрузки и внутреннего давления от параметров процесса [2].

С другой стороны, несомненно большое влияние для данного класса процессов листовой штамповки имеет также потеря устойчивости. В любых работах, посвященных формообразованию гофрированных элементов, обязательно встречаются критерии устойчивости цилиндрических заготовок при их штамповке.

Представляя собой феномен, встречающийся при воздействии сжимающих нагрузок, потеря устойчивости является ограничивающим прочностную и надежность структур фактором. В то же время предлагаемые во многих процессах расчетные схемы включают в себя критические нагрузки, которые определяют устойчивость системы, не находя при этом определенных форм потери устойчивости. Это явление можно использовать как формообразующий фактор, для чего необходимо создать его математическую модель.

### **Постановка задачи исследования**

Исторически сложилось два подхода к решению задачи определения устойчивости системы. Согласно алгоритму, предложенному Лагранжем и Ляпуновым, или динамическому критерию исходная форма движения или равновесия системы устойчива, если малые возмущения вызывают малые отклонения системы от этой формы, которые могут быть сделаны как угодно малыми при уменьшении возмущений. Система будет неустойчивой, если даже сколь угодно малые возмущения вызывают конечные отклонения системы от ее исходной формы. Практическое использование динамического критерия при оценке устойчивости системы сводится к интегрированию уравнений движения системы и исследованию поведения их во времени. Если эти решения во времени остаются ограниченными, то система считается устойчивой, если нет, — неустойчивой. Данный подход не нашел большого распространения.

Второй, статический подход применяется чаще. Расчет устойчивости с определением собственных значений по Эйлеру сводится к нахождению теоретического значения критических нагрузок или точек бифуркации идеальной упругой структуры. Согласно этой концепции неустойчивость системы характеризуется появлением смежной формы равновесия, бесконечно близкой к ее исходной форме. Задачу исследования устойчивости исходной равновесной формы системы в этом случае заменяют задачей разыскания точек разветвления форм равновесия или, как их еще называют, точек бифуркации форм равновесия. Критическую нагрузку определяют как наименьшую из нагрузок, при которых появляются смежные формы равновесия. С практической стороны использование статического критерия сводится к нахождению собственных чисел и соответствующих им векторов линеаризованных дифференциальных уравнений, которые получаются из нелинейных уравнений путем их варьирования или при рассмотрении двух смежных равновесных состояний [3]. Зачастую достаточно вычислить первые собственное значение и собственный вектор, которые соответственно определяют критическую нагрузку и форму потери устойчивости. Такое идеальное решение не подходит для реальных инженерных задач в силу наличия в большинстве случаев различного рода нелинейностей. Таких нелинейностей различают три вида:

1. Нелинейности материала, когда свойства материала зависят от приложенных нагрузок и деформаций.
2. Геометрическая нелинейность при достаточно больших деформациях.
3. Нелинейности контакта, когда вследствие больших деформаций происходят изменения граничных условий.

Разновидностью статического критерия является критерий энергетический. В основе этого критерия лежат два фундаментальных принципа механики сплошных сред: принцип возможных перемещений и принцип возможных изменений напряженного состояния. Из принципа возможных перемещений непосредственно следует условие стационарности полной потенциальной энергии системы  $\delta\Pi = 0$ , согласно которому из всех перемещений, удовлетворяющих граничным условиям, перемещения, удовлетворяющие уравнениям равновесия, придают потенциальной энергии стационарное значение.

Условие  $\delta\Pi = 0$  позволяет выделить равновесное состояние системы. Об устойчивости этого состояния можно судить с помощью теоремы Лагранжа–Дирихле [4]. Если равновесное состояние устойчиво, то полная потенциальная энергия системы имеет минимум ( $\delta\Pi=0$ ,  $\delta^2\Pi>0$ ), если неустойчиво, – максимум ( $\delta\Pi=0$ ,  $\delta^2\Pi<0$ ); безразличному равновесию соответствует постоянная величина энергии ( $\delta\Pi = 0$ ,  $\delta^2\Pi= 0$ ). Здесь  $\delta\Pi$ ,  $\delta^2\Pi$  – первая и вторая вариации полной энергии.

### **Метод решения**

Местное осесимметричное выпучивание относительно коротких цилиндрических оболочек относится к общей потере устойчивости, при которой образуются длинные волны вдоль одной из координат. В данном случае задачу предлагается решать в три этапа.

