

УДК 621.792.053:539.319

doi: 10.32620/aktt.2023.3.02

С. С. КУРЄННОВ, К. П. БАРАХОВ

*Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна*

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН КЛЕЙОВОГО З'ЄДНАННЯ, ЩО МАЄ ПОЗДОВЖНІЙ ДЕФЕКТ

У клейових з'єднаннях доводиться стикатися з явищем непроклею. Відомо, що непроклеї знижує міцність таких з'єднань. Відомі на сьогодні аналітичні моделі для розрахунку напружено-деформованого стану клейових з'єднань мають певні недоліки які з'являються внаслідок спрощення (одномірні моделі), а реалізація чисельних методів вимагає великого ресурсу обчислювальної техніки. **Предметом** вивчення у статті є математична модель напружено-деформованого стану клейового з'єднання двох пластин. **Мета** дослідження – вивчення напружено-деформованого стану клейового з'єднання, що має непроклеї та розвинення методів дослідження напруженого стану клейових з'єднань внапуск. **Методи:** для побудови аналітичного розв'язку задачі про напружений стан з'єднання, яке містить дефект у клейовому шарі вздовж бічної кромки області склеювання, використана спрощена двовимірна аналітична модель напруженого стану клейового з'єднання внапуск. Спрощення моделі полягає в тому, що поперечні переміщення несних шарів вважаються такими, що дорівнюють нулю. Дане припущення можна інтерпретувати як наявність несних шарів високої жорсткості у поперечному напрямку, і воно дозволяє звести задачу про напружений стан з'єднання до системи двох диференціальних рівнянь у частинних похідних відносно поздовжніх переміщень несних шарів і отримати **розв'язок** задачі в аналітичній формі. Отриманий розв'язок записано у формі функціонального ряду. Власні функції – не ортогональні. За допомогою методу найменших квадратів розв'язок задачі зведено до системи лінійних рівнянь. Розв'язано модельну задачу для з'єднання двох алюмінієвих пластин однакових розмірів. **Результати** показали, що наявність області непроклею може значно збільшувати напруження біля краю клейового шару. Особливо небезпечними з точки зору міцності є кутові точки у клейовому шарі. Проведено порівняння результатів із результатами скінченно-елементного моделювання. Порівняння показало, що запропонована математична модель має високу, як для інженерних розрахунків, точність. Дана модель може бути розвинена на розв'язання аналогічних задач, наприклад, для дослідження напруженого стану з'єднання коаксіальних труб, яке має дефекти в клейовому шарі.

Ключові слова: клейове з'єднання внапуск; аналітична модель; метод скінченних елементів; явище непроклею; метод найменших квадратів.

Вступ

Клейові з'єднання набули широке застосування у аерокосмічній техніці [1], зокрема при ремонті та відновленні [2]. Більшість існуючих математичних моделей клейових з'єднань внапуск, що дозволяють знайти напружено-деформований стан з'єднання в аналітичній формі, є одномірними [3]. У таких моделях передбачено рівномірний розподіл напружень по ширині з'єднань, і апріорно задається розподіл напружень по товщині шарів (як правило, рівномірний або лінійний). За допомогою таких класичних моделей можна дослідити напружений стан з'єднання, яке містить пустоти в клейовому шарі по всій ширині з'єднання [4, 5]. Цей підхід також розвинуто на з'єднання коаксіальних труб [6] і подвійних напускних з'єднань [7]. Окрім аналітичних досліджень цієї ж тематики присвячено числові дослідження, виконані за допомогою скінченно-елементного моделювання [8]. Однак при розрахунку напруженого стану з'єднань в

ряді випадків необхідно враховувати нерівномірність напружено-деформованого стану склеюваних пластин по ширині з'єднань. Прикладами таких конструкцій є з'єднання силових елементів з обшивкою, ремонтні накладки тощо. Побудова аналітичного розв'язку задачі знаходження двовимірного напружено-деформованого стану з'єднання в загальній постановці є надзвичайно складною задачею, аналітичний розв'язок якої поки невідомий. Відомо, що навіть розв'язок задачі теорії пружності для прямокутної області, тобто навіть для одного шару, спряжено зі значними математичними труднощами [9, 10]. Тому, як правило, для дослідження двомірного напружено-деформованого стану з'єднань використовуються числові методи [11, 12].

