УДК 539.3

Т. В. Денисова, В. С. Проценко

О крутильных колебаниях составного упругого полупространства

Харьковский национальный экономический университет им. Семена Кузнеца
Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»

Приведено решение задачи о крутильных осесимметричных гармонических колебаниях упругого радиально-неоднородного полупространства $z>0$, составленного из двух однородных частей с разными свойствами. Одна часть полупространства ($\rho<R$) имеет константы (ρ_1, μ_1), другая часть ($\rho>R$) – константы (ρ_2, μ_2), где ρ – полярный радиус, ρ_k, μ_k –соответственно плотность и модуль сдвига упругих частей полупространства. Решение получено на основе нового интегрального преобразования Ханкеля – Вебера на смешанном спектре, введенного авторами этой статьи. Отличительной особенностью рассмотренной задачи колебания от других подобных задач [1, 2] являются отдельные волны, бегущие вглубь полупространства без затухания. Число таких волн конечно и тем больше, чем сильнее отличаются материальные константы частей, составляющих полупространство. В однородной среде таких волн нет.

Ключевые слова: составное упругое полупространство, крутильные колебания, новое интегральное преобразование на смешанном спектре, точное решение, бегущие волны.

Введение

Крутильные гармонические колебания радиально-неоднородного упругого полупространства, составленного из двух частей с различными материальными константами, ранее никем не рассматривались. В научной литературе [1, 2] исследований по этому вопросу авторы статьи не обнаружили. Между тем, эта задача требует для своего точного решения нового интегрального преобразования и имеет особенность, существенно отличающую ее от аналогичной задачи для однородного полупространства. В рассматриваемой задаче при некоторых условиях появляются отдельные изолированные волны, бегущие вглубь полупространства с неизменной амплитудой. Из приведенного в работе решения как частный случай следует решение задачи для однородного тела.

1. Постановка задачи и основные уравнения

Граница неоднородного полупространства $z>0$ подвержена действию крутящих усилий $\tau_{z\varphi}=f(\rho)e^{i\omega t}$ на круге конечного радиуса. Считаем, что ось Oz направлена внутрь упругого тела. Надо найти решение системы уравнений колебаний

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial w_k}{\partial\rho}-\frac{w_k}{\rho^2}+\frac{\partial^2 w_k}{\partial z^2}=\left(\frac{\rho_k}{\mu_k}\right)\frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} \qquad (1.1)$$

в областях ($\rho<R,\ k=1$) и ($\rho>R,\ k=2$) при условиях непрерывности перемещений и напряжений на поверхности $\rho=R$. На бесконечности примем условие ограниченности углового перемещения $w_2(\rho,z,t)$, а зависимость для перемещения от времени – в виде $w_k=u_k(\rho,z)e^{i\omega t}$, где ω – частота колебаний.

Тогда для комплексной амплитуды u_k получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_k}{\partial\rho}-\frac{u_k}{\rho^2}+\frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2}+\omega_k^2 u_k=0\,,\quad \omega_k^2=\omega^2\frac{\rho_k}{\mu_k} \qquad (1.2)$$

с краевым условием на поверхности $z=0$: $\tau_{\rho\varphi}=f(\rho)$.

Будем решать уравнение (1.2) методом разделения переменных, в соответствии с которым положим:

$$u_k(\rho,z)=R_k(\rho)e^{-\sqrt{r}z}\,, \qquad (1.3)$$

где r – параметр разделения (спектральный параметр).

В результате приходим к задаче Штурма-Лиувилля (Ш–Л): найти те значения спектрального параметра r, для которых решения уравнений:

$$R_k''+\rho^{-1}R_k'-\rho^{-2}R_k+\left(r+\omega_k^2\right)R_k=0 \quad (k=1,2),$$

с граничными условиями $R_1(0)=0$, $R_2(\infty)<\infty$ и условиями сопряжения

$$R_1(R)=R_2(R)\,,\quad \mu_1\frac{d}{d\rho}\left(\frac{R_1(\rho)}{\rho}\right)\Bigg|_{\rho=R}=\mu_2\frac{d}{d\rho}\left(\frac{R_2(\rho)}{\rho}\right)\Bigg|_{\rho=R}, \qquad (1.4)$$

являются ненулевыми.

