Доцент-кандидат физико-математических наук ШУН М. С.

Об эффективном построении некоторых систем ортополиномов.

1. По заданному весу $d(x)$ можно построить единственную систему полиномов $\{P_n(x)\}$ удовлетворяющих условиям:

$$\int_E P_m(x)P_n(x)d(x) = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

Тогда, при некоторых ограничениях, заданную функцию $f(x)$ можно разложить в ряд Фурье: $f(x) \sim \sum_0^\infty a_k P_k(x)$ при этом коэфициенты a_k определяются по формулам Эйлера-Фурье: $a_k = \int_E f(x)P_k(x)d(x)$

Однако, общее выражение для $P_n(x)$ ввиде определителя мало пригодно для вычислений; поэтому естественно возникает задача разыскания всех систем ортополиномов, допускающих какое-либо компактное представление.

Поставленная задача аналогична задаче нахождения неопределенного интеграла от непрерывной функции: хотя решение всегда и существует, но в первую очередь рассматриваются те случаи, когда решение может быть получено в замкнутой форме.

2. Первым примером ортосистем была система полиномов, определяемая формулой Родрига $P_n(x)=\gamma_n D^n(x^2-1)^n$
$-1\leq x\leq +1$, $d\sigma(x)=\frac{1}{2}dx$
Позднее Чебышевым, Эрмитом, Лагерром и Якоби были даны примеры других ортосистем. Все эти системы классических ортополиномов допускали представление формулами Родрига, но можно доказать, что представление ортополинома формулой Родрига имеет место в весьма частных случаях.

3. Сперва Сеге /для частного случая/, а затем акад. Бернштейн /для общего случая/ построили по заданной ОП-системе, систему полиномов с весом $P(x)d\sigma(x)$, где $P(x)$ - полином, неимеющий нулей на интервале E.

Позднее Сеге построил ОП-систему для веса $\frac{d\sigma(x)}{P(x)}$. Комбинируя оба результата, можно построить ОП-систему для веса: $R(x)d\sigma(x)$ где $R(x)$ произвольная рациональная функция, неимеющая ни нулей, ни полюсов на E.

4. Н.И. Ахиезер построил систему /неполную/ полиномов, ортогональных на двух произвольных интервалах, затем В.Ф. Бржечка построил ОП-систему для случая двух симметричных интервалов.

Ему принадлежит прием построения ОП-системы для веса $(x)p(x^2)dx$ если задана ОП-система для веса $d\sigma(x)=P(x)dx$. Этот прием дает возможность удваивать число интервалов.

5. Каждой ОП-системе отвечает некоторая матрица Якоби и наоборот.

R-полиномы, определяемые формулой:

$$R_n(x)=\int_E \frac{P_n(x)-P_n(z)}{x-z}\,d\sigma(z)$$

имеют матрицей Якоби, усеченную матрицу данной ОП-системы.

Поэтому R-полиномы образуют также некоторую ОП-систему и вес их может быть найден с помощью формулы обращения Стильтьесса-Перрона.

6. Ортополином $P_n(x)$ и его R-полином $R_n(x)$ образуют систему линейно-независимых решений, некоторого конечноразностного уравнения. Поэтому любое его решение выражается так:

$$y_n(x)=C_1P_n(x)+C_2R_n(x)$$

Выбирая C_1 и C_2 так чтобы $y_n(x)$ был полином степени n получаем; система $\{y_n(x)\}$ есть ОП-система с варьированной матрицей Якоби.

7. В некоторых случаях уравнение в конечных разностях может быть проинтегрировано в замкнутой форме,

напр. в случае линейных коэфициентов, преобразование Лапласа дает возможность получить для ОП и его R-полинома выражение ввиде контурных интегралов.

Используя соотношение:

$$a(x) = \lim_{u \to \infty} \frac{R_n(x)}{P_n(x)}$$

мы, применяя формулу обращения Стильтьеса-Перрона, находим вес ортосистемы $\{P_n(x)\}$, а метод, изложенный в § 5 дает возможность найти вес ортосистемы $\{R_n(x)\}$.