#### **1. Определение точки бифуркации**

Определение точек бифуркации аналогично нахождению наименьшей критической нагрузки, что может быть определено влиянием граничных условий и совместным действием сжимающей осевой нагрузки и внутреннего давления. При

поиске собственных значений или решении задачи линейной потери устойчивости детерминант матрицы жесткости модели принимает значение, равное нулю [5]:

$$K^{MN} v^M = 0, \quad (1)$$

где  $K$  – матрица жесткости;  $v$  – вектор перемещений.

Для численного решения задачи нелинейной потери устойчивости применяют метод Рикса или его модификации. Данный метод наиболее полезен для случая геометрически нелинейных задач, т.е. при больших деформациях, когда жесткость системы оказывается отрицательной и энергия деформации должна уменьшаться для того, чтобы структура оставалась в равновесии [5]. При этом значение нагрузки используют как дополнительную неизвестную величину и решение находят одновременно как для нагрузки, так и для перемещения. В таком случае значения нагрузки и перемещения уменьшаются одновременно, порождая неоднозначность решения. При конечно-элементном анализе метод Рикса состоит в определении единственного пути, обеспечивающего равновесие в пространстве, заданном узловыми переменными и параметрами нагрузки. Базовым методом является метод Ньютона, и, следовательно, в любой момент времени должно быть конечное значение диапазона, обеспечивающее сходимости. Каждый шаг метода является продолжением предыдущей истории нагружения. В начале каждого шага задается постоянная нагрузка, которая не переопределяется и может быть расценена как статическая. Нагрузка, определяемая на каждом шаге метода, является базовой. Все задаваемые нагрузки изменяются от начальной статической до базовой. В любой момент времени текущая нагрузка

$$P_T = P_0 + \lambda(P_6 - P_0), \quad (2)$$

где  $P_0$  – начальная статическая нагрузка;  $P_6$  – базовая нагрузка,  $\lambda$  – коэффициент пропорциональности нагрузки.

В то же время часто система имеет отклик, зависящий от пути. Для этого случая ограничивается размер приращения. В модифицированном алгоритме Рикса размер приращения ограничивается путем определения расстояния (с помощью алгоритма, примененного для случая статики) вдоль касательной линии в текущей точке решения, после чего проводится поиск равновесия в плоскости, проходящей через полученную точку и ортогональной к данной касательной. В этом случае пространство решений задается перемещениями, вращениями и параметрами нагрузки.

Пусть  $P^N$  – величина нагрузки, где  $N=1,2,\dots$  – степени свободы модели;  $\lambda$  – параметр величины нагрузки, так что в любой момент времени действительное значение нагрузки равно  $\lambda P^N$  и  $u^N$  – перемещения в этот же момент времени.

Алгоритм предусматривает масштабирование пространства решения таким образом, чтобы размерность вдоль всех осей определяющих параметров была приблизительно одинаковой. Это можно сделать путем определения максимального абсолютного значения перемещений  $\bar{u}$  начальной итерации, когда ищется решение задачи линейной потери устойчивости. Определим  $\bar{P} = (P^N P^N)^{1/2}$ . Область решения будет лежать внутри пределов:

$$\text{нагрузка} - \lambda \bar{P}^N, \bar{P}^N = P^N / \bar{P} \text{ и перемещения} - \tilde{u}^N = u^N / \bar{u}.$$

В этом случае набор решений будет представлять собой непрерывный набор точек равновесия, описываемый вектором  $(\tilde{u}^N; \lambda)$ .

Если решение найдено для точки  $A^0 = (\tilde{u}_0^N; \lambda_0)$  и может быть определен ка-

сательный модуль жесткости  $K_0^{NM}$ , то можно получить решение  $K_0^{NM}v^M = P^N$ . Шаг приращения от  $A^0$  до  $A^1$  (рис. 1) выбирают в зависимости от длины  $\Delta l$  в пределах решения, так что

$$\Delta \lambda_0^2(\tilde{v}_0^N; 1):(\tilde{v}_0^N; 1) = \Delta l^2 \text{ и, следовательно,} \quad \Delta \lambda_0 = \frac{\pm \Delta l}{(\tilde{v}_0^N \tilde{v}_0^{N+1})^{1/2}}, \quad (3)$$

где  $\tilde{v}_0^N$  является  $v_0^N$ , отмасштабированное с помощью  $\bar{u}$ .

