

Л. А. КОЛЕСНИКОВ

УРАВНЕНИЯ ИЗГИБА УПРУГИХ ПЛАСТИН ПРИ УЧЕТЕ
УТОЧНЕННОГО ВЫРАЖЕНИЯ КРИВИЗНЫ

Задачи исследования

Интенсивное развитие теории устойчивости и несущей способности пластин и оболочек является одной из самых актуальных задач прикладной теории упругости и пластичности.

Для исследования несущей способности гибких упругих пластин в закритической стадии, с учетом конечных перемещений, используются уравнения Кармана [3], [4].

Однако в теоретических исследованиях, использующих уравнения Кармана, отмечается их приближенный характер, но не дается оценок степени приближения и пределов применимости уравнений, недостаточно полно освещаются исходные основы их получения.

Данная работа преследует следующие цели:

1. Указать физическую сущность и определить возможные порядки величин, составляющих тензор конечных деформаций, на основании которого строятся уравнения конечных перемещений пластин.
2. Дать анализ исходным основам приближенных уравнений изгиба пластин. Произвести оценки принимаемых при этом приближений, указать численные величины погрешностей. На основании этих оценок дать соображения о возможных пределах применимости приближенных уравнений.
3. Построить более точную систему уравнений изгиба пластин, опираясь на уточненные выражения кривизны.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ

В данной работе рассматриваются большие перемещения упругих пластин. Перемещениями названы угловые повороты элементов пластины, прогибы, сближение концов (они характеризуют непосредственно изменение формы тела — изогнутую поверхность пластины). Деформациями названы удлинения и сдвиги (они характеризуют деформированное состояние в точках тела, а с учетом физического закона, в пределах упругости — закона Гука, и напряженное состояние). На необходимость строго разграничения понятий деформация и перемещение указал В. В. Новожилов [6].

Под малыми деформациями будем понимать удлинения (e_i) и сдвиги (γ_{ik}) значительно меньшие единицы

$$e_i \ll 1, \quad \gamma_{ik} \ll 1; \quad (1.1)$$

под малыми перемещениями — угловые повороты и линейные перемещения значительно меньшие единицы и наименьшего линейного размера тела соответственно.

Помимо допущения (1.1), при выводе уравнений изгиба пластин приняты постулаты Кирхгофа-Лява, которые позволяют считать, что элемент параллельного срединной поверхности слоя пластины находится в условиях плоского напряженного состояния.

Вопрос о допустимости принятия постулатов Кирхгофа-Лява при исследовании изгиба пластин и оболочек подробно рассмотрен В. В. Новожиловым [6].

§ 2. СВЯЗЬ МЕЖДУ ДЕФОРМАЦИЯМИ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ

Перемещения определяются с помощью вектора смещений \bar{V} . Теория конечных деформаций устанавливает связь между вектором смещений (его производными) и деформациями (удлиннениями и сдвигами). Эта связь в ортогональной декартовой системе ориентировки выражается следующими соотношениями [7]¹:

$$\left. \begin{aligned} (1 + e_i)^2 &= g_{ii} \\ \sin \gamma_{ik} &= \frac{g_{ik}}{(1 + e_i)(1 + e_k)} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

($i, k = 1, 2, 3$)

Здесь $g_{ik} = \bar{r}_i \cdot \bar{r}_k$ — скалярное произведение векторов базиса деформированного состояния, в которые переходят векторы \bar{i}_i, \bar{i}_k ($i, k = 1, 2, 3$) основного базиса недеформированного состояния;

e_i — удлинение волокна, направленного до деформации вдоль \bar{i}_i ;

γ_{ik} — изменение угла между векторами основного базиса \bar{i}_i и \bar{i}_k ($i, k = 1, 2, 3$) недеформированного состояния при переходе их вследствие деформации в векторы \bar{r}_i и \bar{r}_k основного базиса деформированного состояния.

В недеформированном состоянии среда отнесена к прямоугольной декартовой системе ориентировки с координатами x^i ($i = 1, 2, 3$) и основным базисом \bar{i}_i ($i = 1, 2, 3$).

Величины g_{ik} выражаются через компоненты вектора смещений \bar{V}

$$\bar{V} = v^a \bar{i}_a = v^1 \bar{i}_1 + v^2 \bar{i}_2 + v^3 \bar{i}_3 \quad (2.2)$$

по формуле

$$g_{ik} = \delta_{ik} + \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i} + \frac{\partial v^1}{\partial x^i} \frac{\partial v^1}{\partial x^k} + \frac{\partial v^2}{\partial x^i} \frac{\partial v^2}{\partial x^k} + \frac{\partial v^3}{\partial x^i} \frac{\partial v^3}{\partial x^k}, \quad (2.3)$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases} \quad (2.4)$$

Формулы (2.1) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} e_i \left(1 + \frac{e_i}{2}\right) &= \frac{1}{2} (g_{ii} - 1) \\ \gamma_{ik} &= \arcsin \frac{g_{ik}}{(1 + e_i)(1 + e_k)} \approx \frac{g_{ik}}{1 + e_i + e_k + e_i e_k} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Замена угла синусом дает малые погрешности даже при больших γ_{ik} . Например, при $\gamma_{ik} \sim 0,25$ погрешность второго из уравнений (2.5) будет меньше 1%.

¹ В наиболее общем виде связь между деформациями и вектором смещений получена В. И. Блохом в работе «О конечных деформациях» (Науч. зап. ХММИ, т. 5, 1940).

Так как настоящее исследование проводится в пределах упругости, то можно считать допущение (1.1) справедливым, поэтому для удлинений и сдвигов из (1.6) получим более простые выражения

$$\left. \begin{aligned} e_i &= \frac{1}{2}(g_{ii} - 1) = \epsilon_{ii} \\ \gamma_{ik} &= g_{ik} = 2\epsilon_{ik} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Здесь ϵ_{ii} и ϵ_{ik} — компоненты тензора конечных деформаций.

Принятие (2.6) вместо (2.5) вносит относительные погрешности

$$\left. \begin{aligned} \Delta(e_i) &= \frac{e_i}{2} \\ \Delta(\gamma_{ik}) &= e_i + e_k + 0(e_i e_k) \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Отсюда устанавливаются пределы допустимости (2.6). Область упругих деформаций (для сталей) ограничивается удлинениями, имеющими величину порядка

$$e_{\max}^{\text{упр}} \sim 10^{-3} \div 5 \cdot 10^{-3}. \quad (2.8)$$

При таких удлинениях погрешность в определении γ_{ik} будет

$$\Delta(\gamma_{ik}) \sim 0,2\% - 1\%.$$

Компоненты тензора деформаций (ϵ_{ik}), с учетом выражения для g_{ik} по (2.3), имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{1}{2}(g_{11} - 1) = \frac{\partial v^1}{\partial x^1} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial v^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^2}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^3}{\partial x^1} \right)^2 \right\} \\ \epsilon_{12} &= \frac{1}{2} g_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^2}{\partial x^1} + \frac{\partial v^1}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^1}{\partial x^1} \frac{\partial v^1}{\partial x^2} + \frac{\partial v^2}{\partial x^1} \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial v^3}{\partial x^1} \frac{\partial v^3}{\partial x^2} \right) \\ &\text{и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

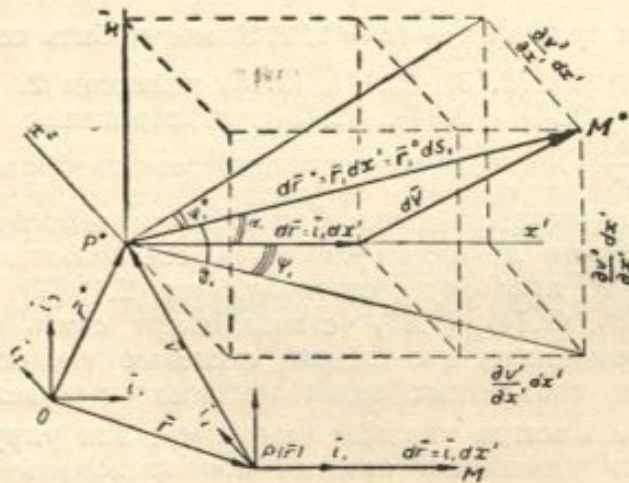


Рис. 1.

