

## Методика расчета потенциального обтекания профиля

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского  
«Харьковский авиационный институт»*

Представлен подход к математическому моделированию обтекания тонкого профиля потоком идеальной несжимаемой жидкости. Показан алгоритм расчета аэродинамических характеристик тонкого профиля. Обсуждаются результаты исследований по описанной методике расчета.

**Ключевые слова:** летательный аппарат, профиль, метод дискретных вихрей, аэродинамические характеристики.

### Введение

Развитие современной авиационной техники обусловлено широким использованием экспериментальных и численных методов моделирования обтекания различных тел и получения их аэродинамических характеристик при проектировании перспективных летательных аппаратов (ЛА), а также при выполнении модификации и модернизации, существующих образцов авиационной техники.

Рост производительности вычислительной техники, а также дальнейшее развитие математических моделей, описывающих обтекание произвольных тел потоком жидкости или газа обеспечили развитие численной аэродинамики. Численная аэродинамика позволяет с большой долей достоверности получать аэродинамические характеристики ЛА при значительно меньших временных и экономических затратах. Использование численных экспериментов сокращает время, затрачиваемое на этапе, как аэродинамического проектирования, так и проектирования облика ЛА.

Таким образом, разработка математических моделей, построения методик расчета обтекания ЛА и получение его аэродинамических характеристик является актуальной задачей.

В работе рассматривается подход к математическому моделированию тонкого профиля, обтекаемого потоком идеальной несжимаемой жидкости, построенный на базе метода дискретных вихрей (МДВ) [1].

## 1 Постановка задачи

Исследуется безциркуляционное обтекание тела потоком жидкости или газа характеризующейся отсутствием вихревой пелены, сходящей с исследуемого тела.

### 1.1 Физическая постановка задачи

Рассматривается прямая задача, в которой форма несущей поверхности и кинематические параметры ( $\vec{V}_\infty$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ), заданы как функции координат и времени. Считается, что профиль движется со средней скоростью  $\vec{V}_\infty$ , которая не зависит от времени, а угловая скорость равна нулю  $\vec{\Omega}_{x,y} = 0$ . Для удобства анализа и обработки полученных данных вводятся кинематические параметры в безразмерном виде (1):

$$\overline{W}_v = \frac{W_v}{V_\infty}, \quad \overline{v}_{v,n} = \frac{v_{v,n}}{V_\infty}, \quad \overline{V}_\infty = \frac{V_\infty}{V_\infty} = 1, \quad (1)$$

где:  $V_\infty$  – скорость невозмущенного потока;  $W_v$  – возмущенная скорость;  $v_{v,n}$  – нормальная составляющая суммарной относительной скорости в произвольной точке.

Вводятся безразмерные координаты вихревой схемы исследуемого тела (2).

$$\bar{x} = \frac{x}{b}, \quad \bar{y} = \frac{y}{b}, \quad (2)$$

где:  $x, y$  – координаты дискретных вихрей;  $b$  – хорда профиля.

### 1.2 Математическая постановка задачи

Рассматривается установившееся движение тонкого профиля при малой дозвуковой скорости в стандартных прямоугольных системах координат земная  $Ox_g y_g$  и связанная  $Ox y$ . Движение тонкого профиля как твердого тела в каждый момент времени  $t$  определяется вектором скорости невозмущенного потока  $\vec{V}_\infty$  и вектором угловой скорости  $\vec{\Omega}$  (рис. 1). Предполагается, что среда неподвижна. Направление вектора скорости невозмущенного потока  $\vec{V}_\infty$  определяет угол атаки профиля (3):

$$\alpha = -\arctg\left(\frac{V_y}{V_x}\right), \quad (3)$$

где  $V_x$  и  $V_y$  – проекции вектора скорости  $\vec{V}_\infty$ .