Последнее условие в (1.4) есть условие равенства касательных напряжений $\tau_{r\varphi}=\mu\rho(\rho^{-1}u)'_{\rho}$ на поверхности раздела упругих сред.

Стандартным способом устанавливаем, что задача (Ш–Л) имеет действительный спектр. Предположим, что ее решение $R(\rho,r)=[R_1(\rho,r),R_2(\rho,r)]^T$ найдено. Тогда перемещение $u(\rho,z)$ можно записать в виде

$$u(\rho,z)=[u_1,u_2]^T=\int_{-\infty}^{\infty}A(r)e^{-\sqrt{r}z}R(\rho,r)\,dr\,, \qquad (1.5)$$

где $A(r)$ – произвольная функция.

Из краевого условия на границе полупространства: $\tau_{z\varphi}(\rho,0)=\mu\cdot u_z'\big|_{z=0}=f(\rho)$, находим уравнение для определения неизвестной функции $A(r)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}A(r)\sqrt{r}R(\rho,r)\,dr=t(\rho)\,,\quad \rho\in(0,\infty)\,, \qquad (1.6)$$

где $t(\rho)=\mu^{-1}(\rho)f(\rho)$, $\mu(\rho)=\begin{cases}\mu_1, & \rho\in(0,R),\\ \mu_2, & \rho>R.\end{cases}$

Задача сведена к обращению равенства (1.6) относительно функции $A(r)$.

2. Интегральное преобразование Ханкеля–Вебера на смешанном спектре

Исследуем поставленную выше задачу (Ш–Л). Будем различать два случая: а) $\omega_2>\omega_1$; б) $\omega_1>\omega_2$. Как легко проверить, в первом случае спектр задачи непрерывный и расположен на полупрямой $r>-\omega_2^2$. Во втором случае спектр – смешанный, причем его непрерывная часть та же, что и в первом случае, а дискретная часть находится на интервале $(-\omega_1^2,-\omega_2^2)$. Этот, более интересный с точки зрения приложений, случай и будем дальше рассматривать.

Собственные функции для точечной части спектра имеют вид:

$$Z(\rho,r_k)=\begin{cases} J_1(\gamma_k\rho)\cdot K_1(\delta_k R), & \rho\in(0,R), \\ K_1(\delta_k\rho)\cdot J_1(\gamma_k R), & \rho>R, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\gamma_k=\sqrt{r_k+\omega_1^2}\,,\ \delta_k=\sqrt{-r_k-\omega_2^2}\,.$$

Здесь r_k – простые корни уравнения

$$\mu_{21}\frac{J_1(\xi)}{\xi\cdot J_2(\xi)}=\frac{K_1\left(\sqrt{g^2-\xi^2}\right)}{\sqrt{g^2-\xi^2}\cdot K_2\left(\sqrt{g^2-\xi^2}\right)},\quad \xi\in(0,g), \tag{2.2}$$

$$\mu_{21}=\mu_2/\mu_1,\quad \xi=R\sqrt{\omega_1^2+r},\quad g=R\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2},\ r\in(-\omega_1^2,-\omega_2^2),$$

где $J_n(x)$, $K_n(x)$ – функции Бесселя [3].

Корни уравнения (2.2) легко обнаруживаются графически*.

Если построить графики функций, которые стоят в равенстве (2.2) слева и справа, и совместить их в одной системе координат, то станет ясно, что число корней зависит от величины параметра g, т. е. от разности ω_1 и ω_2 при заданном значении R. Этих корней будет тем больше, чем больше эта разность.