Для выяснения физического (геометрического) смысла величин $\frac{\partial v^i}{\partial x^k}$, составляющих компоненты тензора деформаций, рассмотрим деформацию одного элемента окрестности точки $P(\vec{r})$. В качестве такого элемента выберем $d\vec{r} = \vec{i}_1 dx^1$, который вследствие деформирования переходит в $d\vec{r}^*$ (рис. 1),

$$d\vec{r}^* = \vec{r}_1 dx^1 = \vec{i}_1 \left(1 + \frac{\partial v^1}{\partial x^1} \right) dx^1 + \vec{i}_2 \frac{\partial v^2}{\partial x^1} dx^1 + \vec{i}_3 \frac{\partial v^3}{\partial x^1} dx^1. \quad (2.10)$$

На рисунке 1 и в тексте звездочками обозначены векторы и точки деформированного состояния.

Вектор $\bar{r}_1 dx^1$ можно представить с помощью орта \bar{r}_1^0 в виде

$$\bar{r}_1 dx^1 = \bar{r}_1^0 (1 + e_1) dx^1 = \bar{r}_1^0 ds_1, \quad (2.11)$$

где ds_1 — длина вектора $d\bar{r}^* = \bar{r}_1 dx^1$, в который вследствие деформации переходит вектор $d\bar{r} = \bar{i}_1 dx^1$.

Как видно из рисунка 1, косинус угла между элементом $d\bar{r} = \bar{i}_1 dx^1$, взятым до деформации, и тем же элементом $d\bar{r}^* = \bar{r}_1 dx^1$, взятым после деформации, равен

$$\cos(\widehat{\bar{r}_1 \bar{i}_1}) = \cos \alpha_1 = \frac{(1 + \frac{\partial v^1}{\partial x^1}) dx^1}{ds_1} \quad (2.12)$$

или, на основании (2.11),

$$\frac{\partial v^1}{\partial x^1} = (1 + e_1) \cos \alpha_1 - 1. \quad (2.13)$$

Выражение (2.13) вскрывает физический смысл величины $\frac{\partial v^1}{\partial x^1}$.

Далее, для $\frac{\partial v^2}{\partial x^1}$ имеем

$$\frac{\partial v^2}{\partial x^1} = (1 + e_1) \sin \psi_1^0, \quad (2.14)$$

где ψ_1^0 — угол наклона элемента $\bar{r}_1^0 ds_1$ к плоскости $x^2 = \text{const}$.

Аналогично выражается величина $\frac{\partial v^3}{\partial x^1}$ через $\sin \theta_1$, где θ_1 — угол наклона элемента $\bar{r}_1^0 ds_1$ к плоскости $x^3 = \text{const}$, в которой он находился до деформации,

$$\frac{\partial v^3}{\partial x^1} = (1 + e_1) \sin \theta_1. \quad (2.15)$$

Формулы для величин $\frac{\partial v^a}{\partial x^2}$ ($a = 1, 2, 3$) могут быть получены заменой индекса 1 в формулах (2.13), (2.14), (2.15) индексом 2.

Соотношения (2.13), (2.14), (2.15) устанавливают геометрический смысл величин $\frac{\partial v^i}{\partial x^k}$. Они получены из рассмотрения деформации одного линейного элемента окрестности точки $P(\bar{r})$ деформируемого тела. Рассмотрение всей совокупности линейных элементов, соединяющих точки окрестности с полюсом P , приводит к соотношениям (2.1) [7]. Таким образом, соотношения (2.13), (2.14), (2.15) устанавливают связь между вектором смещений и деформациями e_i с той же степенью точности, что и (2.1).

При решении конкретных задач максимальные величины удлинений e_i^{max} могут быть всегда указаны (например, для упругих задач e_i^{max} меньше или равно удлинению предела пропорциональности). На этом основании, учитывая пределы изменения тригонометрических величин, с помощью соотношений (2.13), (2.14) и (2.15) можно установить пределы, в которых изменяются величины $\frac{\partial v^i}{\partial x^k}$,

$$\left. \begin{aligned} -(2 + e_i^{\text{max}}) &\leq \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \leq e_i^{\text{max}} \\ -(1 + e_i^{\text{max}}) &\leq \frac{\partial v^k}{\partial x^i} \leq (1 + e_i^{\text{max}}) \\ (i \neq k; i, k = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Из неравенств (2.16) следует, что при произвольных перемещениях величины $\frac{\partial v^i}{\partial x^k}$, которые характеризуют угловые перемещения элементов

деформируемого тела (рис. 1) и (2.13)—(2.16), имеют порядок единицы. В пределах упругости удлинения и сдвиги значительно меньше единицы (1.1), (2.8). На этом основании можно заключить, что удлинения ϵ_i и сдвиги γ_{ik} выражаются по формулам (2.6), (2.9) как малые разности больших чисел. Поэтому при упрощении соотношений (2.6), (2.9) необходимо следить, чтобы отбрасываемые члены были достаточно малы в сравнении с искомыми деформациями.

§ 3. СИСТЕМА КООРДИНАТ, СВЯЗАННАЯ С СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПЛАСТИНЫ

Помимо прямоугольной декартовой системы ориентировки недеформированного состояния с координатами x^i ($i = 1, 2, 3$) и базисом \bar{i}_i ($i = 1, 2, 3$), свяжем со срединной поверхностью пластины некоторую криволинейную систему с координатами s_1, s_2, z и базисом \bar{r}_i^0 ($i = 1,$

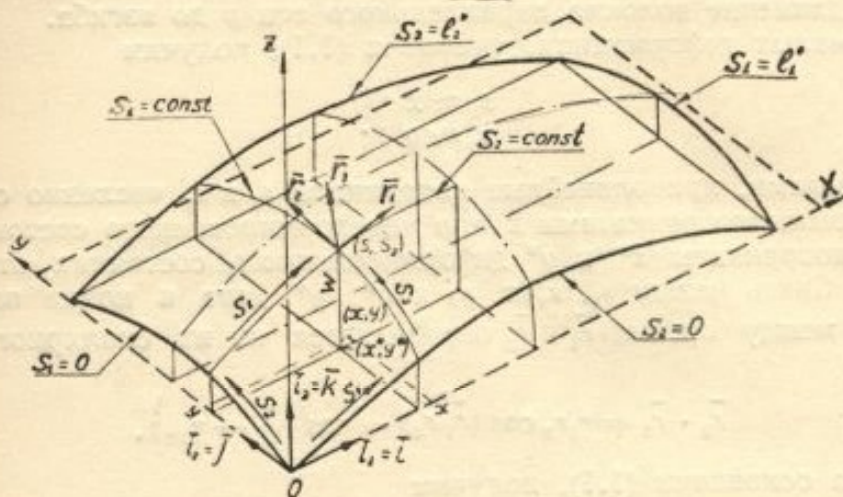


Рис. 2.