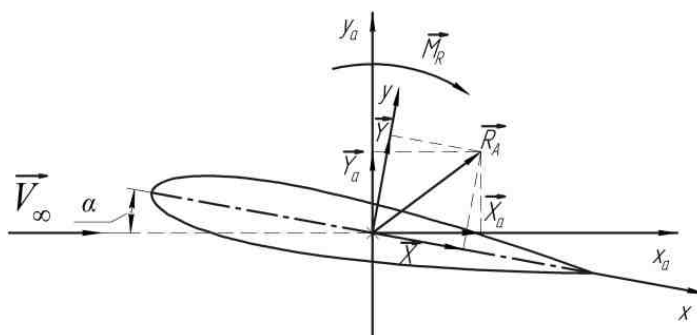


Рисунок 1 – К постановке задачи об обтекании тонкого профиля

Задача об обтекании профиля сводится к определению аэродинамической нагрузки, действующей на профиль со стороны среды  $\vec{R}_A(t)$  и аэродинамического момента  $\vec{M}(t)$ . Предполагается, что течение жидкости, вне поверхности профиля является безвихревым ( $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ ). Тогда существует функция  $\Phi(\vec{r}, t)$  – потенциал скорости, который удовлетворяет условию  $\nabla \Phi = V$ . Уравнение неразрывности для несжимаемой среды ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ ) удовлетворяет уравнению Лапласа:  $\Delta \Phi(\vec{r}, t) = 0$

Поле давлений в пространстве при установившемся движении определяется интегралом Бернулли (4):

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - V_\infty = const \quad (4)$$

Гидродинамически задача замыкается следующими граничными условиями: – непротекание на поверхности профиля:  $\vec{\nabla} \Phi(\vec{r}) \cdot n(\vec{r}) = \vec{V}_*(\vec{r}) \cdot n(\vec{r})$ ,

где  $\vec{V}_* = \vec{V}_k + \vec{\Omega} \times \vec{r}$ , скорость движения жидкости по поверхности профиля,  $n(\vec{r})$  – внешняя нормаль к поверхности профиля;

– убывания возмущений на бесконечном удалении от профиля (5):

$$\Phi(\vec{r}) \rightarrow 0, |\Phi(\vec{r})| \rightarrow 0, |\vec{r}| \rightarrow \infty \quad (5)$$

Граничные условия дополняются теоремой Томсона о постоянстве циркуляции по замкнутому контуру, охватывающему профиль (6):

$$\frac{d}{dt} \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (6)$$

В результате задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (7) и ее решению.

$$\sum_{\mu}^n \Gamma_{\mu} \cdot a_{\mu\nu} = 2 \cdot \pi \cdot f_n(\overline{x_{v\mu}}, \overline{y_{v\mu}}), \nu, \mu = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

где  $a_{\mu\nu}$  – коэффициенты влияния СЛАУ (левая часть), определяемые выражением:  $a_{\mu\nu} = \frac{1}{r_{v\mu}}$ , где  $r_{v\mu}$  – расстояние от контрольной точки  $V$  до дискретного вихря  $\mu$ ;  $n$  – количество дискретных вихрей, которыми описывается профиль.

## 2 Алгоритм решения задачи

Алгоритм решения задачи бесциркуляционного обтекания тонкого профиля представленный на рисунке 2 содержит следующие шаги:

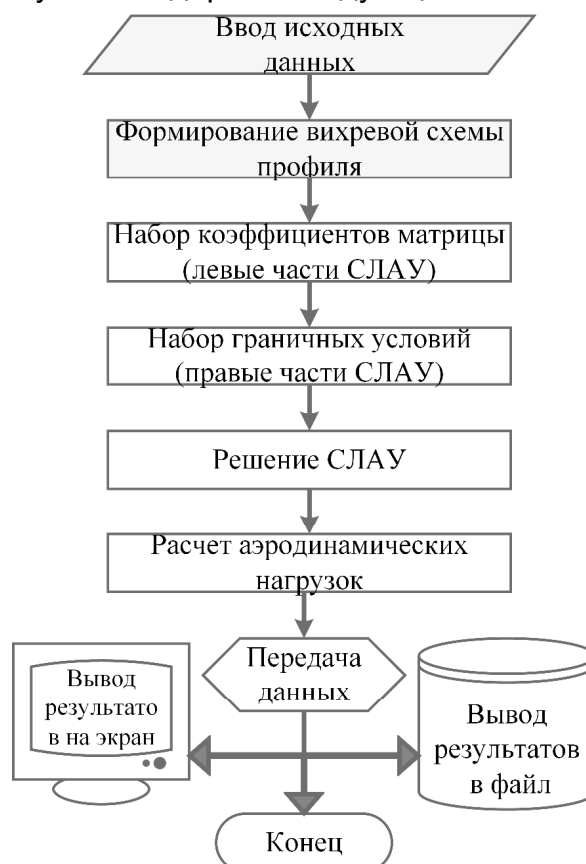


Рисунок 2 – Блок-схема методики расчета

- 1) формируется вихревая схема профиля;
- 2) вычисляются элементы матрицы  $a_{\mu\nu}$ , которые остаются неизменными при условии неизменности геометрии профиля;
- 3) решением системы (7) определяются значения циркуляций;
- 4) рассчитываются распределенные и суммарные аэродинамические нагрузки. Расчет перепада давлений ведется по интегралу Бернулли (4).

### 3 Вихревая схема

Математическое представление поверхности исследуемого профиля обеспечивается присоединенными вихрями и контрольными точками в которых рассчитываются аэродинамические нагрузки. Координаты вихрей и контрольных точек определяются выражением (8).

$$\bar{x}_\mu = \frac{\mu - 0,5}{n}, \bar{x}_\nu = \frac{\nu}{n}, \bar{y}_\mu, \bar{y}_\nu = 0, \mu, \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Расчетная вихревая схема представлена на рисунке 3.

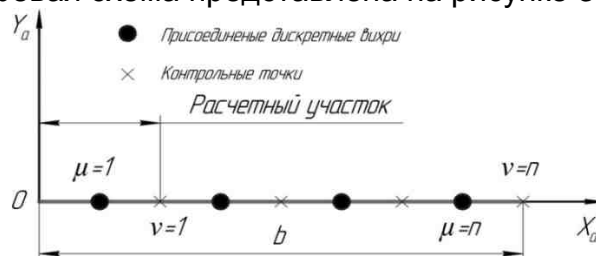


Рисунок 3 – Вихревая схема тонкого профиля

Существуют другие способы размещения дискретных вихрей по хорде профиля, « $\frac{3}{4}$ » и «cos». В результате таких разбиений вихри сгущаются на носке профиля и на его хвостике, что дает хорошие результаты в расчете моментных характеристик. Расчет координат дискретных вихрей и контрольных точек для « $\frac{3}{4}$ » и «cos» выполняется с помощью выражений (9) и (10) соответственно:

$$\bar{x}_\mu = \frac{\mu - \frac{3}{4}}{n}, \bar{x}_\nu = \frac{\nu - \frac{1}{4}}{n}, \bar{y}_{\mu,\nu} = 0, \mu, \nu = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

$$\bar{x}_\mu = 0,5 \cdot \left(1 - \cos \frac{2 \cdot \mu - 1}{2 \cdot n} \cdot \pi\right), \bar{y}_\mu = 0 \quad \mu = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

$$\bar{x}_\nu = 0,5 \cdot \left(1 - \cos \frac{\nu \cdot \pi}{n}\right), \bar{y}_\nu = 0, \nu = 1, 2, \dots, n$$

Способ разбиения профиля по хорде выбирает исследователь в зависимости от поставленной задачи.

### 4 Система линейных алгебраических уравнений

Решение поставленной задачи сводится к СЛАУ (7), из которой определяются неизвестные циркуляции  $\Gamma_\mu$  присоединенных дискретных вихрей.



Достоверность получаемых результатов с помощью программы расчёта аэродинамических характеристик профиля для бесциркуляционного обтекания можно проконтролировать по теоретическим значениям (14):

$$c_{ya}^{\alpha} = 2 \cdot \pi; \quad m_z^{\alpha} = -\frac{\pi}{2}; \quad \bar{x}_F = -0,25 \quad (14)$$

Из рисунка 4 видно хорошее согласование данных полученных по представленной методике расчета с теоретическими значениями (14) Из этого можно утверждать о работоспособности разработанной методики расчета и достоверности полученных по ней результатов.