Для непрерывной части спектра имеем собственные функции:

$$R(\rho,r)=\begin{cases} 2(\pi/R)J_1(\alpha_1\rho)\alpha_1^{-1}, & \rho\in(0,R), \\ BJ_1(\alpha_2\rho)+CY_1(\alpha_2\rho), & \rho>R, \end{cases} \tag{2.3}$$

$$B=\mu_{21}^{-1}J_2(\alpha_1 R)\cdot Y_1(\alpha_2 R)-\alpha_2\alpha_1^{-1}J_1(\alpha_1 R)\cdot Y_2(\alpha_2 R),$$

где $C=\alpha_2\alpha_1^{-1}J_1(\alpha_1 R)\cdot J_2(\alpha_2 R)-\mu_{21}^{-1}J_1(\alpha_2 R)\cdot J_2(\alpha_1 R)$, $\alpha_k=\sqrt{r+\omega_k^2}$,

$Y_n(x)$ – второе линейно независимое с $J_n(x)$ решение уравнения Бесселя [3].

Разложение произвольной функции $f(x)$ по собственным функциям задачи (Ш–Л) получим, используя операционный метод [4]. Опуская вычисления, приведем окончательный результат:

$$f(x)=\frac{1}{2\mu_{21}}\int_{-\omega_2^2}^{\infty}\frac{\tilde f(r)dr}{\Delta(r)}R(x,r)+\sum_{n=1}^{N}\frac{\tilde\varphi(r_n)}{\omega(r_n)}Z(x,r_n),\quad x>0, \tag{2.4}$$

где N – число корней уравнения (2.2),

$$\tilde f(r)=\int_0^\infty f(y)R(y,r)\cdot\sigma(y)ydy,\quad \tilde\varphi(r_n)=\int_0^\infty f(y)Z(y,r_n)\sigma(y)dy, \tag{2.5}$$

---

*) При некоторых значениях параметров μ_k, ω_k, R возможно собственное значение $r=-\omega_2^2$, которому отвечает простейшая собственная функция $z(\rho,\gamma)=\left[J_1\left(\sqrt{\gamma}\rho\right),J_1\left(\sqrt{\gamma}R\right)R\rho^{-1}\right]^T$, $\gamma=\omega_1^2-\omega_2^2$. Будем его называть *исключительным* и считать, что такого собственного значения у нас нет.

$$\Delta(r) = B^2(r) + C^2(r), \quad \omega(r_n) = R\mu_1^{-1}K_1(\delta_n)J_1(\gamma_n)\Delta_n,$$

$$\sigma(y) = \begin{cases} 1, & y \in (0, R); \\ \mu_{21}, & y > R; \end{cases}$$

$$2R^{-2}\Delta_n = \mu_2\delta_n\gamma_n^{-1}J_2(\gamma_n)K_2(\delta_n) + (\mu_1 - \mu_2)\gamma_n^{-1}J_1(\gamma_n)K_1(\delta_n) +$$
$$+ \mu_1\left(2\gamma_n^{-2} - \delta_n^{-1}\right)K_1(\delta_n)J_2(\gamma_n) - \mu_2\left(\gamma_n\delta_n\right)^{-1}J_1(\gamma_n)K_2(\delta_n) + \mu_1\delta_n^{-1}J_2(\gamma_n)K_0(\delta_n).$$

Отметим, что сумма в (2.4) появилась из-за наличия дискретной части спектра (полюсов функции Грина) в задаче (Ш–Л). Если $\omega_1 = \omega_2$, то уравнение (2.2) не имеет корней и сумма в (2.4) пропадает. Эта сумма отсутствует также и при $\omega_2 > \omega_1$, но само интегральное разложение остается справедливым и в этом случае. Пара формул (2.4), (2.5) представляет собой прямое и обратное интегральное преобразование, которое назовем преобразованием Ханкеля–Вебера. Класс функций, для которых применимо найденное разложение, тот же, что и в классическом преобразовании Ханкеля.