2, 3) (z — расстояние точки пластины от срединной поверхности). Для прямоугольных пластин удобно принять s_1 и s_2 совпадающими соответственно с x^1 и x^2 до приложения внешних сил и начала изгиба (рис. 2). При этом орты \bar{r}_i^0 ($i = 1, 2, 3$) в недеформированном состоянии совпадают с ортами базиса декартовой системы ориентировки \bar{i}_i . В декартовой системе ориентировки принято обозначать

$$\left. \begin{aligned} x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \\ \bar{i}_1 = \bar{i}, \quad \bar{i}_2 = \bar{j}, \quad \bar{i}_3 = \bar{k} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

В изогнутой пластине орты \bar{r}_1^0 и \bar{r}_2^0 направлены по касательным к линиям $s_1 = \text{const}$, $s_2 = \text{const}$, соединяющим точки срединной поверхности, которые в недеформированном состоянии лежали на линиях $x^1 = x = \text{const}$, $x^2 = y = \text{const}$. Орт \bar{r}_3^0 направлен по нормали к срединной поверхности.

Так как в дальнейшем с системой координат s_1, s_2, z будут связаны только орты \bar{r}_i^0 ($i = 1, 2, 3$), индекс ноль будем опускать и примем обозначения:

$$\bar{r}_i^0 = \bar{r}_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.2)$$

На рисунке 2 пунктиром показана срединная поверхность до изгиба и сплошными линиями—после изгиба; показаны координатные линии s_1 и s_2 , орты базисов \bar{i}_i и \bar{r}_i . Точка с координатами недеформированного со-

стояния (x, y) после изгиба переходит в точку (s_1, s_2) или (x^*, y^*, w) , где x^*, y^* — декартовы координаты деформированного состояния и w — прогиб пластины.

Связь между координатами s_1, s_2 и x, y устанавливается с помощью следующих соотношений:

$$\left. \begin{aligned} ds_1 &= (1 + e_1) dx \\ ds_2 &= (1 + e_2) dy \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

или

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \int_0^x (1 + e_1) dx \\ s_2 &= \int_0^y (1 + e_2) dy \end{aligned} \right\}, \quad (3.4)$$

где e_1 — удлинение волокна параллельного оси x до изгиба;

e_2 — удлинение волокна параллельного оси y до изгиба.

При малых деформациях, учитывая (1.1), получим

$$\left. \begin{aligned} s_1 &\approx x \\ s_2 &\approx y \end{aligned} \right\}. \quad (3.5)$$

Иными словами, криволинейные координаты s_1 и s_2 численно совпадают с декартовыми координатами x и y недеформированного состояния. Декартовы координаты x^* и y^* деформированного состояния отличаются от x и y . Связь между $s_1, s_2(x, y)$ и x^*, y^* дана в конце параграфа.

Угол между ортами \bar{r}_1 и \bar{r}_2 определяется из их скалярного произведения

$$\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2 = r_1 r_2 \cos(\widehat{\bar{r}_1 \bar{r}_2}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{12}\right),$$

откуда, на основании (1.1), получим

$$\cos(\widehat{\bar{r}_1 \bar{r}_2}) \approx 0,$$

т. е. орты \bar{r}_1 и \bar{r}_2 ортогональны, а орт \bar{r}_3 ортогонален к ним по условию. Таким образом, заключаем, что при малых деформациях базис \bar{r}_i можно приближенно считать ортогональным.

Определяя угловые перемещения, допустим, что при изгибе каждый элементарный четырехугольник со сторонами ds_1 и ds_2 (или базис $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$) поворачивается вокруг оси, лежащей в плоскости xOy , а поворотом его вокруг оси с ортом \bar{k} можно пренебречь.

На рисунке 3 показан элемент пластины после ее изгиба. Вследствие изгиба элемент (и с ним базис \bar{r}_i) повернулся на угол φ вокруг оси с ортом \bar{i}

$$\bar{i} = l\bar{i} + m\bar{j} + (0)\bar{k},$$

т. е. ось \bar{i} лежит в плоскости xOy .

Зная направляющие косинусы орта \bar{i} и угол поворота φ , можно определить через них направляющие косинусы ортов \bar{r}_i ($i = 1, 2, 3$). Не приводя здесь подробных выкладок, связанных с понятием верзора (аффинора) поворота [7, гл. II, § 14], выпишем готовые формулы для случая поворота элемента на угол φ вокруг оси, равнонаклоненной к осям x и y . В этом случае

$$\bar{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j} \quad (3.6)$$

Формулы (3.9) можно упростить, принимая за основные углы ϑ_1 и ϑ_2 и полагая

$$\left. \begin{aligned} \cos \psi_1 \approx \cos \psi_2 \approx 1 \\ \alpha_1 \approx \vartheta_1, \alpha_2 \approx \vartheta_2 \end{aligned} \right\}. \quad (3.11)$$

При этом получим

$$\left. \begin{aligned} dx^* \approx ds_1 \cos \vartheta_1 \\ dy^* \approx ds_2 \cos \vartheta_2 \end{aligned} \right\}. \quad (3.12)$$

О погрешностях допущений (3.11) можно судить по их величинам в таблице 1, где они приведены в зависимости от угла φ .

Таблица 1

φ	Погрешность в % при замене			
	$\sin \alpha_i \approx \sin \vartheta_i$ ($i = 1, 2$)	$\cos \psi_i \approx 1$ ($i = 1, 2$)	$\sin \vartheta_i \approx \vartheta_i$ ($i = 1, 2$)	$\cos \vartheta_i \approx 1$ ($i = 1, 2$)
$45^\circ \left(\frac{\pi}{4}\right)$	4.2	1.4	4.7	15.5
$30^\circ \left(\frac{\pi}{6}\right)$	1.7	0.2	2.2	6.8
$14^\circ (\sim 0,24)$	0.36	—	0.59	1,5
$8^\circ (\sim 0,14)$	0.12	—	0.2	0,4

В заключение отметим, что ось \bar{t} (3.6) выбрана равнонаклоненной к осям x и y для упрощения выкладок; кроме того, при этом погрешности допущений (3.11) принимают наибольшие значения. В самом деле, например, при $\alpha_1 \rightarrow 0$ (рис. 3) ось с ортом \bar{t} стремится совпасть с осью x и (3.11) выполняются точно. То же будет при $\alpha_2 \rightarrow 0$.

На рисунке 4 для наглядности представлены графики $\vartheta_i(\varphi)$, $\alpha_i(\varphi)$, $\psi_i(\varphi)$.

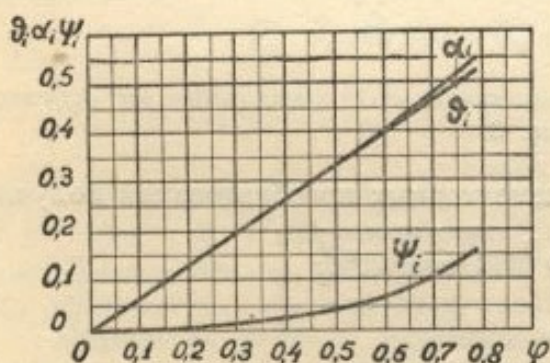


Рис. 4.

§ 4. ДЕФОРМАЦИИ И УСИЛИЯ ИЗГИБА

Для определения удлинений от изгиба, используя постулаты Кирхгофа-Лява, нужно найти кривизну в нормальных сечениях, т. е.

кривизну линий пересечения срединной поверхности с плоскостью, проходящей через нормаль и касательную к срединной поверхности. Будем рассматривать кривизны k_1^0 и k_2^0 нормальных сечений, определяемых касательными к координатным линиям s_1 и s_2 в данной точке срединной поверхности.