Практический интерес представляет получение моментных характеристик профиля при различных типах вихревых схем. На рисунке 5 представлены исследования моментных характеристик  $\Delta m_z^{\alpha}(n)$  (15) для различных вихревых схем при расположении на хорде профиля одинаковых количества дискретных вихрей.

$$\Delta m_z^{\alpha} = \frac{m_z^{\alpha} - m_{z\text{теор}}^{\alpha}}{m_{z\text{теор}}^{\alpha}} \cdot 100\% \quad (15)$$

Исследования показали, что использование нерегулярной сетки дает хорошие результаты при малом количестве дискретных вихрей. В свою очередь для получения точности регулярной сетки необходимо увеличивать количество вихрей, что приводит к увеличению процессорного времени. Поэтому оптимальной вихревой схемой при рассмотрении стационарного течения является размещение дискретных вихрей по  $\frac{3}{4}$  длины расчётного участка. Как показали дальнейшие исследования, при циркуляционном обтекании тонкого профиля хорошая сходимость обеспечивается схемой «cos»

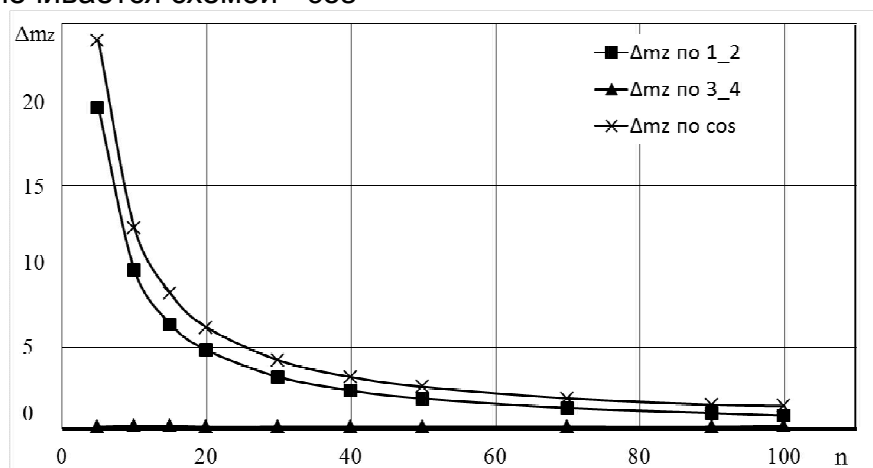


Рисунок 5 – Влияние количества вихрей на приращение производной  $m_z^{\alpha}$

## Вывод

Представленная математическая модель и методика расчета аэродинамических характеристик дает возможность получать достоверные аэродинамические характеристики профилей различных геометрических форм. Данная модель сочетает в себе простую методику расчета с обеспечением хорошей достоверности получаемых результатов. Может быть использована для изучения численных методов или на этапах предварительного аэродинамического проектирования новых

перспективных летательных аппаратов или воздушных винтов [3]. Данный метод позволяет существенно сократить затрачиваемое время при обтекании тел различной конфигурации.

### Список литературы

1. Белоцерковский, С. М. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью [Текст]/ С. М. Белоцерковский, М. И. Ништ. – М.: Наука, 1978. – 351 с.
2. Белоцерковский, С. М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. Моделирование на ЭВМ [Текст]/ С. М. Белоцерковский, И. К. Лифанов. – М.: Наука, 1985.
3. Yeryomenko, S. Mathematical Modeling of the Flow behind Propeller [Текст]/ S Yeryomenko, O Solovyov, V Kobrin. – USA Redfame Publishing, Beaverton.: Studies in Engineering and Technology, 2015. – 77-85 с.
4. Кочин, Н. Е. Теоретическая гидромеханика 2 [Текст]/ Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. – М.: ОГИЗ, 1948 – 612 с.

Поступила в редакцию: 11.11.2016

### Методика розрахунку потенційного обтікання профілю

Представлений підхід до математичного моделювання обтікання тонкого профілю потоком ідеальної нестислої рідини. Показано алгоритм розрахунку аеродинамічних характеристик тонкого профілю. Обговорюються результати досліджень описаної методики розрахунку.

**Ключові слова:** літальний апарат, профіль, метод дискретних вихорів, аеродинамічні характеристики.

### The Methodology for Calculating Potential Flow Profile

An approach to mathematical modeling of flow past a thin profile of the flow of an ideal incompressible fluid. The algorithm for calculating the aerodynamic characteristics of thin profile. We discuss the results of studies on the described method of calculation.

**Keywords:** aircraft, profile, the method of discrete vortices, aerodynamics.

### Сведения об авторах:

**Владимир Витальевич Красновольский** – студент кафедры 101 «Аэрогидродинамики», Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный университет», Украина.