Обозначим правую часть в формуле (2.4) через $i(x)$. Тогда справедливы равенства:

$$i(x) = \frac{1}{2}\left[f(x-0) + f(x+0)\right] \text{ при } x \in ((0, R) \cup (R, \infty)), \tag{2.6}$$

$$i(R) = (\mu_1 + \mu_2)^{-1}\left[\mu_1 f(R-0) + \mu_2 f(R+0)\right].$$

Отметим частные случаи найденного преобразования.

1. Положим $\mu_1 = \mu_2$, $\rho_1 = \rho_2$. После замены $r + \omega_2^2 = \lambda^2$ получаем классическое преобразование Ханкеля [3].

2. При $\omega = \mu_1 = 0$ имеем преобразование Вебера–Орра [3] на $\rho > R$:

$$\int_0^\infty \tilde{f}(\lambda)\Delta_1^{-1}(\lambda)R_2(\rho, \lambda)\lambda d\lambda = f(\rho), \quad \int_R^\infty f(\rho)R_2(\rho, \lambda)\rho d\rho = \tilde{f}(\lambda),$$

$$\Delta_1(\lambda) = J_2^2(R\lambda) + Y_2^2(R\lambda), \quad R_2(\rho, \lambda) = J_2(R\lambda)Y_1(\lambda\rho) - J_1(\lambda\rho)Y_2(R\lambda),$$

с краевым условием $\left(\rho^{-1}R_2\right)'_\rho = 0$ в точке $\rho = R$.

3. Если $\omega = 0$, $\mu_1 = \mu_2 k$ и $k \to \infty$, то получим другое преобразование Вебера–Орра с краевым условием $R_2(R, \lambda) = 0$. При этом:

$$\Delta_2(\lambda) = J_1^2(R\lambda) + Y_1^2(R\lambda), \quad R_2(\rho, \lambda) = J_1(\rho\lambda)Y_1(R\lambda) - Y_1(\rho\lambda)J_1(R\lambda).$$

3. Решение задачи о колебании полупространства

В силу того, что преобразование (2.4) представлено суммой двух слагаемых по дискретным и непрерывным точкам спектра, равенства (1.5), (1.6) следует заменить равенствами:

$$u(\rho,z)=\int\limits_{-\omega_2^2}^{\infty} A(r)e^{-\sqrt{r}z}R(\rho,r)dr+\sum_{n=1}^{N}a_n e^{-\sqrt{r_n}z}Z(\rho,r_n), \tag{3.1}$$

$$\int\limits_{-\omega_2^2}^{\infty} A(r)\sqrt{r}R(\rho,r)dr+\sum_{n=1}^{N}a_n\sqrt{r}Z(\rho,r_n)=t(\rho),\quad \rho>0, \tag{3.2}$$

где наряду с функцией $A(r)$ неизвестны и коэффициенты a_n. Для их определения воспользуемся формулами (2.5). В результате получим:

$$A(r)=\left[2\mu_{21}\sqrt{r}\cdot\Delta(r)\right]^{-1}\int\limits_0^{\infty}t(y)\varphi(y)yR(y,r)dy, \tag{3.3}$$

$$a_n=\left[\sqrt{r_n}\omega(r_n)\right]^{-1}\cdot\int\limits_0^{\infty}t(y)\varphi(y)yZ(y,r_n)dy. \tag{3.4}$$