Кривизна k_1^0 определяется для линии, лежащей в плоскости (\bar{r}_3, \bar{r}_1) с нормалью \bar{r}_2 . Сечение поверхности плоскостью с нормалью \bar{r}_1 определяет линию с кривизной k_2^0 нормального сечения.

Выше мы приняли за основные углы ϑ_1 и ϑ_2 . Они лежат в вертикальных плоскостях с нормальями $\bar{r}_1 \times \bar{r}'_1$ и $\bar{r}'_2 \times \bar{r}_2$ (рис. 3).

Кривизны этих вертикальных сечений будут соответственно

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{\partial \vartheta_1}{\partial s_1} \\ k_2 &= \frac{\partial \vartheta_2}{\partial s_2} \end{aligned} \right\}. \quad (4.1)$$

Кривизны k_1^0 и k_2^0 выражаются через k_1 и k_2 по теореме Менье [8]

$$\left. \begin{aligned} k_1^0 &= k_1 \cos([\bar{r}_1 \times \widehat{\bar{r}}_1], \bar{r}_2) \\ k_2^0 &= k_2 \cos([\bar{r}_2 \times \widehat{\bar{r}}_2], \bar{r}_1) \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Используя (3.7), после простых преобразований получим

$$\cos([\bar{r}_1 \times \widehat{\bar{r}}_1], \bar{r}_2) = \cos \vartheta_2 - \frac{2 \sin^4 \frac{\varphi}{2}}{\cos \vartheta_2} \approx \cos \vartheta_2 \quad (4.3)$$

и

$$\left. \begin{aligned} k_1^0 &\approx \frac{\partial \vartheta_1}{\partial s_1} \cos \vartheta_2 \\ k_2^0 &\approx \frac{\partial \vartheta_2}{\partial s_2} \cos \vartheta_1 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

О величинах погрешностей, допускаемых в (4.3), можно судить по числовым значениям таблицы 2 и графику (рис. 5).

Таблица 2

φ	$\cos \vartheta_i$	$\frac{2 \sin^4 \frac{\varphi}{2}}{\cos \vartheta_2}$	Погрешность (4.3) в %
$45^\circ \left(\frac{\pi}{4}\right)$	0,868	0,049	5,6
$30^\circ \left(\frac{\pi}{4}\right)$	0,936	0,0085	0,91
$14^\circ (\sim 0,24)$	0,985	0,0002	0,02
$8^\circ (\sim 0,14)$	0,995	~ 0	~ 0

Под влиянием изгиба волокна, отстоящие на расстоянии z от координатных линий s_1 и s_2 , получают удлинения

$$\left. \begin{aligned} e_1^{\text{изг}} &= -zk_1^0 = -z \frac{\partial \vartheta_1}{\partial s_1} \cos \vartheta_2 \\ e_2^{\text{изг}} &= -zk_2^0 = -z \frac{\partial \vartheta_2}{\partial s_2} \cos \vartheta_1 \end{aligned} \right\} \Delta(4.3) \% \quad (4.5)$$

Напомним, что z — расстояние по нормали к срединной поверхности.

В общем случае элемент пластины подвергается не только изгибу в двух плоскостях, но и кручению, в силу чего возникает сдвиг γ_{12} . На рисунке 6 представлена схема возникновения сдвига γ_{12} в слое, удаленном на расстояние $z = \text{const}$ от срединной поверхности. На этом рисунке показана только часть элемента, ограниченная срединной поверхностью и поверхностью $z = \text{const}$; штрих-пунктиром показан элемент пластины до кручения, сплошные линии изображают тот же элемент в скрученном состоянии.

Полный сдвиг $\gamma_{12}^{\text{изг}}$, как видно из чертежа, равен

$$\gamma_{12}^{\text{изг}} = -(\beta_1 + \beta_2). \quad (4.6)$$

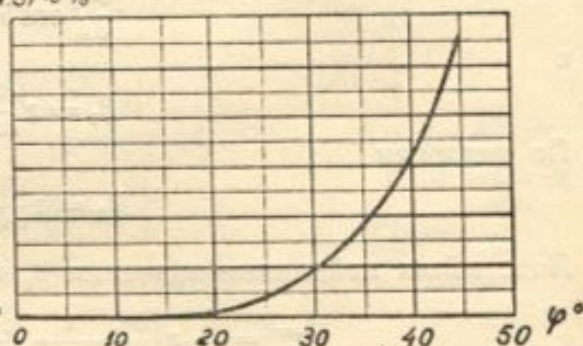


Рис. 5.

Угол β_1 будет

$$\beta_1 \approx \operatorname{tg} \beta_1 = z \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2},$$

где $\frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2} ds_2$ — угол между нормальными на концах элемента — берется в нормальном сечении. Его можно выразить через ϑ_1 и ϑ_2 .

Удвоенная площадь треугольника $32'2$ (рис. 6) равна

$$2F_{32'2} \approx \left[ds_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2} ds_2 \right) \right] ds_1,$$

в то же время

$$2F_{32'2^*} \approx \left[ds_1 \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial s_2} ds_2 \right) \right] ds_1.$$

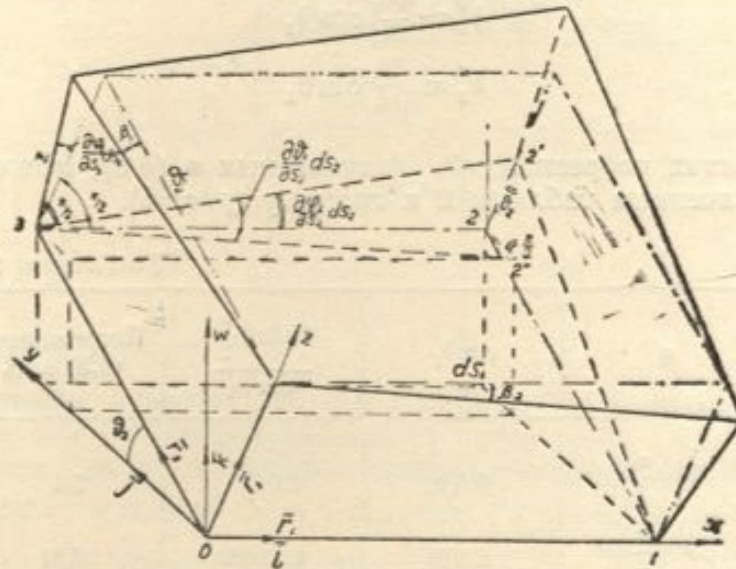


Рис. 6.

Угол между плоскостями треугольников приближенно равен ϑ_2 , поэтому

$$2F_{32'2^*} = 2F_{32'2} \cos \vartheta_2,$$

откуда

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2} \cos \vartheta_2 = \frac{\partial \vartheta_1}{\partial s_2}$$

и

$$\beta_1 = z \frac{\partial \vartheta_1}{\partial s_2} \frac{1}{\cos \vartheta_2}.$$

По аналогии

$$\beta_2 = z \frac{\partial \vartheta_2}{\partial s_1} \frac{1}{\cos \vartheta_1}.$$

Подставляя найденные значения β_1 и β_2 в (4.6), получим

$$\gamma_{12}^{\text{изг}} = -z \left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial s_1} \frac{1}{\cos \vartheta_1} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial s_2} \frac{1}{\cos \vartheta_2} \right) = -zk_{12}. \quad (4.7)$$

Здесь k_{12} — функция кручения

$$k_{12} = \frac{\partial \vartheta_2}{\partial s_1} \frac{1}{\cos \vartheta_1} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial s_2} \frac{1}{\cos \vartheta_2}. \quad (4.8)$$

Суммарные деформации найдутся сложением деформаций срединной поверхности ($e_1^0, e_2^0, \gamma_{12}^0$) с изгибными

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= e_1^0 - zk_1^0 \\ e_2 &= e_2^0 - zk_2^0 \\ \gamma_{12} &= \gamma_{12}^0 - zk_{12} \end{aligned} \right\}. \quad (4.9)$$

По деформациям (4.9) можно, используя физический закон, найти напряжения. В пределах упругости они распределятся так, как показано на рисунке 7.