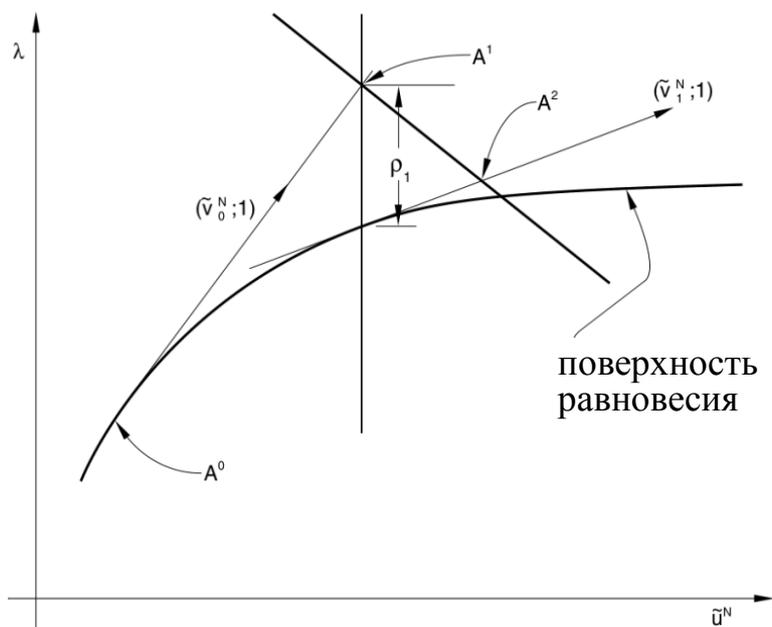


Рис. 1. Модифицированный алгоритм Рикса [5]

Величина  $\Delta l$  изначально выбирается с помощью автоматического алгоритма для статической задачи на основе скорости ее сходимости. Знак  $\Delta \lambda_0$  (по направлению вдоль касательной линии) выбирается так, чтобы скалярное произведение  $\Delta \lambda_0 (\tilde{v}_0^N; 1)$  на предыдущем шаге решения  $(\Delta \tilde{u}_{-1}^N; \Delta \lambda_{-1})$  было положительным:

$$\Delta \lambda_0 (\tilde{v}_0^N; 1):(\Delta \tilde{u}_{-1}^N; \Delta \lambda_{-1}) > 0, \\ \text{т.е. } \Delta \lambda_0 (\tilde{v}_0^N \Delta \tilde{u}_{-1}^N + \Delta \lambda_{-1}) > 0.$$

В некоторых случаях, когда отклик показывает очень большую кривизну в пространстве  $(\tilde{u}^N; \lambda)$ , этот критерий может привести к ошибочному результату. В практике ошибочный знак выбирается крайне редко, только если шаг приращения не является очень большим или бифуркация проявляется очень резко.

## 2. Анализ пластического формообразования гофра

Для симметричных гофров целесообразно рассматривать три различные зоны (рис. 2):

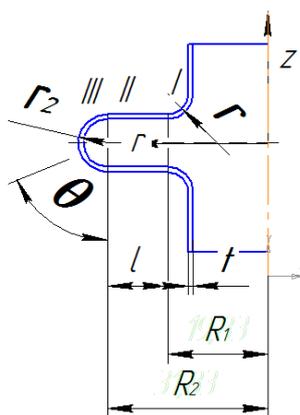


Рис. 2. Зоны локального выпучивания цилиндрической заготовки:  
 I – переходная зона, II – плоская кольцевая часть,  
 III – тороидальная вершина

Для I зоны условие несжимаемости определяется соотношением

$$\dot{\varepsilon}_r^{(1)} + \dot{\varepsilon}_\varphi^{(1)} + \dot{\varepsilon}_\theta^{(1)} = 0, \quad (4)$$

где  $\dot{\varepsilon}_r^{(1)} = \frac{\partial V_r^{(1)}}{\partial r}$ ;  $\dot{\varepsilon}_\varphi^{(1)} = \frac{1}{R_1 - r \cos \theta} (V_\theta^{(1)} \sin \theta - V_r^{(1)} \cos \theta)$ ;  $\dot{\varepsilon}_\theta^{(1)} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_\theta^{(1)}}{\partial \theta} + V_r \right)$ . .....(5)