Формулы (3.1), (3.3), (3.4) дают точное формальное решение задачи $u(\rho,z)=[u_1,u_2]^T$, но оно не является вполне определенным, так как при отрицательных значениях параметра r главная ветвь функции $\sqrt{r}$ имеет два значения $\pm i\sqrt{|r|}$. Для того, чтобы решение задачи было физически корректным, выберем значение главной ветви $\sqrt{r}$ так, чтобы $\arg\sqrt{r}=\pi/2$ при $r<0$. Другими словами, в интеграле (3.1) точка ветвления $r=0$ в комплексной плоскости с разрезом обходится сверху по бесконечно малой полуокружности. При таком выборе значений ветви $\sqrt{r}$ в формуле (3.1) решение $w(\rho,z,t)=u(\rho,z)e^{i\omega t}$ будет содержать сомножители вида $e^{-i\sqrt{|r_n|}(z-b_n t)}$, $e^{-i\sqrt{|r|}(z-b(r)t)}$ под знаками суммы и интеграла, где $b_n=\omega\sqrt{|r_n|^{-1}}$, $b(r)=\omega\sqrt{|r|^{-1}}$. Эти сомножители представляют собой отдельные, бегущие от источника волны, распространяющиеся с разными скоростями вдоль положительного направления оси Oz, т. е. вглубь полупространства. Энергию переносят именно эти бегущие волны. Первая группа волн, соответствующая дискретной части спектра, – незатухающие волны. Вторая группа волн, порождаемая непрерывной частью спектра $r\in(-\omega_2^2,0)$ – это волны с убывающей к нулю амплитудой при $z\to\infty$. Кроме того, решение $w(\rho,z,t)$ содержит и стоячие волны $(r>0)$, которые энергию не переносят.

Заключение и выводы

1. В статье впервые поставлена и решена задача о гармонических осесимметричных крутильных колебаниях упругого радиально-неоднородного полупространства, составленного из двух однородных частей.

2. Исследована природа спектра неклассической задачи Штурма–Лиувилля для оператора Бесселя с разрывными коэффициентами на полубесконечном интервале. Выявлено, что спектр такой задачи может быть как непрерывным, так и смешанным. Дискретная часть спектра может содержать, при некоторых условиях на параметры задачи, исключительное собственное значение.

3. Получено новое интегральное разложение Ханкеля–Вебера по собственным функциям этой неклассической спектральной задачи (учет исключительного собственного значения, если таковое будет, приведет к дополнительному слагаемому в формуле разложения (2.4)). Найденное преобразование позволило получить точное решение задачи колебания.

4. Установлено, что точечный спектр порождает конечное число отдельных волн, бегущих от источника в глубь упругого полупространства без затухания.

Список литературы

1.Развитие теории контактных задач в СССР [Текст]. – М. : Наука, 1976. – 493 с.

2. Ворович, И. И. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей [Текст] / И. И. Ворович, В. А. Бабешко. – М. : Наука, 1979. – 320 с.

3. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции [Текст] / Г. Бейтмен, А. Эрдейн. – М. : Наука, 1966. – Т.1. – 295 с.

4. Уфлянд, Я. С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики [Текст] / Я. С. Уфлянд // Вопросы математической физики. – Л. : Наука. – 1976. – С. 93 – 106.

Поступила в редакцию 11.09.2017

Про крутильні коливання складеного пружного півпростору

Наведено точний розв'язок задачі про крутильні осесиметричні гармонічні коливання пружного радіально-неоднорідного півпростору, складеного з двох однорідних частин з різними матеріальними константами. Розв'язок отримано за допомогою нового інтегрального перетворення Ханкеля – Вебера на мішаному спектрі, одержаного авторами статі. Виявлено поодинокі хвилі, які прямують вглиб півпростору без затухання.

Ключові слова: складений пружний півпростір, крутильні коливання, нове інтегральне перетворення на мішаному спектрі, точний розв'язок, біжучі хвилі.

On the Torsional Vibrations of the Composite Elastic Half-Space

Exact solution of the problem of the torsional axisymmetric harmonic vibrations of elastic radial-inhomogeneous half-space, composed of two homogeneous parts with different material constants, is given. The solution is obtained using the new Hankel – Weber integral transformation on the mixed spectrum, introduced by the authors of the article. Single waves, running into the half-space without attenuation, are found out.

Key words: composite elastic half-space, torsional vibrations, the new integral transformation on a mixed spectrum, exact solution, traveling waves.