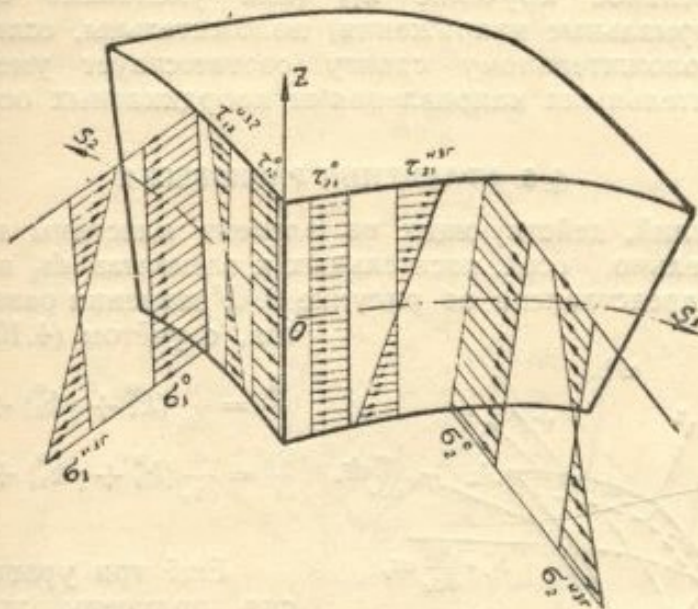


Рис. 7.

Интегрирование напряжений σ_1^0 , σ_2^0 , τ_{12}^0 по боковым граням элемента пластины дает величину усилий N_1 , N_2 , T . Эти напряжения и усилия (рис. 8) соответствуют деформациям срединной поверхности e_1^0 , e_2^0 , γ_{12}^0 .

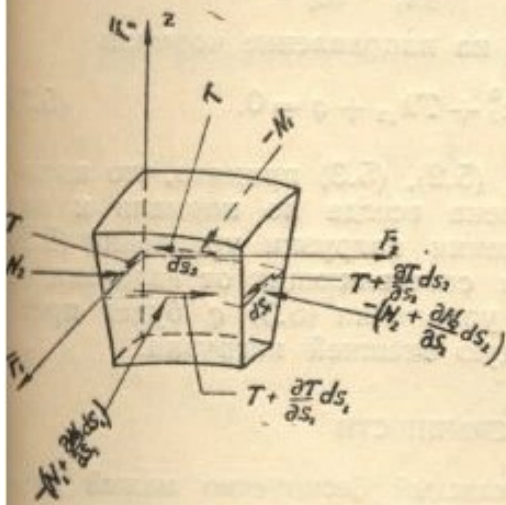


Рис. 8.

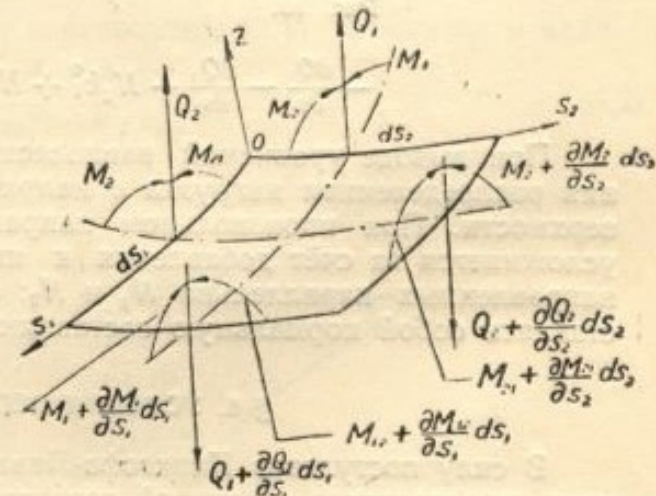


Рис. 9.

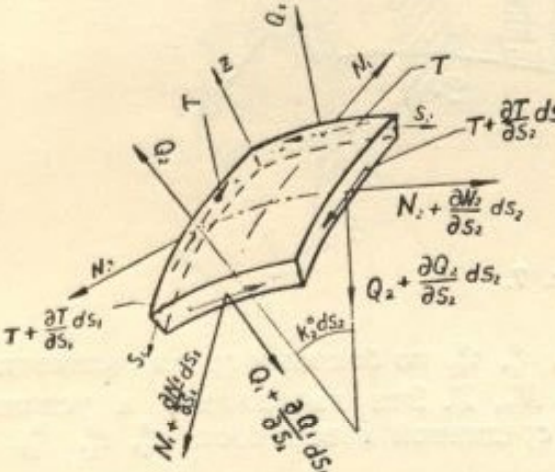
Интегрирование напряжений $\sigma_1^{изг}$, $\sigma_2^{изг}$, $\tau_{12}^{изг}$, соответствующих деформациям изгиба $e_1^{изг}$, $e_2^{изг}$, $\gamma_{12}^{изг}$ (4.5), (4.7), дает величину изгибающих моментов M_1 , M_2 и крутящего момента M_{12} (рис. 9).

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= D(k_1^0 + \mu k_2^0) = D\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial s_1} \cos \vartheta_2 + \mu \frac{\partial \vartheta_2}{\partial s_2} \cos \vartheta_1\right) \\ M_2 &= D(k_2^0 + \mu k_1^0) = D\left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial s_2} \cos \vartheta_1 + \mu \frac{\partial \vartheta_1}{\partial s_1} \cos \vartheta_2\right) \\ M_{12} = M_{21} &= \frac{D(1-\mu)}{2} k_{12} = \frac{D(1-\mu)}{2} \left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial s_1} \frac{1}{\cos \vartheta_1} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial s_2} \frac{1}{\cos \vartheta_2}\right) \end{aligned} \right\} (4.10)$$

В работе принято следующее правило знаков: положительный изгибающий момент M_i увеличивает положительную кривизну k_i^0 (или уменьшает отрицательную), положительный крутящий момент M_{12} увеличивает положительное кручение k_{12} (или уменьшает отрицательное); удлинения (нормальные напряжения) положительны, если элемент растягивается; положительному сдвигу соответствует уменьшение угла между положительными направлениями координатных осей.

§ 5. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Схема усилий, действующих на элемент пластины и дающих моменты относительно осей, касательных к элементам ds_1 и ds_2 срединной поверхности, представлена на рисунке 9. Уравнения равновесия моментов, с учётом (4.10), будут



$$\left. \begin{aligned} \frac{Q_1}{D} &= \frac{\partial}{\partial s_1} (k_1^0 + \mu k_2^0) + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial}{\partial s_2} k_{12}, \\ \frac{Q_2}{D} &= \frac{\partial}{\partial s_2} (k_2^0 + \mu k_1^0) + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial}{\partial s_1} k_{12}. \end{aligned} \right\} (5.1)$$

Ещё три уравнения равновесия получены проектированием действующих на элемент усилий на направления N_1 , N_2 (рис. 10):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial s_1} + \frac{\partial T}{\partial s_2} + Q_1 k_1^0 &= 0 \\ \frac{\partial N_2}{\partial s_2} + \frac{\partial T}{\partial s_1} + Q_2 k_2^0 &= 0 \end{aligned} \right\} (5.2)$$

и на направление нормали

$$-\frac{\partial Q_1}{\partial s_1} - \frac{\partial Q_2}{\partial s_2} + N_1 k_1^0 + N_2 k_2^0 + T k_{12} + q = 0. \quad (5.3)$$

При выводе уравнений равновесия (5.2), (5.3) принято, что внешняя распределенная нагрузка q направлена всегда по нормали к поверхности. При произвольном направлении нагрузки уравнения (5.2) усложняются за счёт добавления к ним составляющих от нагрузки q , направленных параллельно N_1 и N_2 ; в уравнении (5.3) q будет представлять собой нормальную составляющую внешней нагрузки.