Кинематическое краевое условие для данной зоны имеет вид

$$\left. V_r^{(1)} \right|_{r=r_1} = 0, \quad (6)$$

а условия неразрывности скоростей на границе между I и II зонами определяются выражениями

$$\left. V_r^{(1)} \right|_{\theta = \frac{\pi}{2}} = \left. V_z^{(2)} \right|_{r=R_1} \quad ; \quad \left. V_\theta^{(1)} \right|_{\theta = \frac{\pi}{2}} = \left. V_r^{(2)} \right|_{r=R_1} \quad (7)$$

Во II зоне линейные скорости деформации равны:

$$\dot{\varepsilon}_r^{(2)} = \frac{\partial V_r^{(2)}}{\partial r}; \quad \dot{\varepsilon}_\varphi^{(2)} = \frac{V_r^{(2)}}{r}; \quad \dot{\varepsilon}_z^{(2)} = \frac{\partial V_z^{(2)}}{\partial z}, \quad (8)$$

а условие несжимаемости имеет вид

$$\dot{\varepsilon}_r^{(2)} + \dot{\varepsilon}_\varphi^{(2)} + \dot{\varepsilon}_z^{(2)} = 0. \quad (9)$$

Компоненты поля скоростей должны удовлетворять краевому условию

$$\left. V_z^{(2)} \right|_{z=R_2} = 0 \quad (10)$$

и условиям неразрывности скоростей между II и III зонами

$$\left. V_z^{(2)} \right|_{r=R_2, \theta = \frac{\pi}{2}} = \left. V_r^{(3)} \right|_{r=R_2, \theta = \frac{\pi}{2}} \quad ; \quad \left. V_r^{(2)} \right|_{r=R_2, \theta = \frac{\pi}{2}} = \left. V_\theta^{(3)} \right|_{r=R_2, \theta = \frac{\pi}{2}} \quad (11)$$

В III зоне условие несжимаемости имеет вид:

$$\dot{\varepsilon}_r^{(3)} + \dot{\varepsilon}_\varphi^{(3)} + \dot{\varepsilon}_\theta^{(3)} = 0, \quad (12)$$

где линейные компоненты тензора скоростей деформации определяются как

$$\dot{\varepsilon}_r^{(3)} = \frac{\partial V_r^{(3)}}{\partial r}; \quad \dot{\varepsilon}_\varphi^{(3)} = \frac{1}{R_2 - r \cos \theta} (V_r^{(3)} \cos \theta - V_\theta^{(3)} \sin \theta); \quad \dot{\varepsilon}_\theta^{(3)} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_\theta^{(3)}}{\partial \theta} + V_r^{(3)} \right). \quad (13)$$

Компоненты скорости  $V_r^{(3)}$  и  $V_\theta^{(3)}$  должны удовлетворять краевым условиям:

$$\left. V_r^{(3)} \right|_{r=r_2} = 0 ; \quad \left. V_\theta^{(3)} \right|_{\theta=0} = 0 . \quad (14)$$

Пластическое течение в I зоне описывается соотношениями [6]

$$\begin{aligned} V_r^{(1)} &= r_1 - r ; V_\varphi^{(1)} = 0 ; \\ V_\theta^{(1)} &= \frac{(R_1\theta - r \sin \theta)r}{R_1 - r \cos \theta} - \frac{R_1^2 - R_2^2 - 2(R_2\frac{\pi}{2} + r_2)r_2 - 2(R_1\frac{\pi}{2} - r)r}{2(R_1 - r \cos \theta)} . \end{aligned} \quad (15)$$

Поле скоростей во II зоне описывается соотношением

$$V_z^{(2)} = r_2 - z ; V_r = \frac{r}{2} - \frac{2(R_2\frac{\pi}{2} + z)z + R_2^2}{2r} ; V_\varphi^{(2)} = 0. \quad (16)$$

Для III зоны будем иметь следующее поле скоростей:

$$V_r^{(3)} = r_2 - r ; V_\theta^{(3)} = \frac{(R_2\theta + r \sin \theta)r}{R_2 + r \cos \theta} ; V_\varphi^{(3)} = 0. \quad (17)$$