Очевидно, що порожнини у клейовому шарі у вигляді поперечних смуг в глибині області склеювання не є єдиними формами дефектів клейового шару. Руйнування клейового шару починається, як

правило, біля зовнішнього краю з'єднання. Зумовлено це в тому числі впливом зовнішнього середовища на клей, наприклад, проникненням води на межу клею і пластин, що з'єднуються, температурними циклами, та іншими зовнішніми впливами, які згубно впливають на міцність з'єднання. У даній роботі розв'язана задача про напружено-деформований стан з'єднання двох прямокутних пластин, клейовий шар між якими з обох бокових сторін відшарувався на однакову глибину в середину області склеювання, і в передачі зусиль участі не бере. Напружено-деформований стан даної конструкції не є одномірним і змінюється як по довжині області склеювання так і по її ширині. Для побудови аналітичного розв'язку використовується спрощена двовимірна модель напруженого стану Фолькерсена. Ця модель була розвинена у роботах авторів [13-15]. Припущення про малість поперечних переміщень несних шарів було використано вперше, мабуть, у роботах Васильєва і Лур'є, наприклад [16].

Постановка задачі та побудова розв'язку

Розглянемо симетричне клейове з'єднання двох прямокутних пластин, показано на рис. 1.

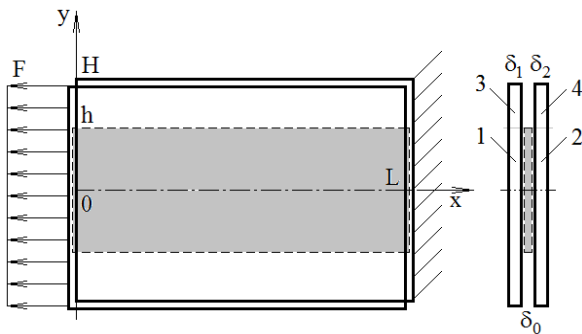


Рис. 1. Схема конструкції

Віссю симетрії даного з'єднання є поздовжня вісь (Ox). Симетрія дозволяє виключити вплив згину в площині з'єднання. Введемо наступні параметри з'єднання: L – довжина з'єднання, 2H – ширина кожної із з'єднуваних пластин, 2h – ширина області склеювання, δ_1, δ_2 і δ_0 – товщини з'єднуваних пластин і клейового шару відповідно. Будемо уважати, що переміщення і напруження рівномірно розподілені по товщині шарів. З'єднані пластини будемо уважати абсолютно жорсткими в напрямку осі Oy. В силу цього припущення, а також в силу симетрії задачі елементи обох несних шарів здійснюють тільки поздовжні переміщення, які в області склеювання позначимо U_1 і U_2 . Переміщення пластин на ділянках,

що виступають за межі області склеювання позначимо U_3 і U_4 для першого і для другого несних шарів відповідно.

Рівняння рівноваги елементів несних шарів в області склеювання $y \in [-h; h]$ мають вигляд [11, 12]

$$\tau + \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y} = 0, \quad -\tau + \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

де N_m, q_m – нормальні (в поздовжньому напрямку) і дотичні зусилля в несному в шарі $m, m = 1, 2$;

τ – дотичні напруження в клейовому шарі в поздовжньому напрямку.

Співвідношення Коші за умови рівності нулю поперечних переміщень мають вигляд

$$N_m = \delta_m E_m \frac{\partial U_m}{\partial x}, \quad q_m = \delta_m G_m \frac{\partial U_m}{\partial y}, \quad m = 1, 2, \quad (2)$$

де E_m – модуль пружності шару m в напрямку осі Ox; G_m – модуль зсуву шару m у площині xOy.

Дотичні напруження в клейовому шарі пропорційні різниці переміщень несних шарів

$$\tau = P(U_2 - U_1), \quad (3)$$

де P – жорсткість клейового шару на зсув, яка, як правило, визначається як $P = G_0 / \delta_0$, де своєю чергою G_0 – модуль зсуву клейового шару.