§ 6. УСЛОВИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ

В силу постулатов Кирхгофа-Лява каждый бесконечно малый элемент параллельного срединной поверхности слоя находится в условиях плоского напряженного состояния.

Представляя координаты деформированного состояния s_1 и s_2 в виде

$$\begin{aligned} s_1 &= x + \xi; \\ s_2 &= y + \eta, \end{aligned}$$

где ξ и η — перемещения вдоль координатных линий, и учитывая (3.3), найдем

$$e_1 = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad e_2 = \frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

На рисунке 11 представлена схема изгиба пластины, проиллюстрирован переход координатных сеток x , y и s_1 , s_2 друг в друга; сравниваются два элемента (dx, dy) и (ds_1, ds_2) в окрестности точки M .

Сдвиг γ_{12} определяется выражением

$$\gamma_{12} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Исключая из выражений для удлинений и сдвигов перемещения ξ и η , получим соотношение Сен-Венана в координатах недеформированного состояния (условие неразрывности деформаций)

$$\frac{\partial^2 e_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x \partial y} = 0.$$

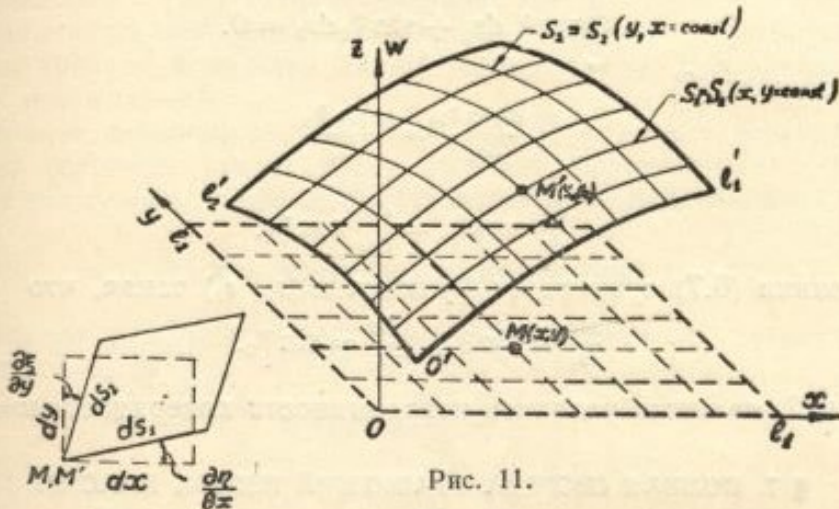


Рис. 11.

Учитывая (3,5), представим полученное соотношение в координатах s_1, s_2 .

$$\frac{\partial^2 e_1}{\partial s_2^2} + \frac{\partial^2 e_2}{\partial s_1^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial s_1 \partial s_2} = 0. \quad (6.1)$$

Для срединной поверхности соотношение (6.1) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 e_1^0}{\partial s_2^2} + \frac{\partial^2 e_2^0}{\partial s_1^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{12}^0}{\partial s_1 \partial s_2} = 0. \quad (6.2)$$

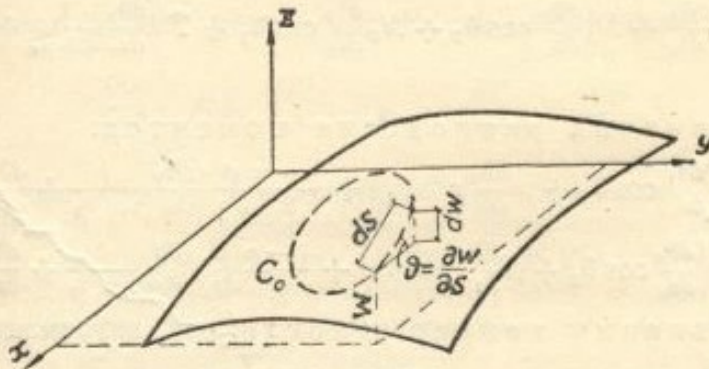


Рис. 12.

Полученное условие непрерывности деформаций выразим через усилия N_1, N_2, T

$$\frac{\partial^2}{\partial s_2^2} (N_1 - \mu N_2) + \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} (N_2 - \mu N_1) - 2 \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} [(1 + \mu) T] = 0. \quad (6.3)$$

Найдем далее условие неразрывности срединной поверхности. Приращение прогиба срединной поверхности (рис. 12) равно

$$dw = \sin \vartheta ds, \quad (6.4)$$

где ϑ — угол наклона элемента ds к горизонту.

Интегрируя (6.4) по любому замкнутому контуру C_0 , получим нуль, так как в случае непрерывной поверхности мы после обхода возвращаемся в начальную точку и суммарное приращение прогиба равно нулю. Итак,

$$\omega = \oint_{C_0} \sin \vartheta ds = 0. \quad (6.5)$$

Принимая в качестве C_0 контур, ограниченный линиями s_1 и s_2 , получим

$$\oint_{C_0} \sin \vartheta_1 ds_1 + \sin \vartheta_2 ds_2 = 0. \quad (6.6)$$

Из (6.6) следует [9]

$$\frac{\partial \sin \vartheta_1}{\partial s_2} = \frac{\partial \sin \vartheta_2}{\partial s_1} \quad (6.7)$$

или

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial s_2} \cos \vartheta_1 = \frac{\partial \vartheta_2}{\partial s_1} \cos \vartheta_2. \quad (6.8)$$

На основании (6.7) существует функция $\omega(s_1, s_2)$ такая, что

$$\frac{\partial \omega}{\partial s_1} = \sin \vartheta_1, \quad \frac{\partial \omega}{\partial s_2} = \sin \vartheta_2. \quad (6.9)$$

Условие (6.7) является условием непрерывности поверхности $\omega = \omega(s_1, s_2)$.