В итоге для осесимметричной задачи мощность пластической деформации по разным зонам в конечный момент формоизменения вычисляются по формуле [6]

$$\begin{aligned} \int_V H_1 dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{r_1}^{r_1+l} H_1^{(1)} r (R_1 - r \cos \theta) dr d\theta d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_{r_2-l}^{r_2} \int_{R_1}^{R_2} H_1^{(2)} r dr dz d\varphi + \\ &+ \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{r_2-l}^{r_2} H_1^{(3)} r (R_2 + r \cos \theta) dr d\theta d\varphi . \end{aligned} \quad (18)$$

### 3. Исследование закритического пластического деформирования

Наряду с анализом пластического течения необходимо проводить моделирование вторичной потери устойчивости, которая может сопровождать местное выпучивание по схеме раздачи в виде гофра и проявляться в резком изменении кривизны и росте деформации без существенного роста осевой нагрузки. Такое исследование возможно в системах конечно-элементного анализа, для чего необходимо организовать алгоритм, который будет включать в себя попеременное применение линейного анализа потери устойчивости и статического анализа пластических деформаций.

#### Выводы

1. Моделирование формообразования тонкостенных деталей из трубных заготовок необходимо проводить с учетом потери устойчивости, которая включает в себе различные виды нелинейности.
2. Для моделирования в системе конечно-элементного анализа используется модифицированный метод Рикса, что позволяет учесть нелинейность потери устойчивости в пластической области.
3. Для определения пластической деформации после потери устойчивости можно найти поле скоростей в элементе типа «гофр», что позволяет определить мощность деформации.

На основе данной математической модели планируется дальнейшее моделирование задачи пластического деформирования тонкостенных цилиндрических заготовок.

#### Список литературы

1. Современные технологии авиастроения [Текст] / под общ. ред. А. Г. Браухина, Ю. Л. Иванова. – М.: Машиностроение, 1999. – 832 с.

2. Эрбейгель, С.А. Исследование, разработка и внедрение процессов формообразования унифицированных элементов трубопроводных систем летательных аппаратов эластичной средой на универсальных гидропрессах: дис. ... канд. техн. наук / С. А. Эрбейгель– Х., 1986. –186 с.

3. Вольмир, А. С. Устойчивость деформируемых систем [Текст]: моногр. / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1967. – 984 с.

4. Григолюк, Э.И. Устойчивость оболочек [Текст]: моногр. / Э. И. Григолюк, В.В. Кабанов. – М.: Наука, 1978. – 360 с.

5. Dassault Systemes Simulia Corp. Abaqus 6.10, Theory Manual. USA, 2010.

6. Давыдов, О. Ю. Кинематика пластического течения при формообразовании гофра сильфона [Текст] / О.Ю. Давыдов, В.Г. Егоров, И.В. Фоменко // Новые технологии: Материалы VIII Всероссийской конф. – М.: РАН, 2011. – С. 86-93.

Поступила в редакцию 14.12.2016

## **Моделювання втрати стійкості циліндричних оболонок за межами пружності**

Розроблено методику моделювання процесу пластичної плинності матеріалу при втраті стійкості. Методика основана на комбінуванні лінійного аналізу втрати стійкості з аналізом закритичної поведінки матеріалу. Показано, що метод Рікса дозволяє знайти рішення задачі втрати стійкості та використати його для аналізу справжніх систем. Сформульовано завдання подальших досліджень.

**Ключові слова:** втрата стійкості, закритична поведінка, нелінійність, циліндрична оболонка, моделювання, роздавання .

## **Buckling Simulation of the Cylindrical Shell Beyond the Elastic Limit**

The method of simulation of the process of plastic deformation of material during buckling is developed. The method is based on combination of linear buckling analysis and nonlinear one. It is shown that Ricks method allows to find solution for buckling and to utilize it for real system analysis. The following investigation tasks are formulated.

**Key words:** buckling, behavior beyond the elastic limit, nonlinearity, cylindrical shell, simulation, expansion

### **Сведения об авторах:**

**Борисевич Владимир Владимирович** – к.т.н., доцент каф. технологии производства летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», г. Харьков, Украина.

**Абухабел Мохамед Абубакер** – аспирант третьего года обучения каф. технологии производства летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», г. Харьков, Украина.