Підставивши наведені вище співвідношення (2) і (3) до рівнянь (1), отримуємо систему диференціальних рівнянь у частинних похідних [13, 14]

$$\begin{cases} \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right) - U_1 + U_2 = 0, \\ \alpha_2 \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} \right) + U_1 - U_2 = 0, \end{cases} \quad (4)$$

де $\alpha_m = E_m \delta_m / P_0$; $\mu_m = G_m / E_m$.

За межами області склеювання $y \in (-H; -h) \cup (h; H)$ переміщення шарів при зазначених вище гіпотезах описуються рівняннями [16]

$$\frac{\partial^2 U_3}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 U_3}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U_4}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 U_4}{\partial y^2} = 0. \quad (5)$$

Крайові умови мають вигляд

$$\frac{\partial U_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial U_2}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial U_3}{\partial y} \Big|_{y=H} = \frac{\partial U_4}{\partial y} \Big|_{y=H} = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} N_2 \Big|_{x=0} &= E_2 \delta_2 \frac{\partial U_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = F(y), \\ N_4 \Big|_{x=0} &= E_2 \delta_2 \frac{\partial U_4}{\partial x} \Big|_{x=0} = F(y). \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial U_3}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=L} = \frac{\partial U_4}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \\ U_1 \Big|_{x=L} &= U_3 \Big|_{x=L} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Умови спряження полів переміщень на бічній межі клейового шару мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_m}{\partial y} \Big|_{y=h} &= \frac{\partial U_{m+2}}{\partial y} \Big|_{y=h}, \quad m=1,2, \\ U_m \Big|_{y=h} &= U_{m+2} \Big|_{y=h}, \end{aligned} \quad (9)$$

Умови (6) є умовами рівності нулю дотичних напружень в несних шарах вздовж осі симетрії і на бічних межах і є наслідком рівнянь (2).

З першого рівняння системи (4) виразимо переміщення другого шару

$$U_2 = U_1 - \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right). \quad (10)$$

Підставивши (10) у друге рівняння системи (4), отримаємо диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} \beta_1 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_3 \frac{\partial^4 U_1}{\partial y^4} - \\ - \beta_4 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \beta_5 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

де $\beta_1 = \alpha_1 \alpha_2$; $\beta_2 = (\mu_1 + \mu_2) \alpha_1 \alpha_2$; $\beta_3 = \mu_1 \mu_2 \alpha_1 \alpha_2$; $\beta_4 = \alpha_1 + \alpha_2$; $\beta_5 = \alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2$.

У роботі [13] за допомогою класичного методу відокремлення змінних було отримано загальний розв'язок рівняння (11) (за умови, що $\mu_1 = \mu_2$), і показано, що загальний розв'язок задачі є лінійною суперпозицією двох розв'язків

$$U_m = W_m(x) + V_m(x, y),$$

де $W_m(x)$ є класичним одновимірним розв'язком

Фолькерсена [1]. Функція $V_m(x, y)$ є лінійною комбінацією частинних розв'язків рівнянь (11) та (10), які своєю чергою можуть бути представлені у вигляді лінійних комбінацій функцій $e^{\pm \lambda x} \sin ky$ і $e^{\pm \lambda x} \cos ky$ (як і розв'язки рівнянь (5) [16]). При побудові розв'язку цієї задачі будемо використовувати цю структуру розв'язку. Підставивши частинний розв'язок $e^{\pm \lambda x} \sin ky$ в (11), отримаємо алгебричне рівняння, що зв'язує λ і k :

$$\beta_3 k^4 + (\beta_5 - \beta_2 \lambda^2) k^2 + \beta_1 \lambda^4 - \beta_4 \lambda^2 = 0 \quad (12)$$

з якого випливає, що кожному значенню $\pm \lambda$ відповідають чотири значення k , які можна записати у формі $\pm k_1(\lambda)$ і $\pm k_2(\lambda)$. Отже, частинний розв'язок рівняння (11), який відповідає, наприклад, деякому додатному значенню λ має вигляд

$$V_1^* = e^{\lambda x} (S_1 \sin k_1 y + C_1 \cos k_1 y + S_2 \sin k_2 y + C_2 \cos k_2 y),$$

де C_m, S_m – довільні сталі.