§ 7. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ИЗГИБА ПЛАСТИН

По условиям равновесия и непрерывности деформаций и поверхности имеем окончательно следующую систему уравнений:

1. Уравнения равновесия в проекциях усилий на направления N_1, N_2, z :

$$\frac{\partial N_1}{\partial s_1} + Q_1 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial s_1} \cos \vartheta_2 + \frac{\partial T}{\partial s_2} = 0; \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial s_2} + Q_2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial s_2} \cos \vartheta_1 + \frac{\partial T}{\partial s_1} = 0; \quad (7.2)$$

$$q - \frac{\partial Q_1}{\partial s_1} - \frac{\partial Q_2}{\partial s_2} + N_1 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial s_1} \cos \vartheta_2 + N_2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial s_2} \cos \vartheta_1 + T \left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial s_1} \frac{1}{\cos \vartheta_1} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial s_2} \frac{1}{\cos \vartheta_2} \right) = 0. \quad (7.3)$$

2. Уравнения равновесия моментов:

$$\frac{Q_1}{D} = \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial s_1} \cos \vartheta_2 + \mu \frac{\partial \vartheta_2}{\partial s_2} \cos \vartheta_1 \right) + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial s_1} \frac{1}{\cos \vartheta_1} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial s_2} \frac{1}{\cos \vartheta_2} \right); \quad (7.4)$$

$$\frac{Q_2}{D} = \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial s_2} \cos \vartheta_1 + \mu \frac{\partial \vartheta_1}{\partial s_1} \cos \vartheta_2 \right) + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial s_1} \frac{1}{\cos \vartheta_1} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial s_2} \frac{1}{\cos \vartheta_2} \right). \quad (7.5)$$

3. Уравнения непрерывности: а) деформаций срединной поверхности

$$Eh \left(\frac{\partial^2 e_1^0}{\partial s_2^2} + \frac{\partial^2 e_2^0}{\partial s_1^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{12}^0}{\partial s_1 \partial s_2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} (N_1 - \mu N_2) + \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} (N_2 - \mu N_1) - 2 \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} [(1 + \mu) T] = 0; \quad (7.6)$$

б) срединной поверхности

$$\frac{\partial \sin \vartheta_1}{\partial s_2} = \frac{\partial \sin \vartheta_2}{\partial s_1}. \quad (7.7)$$

Полученная система состоит из семи дифференциальных уравнений в частных производных первого и второго порядка с семью неизвестными функциями ($\vartheta_1, \vartheta_2, Q_1, Q_2, N_1, N_2, T$).

Из семи уравнений системы только одно уравнение (7.6) линейное.

Нелинейность возникает вследствие учёта деформированного состояния в уравнениях равновесия, а также в силу того, что приняты уточненные выражения для кривизны нормальных сечений — (4.4), (4.8). Угловые перемещения считаются конечными, и величина их ограничена лишь допустимостью (4.4), (4.8). На рисунке 5 даны погрешности (4.4) по отношению к точному выражению для кривизны нормальных сечений (4.2). Как видно из графика, даже при угловых перемещениях порядка 30° погрешность в (4.4) остается меньше 1%.

В конкретных исследованиях пластина ограничена некоторым контуром. На контуре в каждой точке задаются граничные условия для усилий и перемещений.

Отыскание решений системы (7.1) — (7.7) при заданных на контуре граничных условиях представляет большие математические трудности и должно послужить темой для специального исследования.

§ 8. ФУНКЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

Уравнения равновесия в проекциях на срединную поверхность были получены в § 5, (5.2)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial s_1} + Q_1 k_1^0 + \frac{\partial T}{\partial s_2} &= 0 \\ \frac{\partial N_2}{\partial s_2} + Q_2 k_2^0 + \frac{\partial T}{\partial s_1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

Если в этих уравнениях принять, что

$$Q_i k_i^0 \ll \frac{\partial N_i}{\partial s_i}, \quad Q_i k_i^0 \ll \frac{\partial T}{\partial s_k}, \quad (i, k = 1, 2) \quad (8.2)$$

получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial s_1} + \frac{\partial T}{\partial s_2} &= 0 \\ \frac{\partial N_2}{\partial s_2} + \frac{\partial T}{\partial s_1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

Этим уравнением можно удовлетворить, введя функцию напряжений F такую, что

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s_2^2} = N_1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial s_1^2} = N_2, \quad -\frac{\partial^2 F}{\partial s_1 \partial s_2} = T. \quad (8.4)$$

Функция напряжений используется при исследовании изгиба пластин. Она перешла в уравнения конечных перемещений пластин из линейной теории упругости. Но, как видно из (8.2), для введения F необходимо, чтобы относительное изменение усилий, касательных к срединной поверхности, было значительно больше, чем произведение поперечной силы на кривизну нормального сечения. В работах по исследованию гибких пластин о допущении (8.2) не упоминается [5, гл. X, § 19].

Однако при значительных перемещениях возможны случаи, когда допущение (8.2) несправедливо. Например, при $T = \text{const}$ (8.1) перейдут в уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial s_1} + Q_1 k_1^0 &= 0 \\ \frac{\partial N_2}{\partial s_2} + Q_2 k_2^0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

В задаче о цилиндрическом изгибе полосы (8.1) переходят в (8.5), а не в (8.3), и функция напряжений (8.4) не может быть введена.

Возможны и промежуточные случаи $-Q_i k_i^0 \sim \frac{\partial T}{\partial s_k}$ ($i \neq k$; $i, k=1,2$), исключающие введение функции напряжений.

При отсутствии поперечной нагрузки q поперечная сила имеет величину порядка

$$N_i \vartheta_i \quad (\text{при } \vartheta < 1).$$

Если принять, что

$$\frac{\partial N_i}{\partial s_i} \sim 1,$$

для выполнения условия (8.2) должно быть

$$N_i \vartheta_i k_i^0 \ll 1 \quad \text{или} \quad \vartheta_i k_i^0 \ll \frac{1}{N_i}. \quad (8.6)$$

Следовательно, для введения функции напряжений необходимо наложить ограничения на величины угловых перемещений и кривизны, определяемые требованием (8.6). Другими словами, функция напряжения строго вводится лишь при малых перемещениях и кривизнах.

§ 9. К УСТАНОВЛЕНИЮ ПРЕДЕЛОВ ПРИМЕНИМОСТИ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА И УРАВНЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА ПЛАСТИН

Исследования, проведенные в предыдущих параграфах, позволяют сделать оценки допущений, принятых при выводе уравнений изгиба пластин. На основании этих оценок могут быть установлены вероятные пределы применимости уравнений Кармана и уравнений линейной теории изгиба пластин.

1. При составлении уравнений изгиба пластин принимается допущение о малости деформаций, в силу чего удлинения и сдвиги выражаются через компоненты тензора деформаций по формулам

$$\left. \begin{aligned} e_i &= \varepsilon_{ii} \\ \gamma_{ik} &= 2\varepsilon_{ik} \end{aligned} \right\}. \quad (2.6)$$

Получающиеся при этом погрешности равны

$$\Delta(e_i) \approx \frac{e_i}{2}, \quad \Delta(\gamma_{ik}) \approx e_i + e_k + 0(e_i e_k). \quad (2.7)$$

В пределах упругости эти погрешности не превосходят 1%, следовательно, принятие (2.6) вполне оправдано. На основании (2.7) можно установить пределы для обобщения уравнений на случай малых упруго-пластических деформаций.

2. При составлении уравнений Кармана и уравнений линейной теории изгиба пластин вводится функция прогибов w , принимается приближенное выражение для кривизны вертикальных сечений и кривизны нормальных сечений заменяются кривизнами вертикальных.

При этом вносятся погрешности, порядок которых соответствует порядку замены $\cos^3 \vartheta_i \approx 1$.

Если максимальную погрешность ограничить тремя процентами, приближенные выражения для кривизны могут быть применены до углов

¹ При замене точного выражения кривизны вертикального сечения (4.1) $(k_i = \frac{\partial^2 w}{\partial s_i^2})$ приближенным $(k_1 \approx w_{xx}, k_2 \approx w_{yy})$ порядок погрешности соответствует порядку замены $\cos^3 \vartheta_i \approx 1$. Замена кривизны нормального сечения $k_1^0 \approx \frac{\partial^2 w}{\partial s_1^2} \cos^3 \vartheta^2$ приближенным равенством $k_1^0 \approx w_{xx}$ и приводит к погрешности порядка замены $\cos^4 \vartheta_i \approx 1$.

наклона $\vartheta \sim 0,125 (7^\circ 10')$. Этим устанавливается предел применимости уравнений при приближенном выражении кривизны.

3. В уравнения Кармана и уравнения линейной теории изгиба пластин вводится функция напряжений.

В § 12 было показано, что введение функций напряжений строго лишь при малых перемещениях и кривизнах. Весьма приближенным критерием для ее введения может служить условие

$$\vartheta_i k_i^0 \ll \frac{1}{N_i}, \quad (8.6)$$

или лучше

$$Q_i k_i^0 \ll \frac{\partial N_i}{\partial s_i}, \quad Q_i k_i^0 \ll \frac{\partial T}{\partial s}. \quad (i, k = 1, 2). \quad (8.2)$$

Условия (8.6) и (8.2) при решении конкретных задач можно проверить и по их выполнению судить о допустимости введения функции F .

4. Для деформаций срединной поверхности при составлении уравнений Кармана вместо выражений из (2.9) принимаются более простые

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{\partial v^1}{\partial x^1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^2}{\partial x^1} \right)^2 \\ e_2 &= \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^1}{\partial x^2} \right)^2 \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial v^1}{\partial x^2} + \frac{\partial v^2}{\partial x^1} + \frac{\partial v^2}{\partial x^1} \frac{\partial v^1}{\partial x^2} \end{aligned} \right\}, \quad (9.1)$$

что соответствует допущению

$$\frac{\partial v^j}{\partial x^i} \frac{\partial v^k}{\partial x^h} \ll e_i, \gamma_{ik}. \quad (i, k = 1, 2). \quad (9.2)$$

Следовательно, при выводе уравнений Кармана допускаются погрешности

$$\left. \begin{aligned} \delta(e_i) &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial v^1}{\partial x^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^2}{\partial x^i} \right)^2 \right\} \\ \delta(\gamma_{ik}) &= \frac{\partial v^1}{\partial x^j} \frac{\partial v^1}{\partial x^k} + \frac{\partial v^2}{\partial x^i} \frac{\partial v^2}{\partial x^k} \end{aligned} \right\}. \quad (9.3)$$

На основании исследований §§ 2 и 3, составлена таблица 3 максимальных значений величин $\frac{\partial v^j}{\partial x^k}$ и погрешностей $\delta(e_i)$, $\delta(\gamma_{ik})$ ($i \neq k$; $i, k = 1, 2$).

Таблица 3

φ	$\frac{\partial v^j}{\partial x^i}$ ($i = 1, 2$)	$\frac{\partial v^k}{\partial x^j}$ ($i \neq k$; $i, k = 1, 2$)	$\frac{\partial v^2}{\partial x^1}$ ($i = 1, 2$)	$\delta(e^i)$ ($i = 1, 2$)	$\delta(\gamma_{ik})$ ($i \neq k$; $i, k = 1, 2$)
$\frac{\pi}{4} (45^\circ)$	0,146	0,144	0,500	$21 \cdot 10^{-3}$	$42 \cdot 10^{-3}$
$\frac{\pi}{6} (30^\circ)$	0,067	0,066	0,353	$4,5 \cdot 10^{-3}$	$8,9 \cdot 10^{-3}$
0,24 ($\sim 14^\circ$)	0,015	0,015	0,173	$0,23 \cdot 10^{-3}$	$0,45 \cdot 10^{-3}$
0,14 ($\sim 8^\circ$)	0,005	0,005	0,099	$0,025 \cdot 10^{-3}$	$0,05 \cdot 10^{-3}$
0,07 ($\sim 4^\circ$)	0,001	0,001	0,049	$0,001 \cdot 10^{-3}$	$0,002 \cdot 10^{-3}$

Для гибких стальных пластин деформаций срединной поверхности после потери устойчивости остаются близкими к критическим e_i , γ_{ik} .

Принимая для оценки, что e_i^{kv} , $\gamma_{ik}^{kp} \sim 0,1 \cdot 10^{-3} \div 0,5 \cdot 10^{-3}$ [10], с помощью таблицы 3 устанавливаем, что при таких деформациях погреш-

ности $\delta(e_i)$, $\delta(\gamma_{ik})$ при углах наклона $\varphi \sim 4^\circ$ не превышают 2%, но уже при угле $\varphi \sim 8^\circ$ могут стать больше 50% искомой величины e_i (или γ_{ik}).

Отсюда вывод, что в пределах упругости уравнения Кармана, по-видимому, надежно применимы до углов наклона порядка $4^\circ - 5^\circ$.

5. Принимая в (9.1)

$$\frac{\partial v^2}{\partial x^i} \frac{\partial v^2}{\partial x^k} \ll e_i, \gamma_{ik}, \quad (i, k = 1, 2) \quad (9.4)$$

получаем выражения для удлинений и сдвигов линейной теории изгиба пластин

$$e_1 = \frac{\partial v^1}{\partial x^1}, \quad e_2 = \frac{\partial v^2}{\partial x^2}, \quad \gamma_{12} = \frac{\partial v^1}{\partial x^2} + \frac{\partial v^2}{\partial x^1}. \quad (9.5)$$

При этом допускаются погрешности

$$\delta(e_i) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^2}{\partial x^i} \right)^2, \quad \delta(\gamma_{ik}) = \frac{\partial v^2}{\partial x^i} \frac{\partial v^2}{\partial x^k}. \quad (i \neq k; i, k = 1, 2) \quad (9.6)$$

Они позволяют установить границы применимости (9.5). Принимая, как и в п. 4, e_i^{hp} , $\gamma_{ik}^{hp} \sim 0,1 \cdot 10^{-3} - 0,5 \cdot 10^{-3}$, получим, что максимальные погрешности $\delta(e_i)$ и $\delta(\gamma_{ik})$ достигнут 3% при угловых перемещениях $\frac{\partial v^2}{\partial x^i} \sim 3 \cdot 10^{-3} - 4 \cdot 10^{-3}$.

КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

1. Чем гибче пластина, т. е. чем меньше деформации (напряжения) срединной поверхности, тем ниже предел применимости уравнений Кармана.

2. Уравнения Кармана, по-видимому, надежно применимы к угловым перемещениям порядка 4° , а уравнения линейной теории изгиба пластин — к угловым перемещениям порядка $15'$.

3. Система уравнений изгиба пластин, полученная в настоящей работе, может быть применена для исследования изгиба пластин при угловых перемещениях порядка 30° .

Полученные в работе оценки пределов применимости уравнений изгиба пластин носят приближенный характер. Некоторое уточнение может быть получено после отыскания решения системы (7.1) — (7.7), которая имеет более широкие пределы применимости, чем системы уравнений Кармана и уравнений линейной теории изгиба пластин.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Гвоздев. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. Вып. 1, Стройиздат, 1949.
2. Б. М. Броуде. Предельные состояния стальных балок. Госиздат литературы по строительству и архитектуре, М.—Л., 1953.
3. А. С. Вольмир. Гибкие пластинки и оболочки. Гостехтеориздат, М., 1956.
4. Г. Ю. Джанелидзе. Обзор работ по теории изгиба толстых и тонких плит, опубликованных в СССР. ПММ, т. XII, вып. 1, 1948.
5. В. Э. Власов. Общая теория оболочек. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
6. В. В. Новожилов. Современные проблемы механики. Основы нелинейной теории упругости. ОГИЗ, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
7. Д. И. Кутилин. Теория конечных деформаций. ОГИЗ, Гостехиздат, М.—Л., 1947.
8. П. К. Рашевский. Курс дифференциальной геометрии. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
9. В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Т. II, Гостехиздат, М., 1953.
10. С. П. Тимошенко. Пластинки и оболочки. Гостехиздат, 1948.