З рівняння (10) випливає, що відповідні переміщення другого шару можна записати як

$$\begin{aligned} V_2^* = e^{\lambda x} (S_1 \gamma_1 \sin k_1 y + C_1 \gamma_1 \cos k_1 y + \\ + S_2 \gamma_2 \sin k_2 y + C_2 \gamma_2 \cos k_2 y), \end{aligned}$$

де $\gamma_m = 1 - \alpha_1 (\lambda^2 - \mu_1 k_m^2)$, $m=1,2$.

Припустимо, що частинні розв'язки рівнянь (3) і (4) повинні точно задовольняти однорідним крайовим умовам на сторонах $y=0$, $y=H$ (6), а також $y=h$ (9). З перших двох умов (6) випливає, що $S_1 = S_2 = 0$. Враховуючи те, що дані частинні розв'язки справедливі і для від'ємних значень λ , частинні розв'язки можна подати у вигляді

$$V_1^* = [A \operatorname{ch} \lambda x + B \operatorname{ch} \lambda (x-L)] Y^{(1)}(y),$$

$$V_2^* = [A \operatorname{ch} \lambda x + B \operatorname{ch} \lambda (x-L)] Y^{(2)}(y),$$

$$Y^{(1)}(y) = C_1 \cos k_1 y + C_2 \cos k_2 y,$$

$$Y^{(2)}(y) = C_1 \gamma_1 \cos k_1 y + C_2 \gamma_2 \cos k_2 y,$$

де A, B, C_1 і C_2 – довільні сталі.

Частинні розв'язки рівняння Пуассона (5), які

задовольняють однорідним крайовим умовам (6), мають вигляд

$$V_3^* = [C_3 A \operatorname{ch} \Lambda x + C_3 B \operatorname{ch} \Lambda (x - L)] \cos \frac{\Lambda (y - H)}{\sqrt{\mu_1}},$$

$$V_4^* = [C_4 A \operatorname{ch} \Omega x + C_4 B \operatorname{ch} \Omega (x - L)] \cos \frac{\Omega (y - H)}{\sqrt{\mu_2}},$$

де Λ, Ω – константи відокремлення змінних;

C_3, C_4, A і B – довільні сталі.

Не важко знайти розв’язки рівнянь (4) і (5), які залежать тільки від однієї змінної x . З умов спряження цих розв’язків на бічній межі області склеювання $y = h$ випливає, що шукані розв’язки є лінійними функціями [15]. Ці ж умови спряження (9), записані для частинних розв’язків $\{V_i^*\}_{i=1}^4$ призводять до системи однорідних лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів $\{C_i\}_{i=1}^4$.

$$A(\lambda) \cdot C = 0, \quad (13)$$

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & -c_3 & 0 \\ \gamma_1 c_1 & \gamma_2 c_2 & 0 & -c_4 \\ k_1 s_1 & k_2 s_2 & -\lambda \mu_1^{-0,5} s_3 & 0 \\ k_1 \gamma_1 s_1 & k_2 \gamma_2 s_2 & 0 & -\lambda \mu_2^{-0,5} s_4 \end{pmatrix},$$

$$C = (C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4)^T,$$

$$c_m = \cos k_m h, \quad s_m = \sin k_m h, \quad c_{m+2} = \cos \frac{\lambda (h - H)}{\sqrt{\mu_m}},$$

$$s_{m+2} = \sin \frac{\lambda (h - H)}{\sqrt{\mu_m}}.$$

Система (13) має нетривіальний розв’язок за умови, що

$$\det A(\lambda) = 0. \quad (14)$$

Рівняння (14) має нескінченну лічильну безліч дійсних коренів λ_n , яким відповідають корені рівняння (12) $k_{m,n} = k_m(\lambda_n)$ і коефіцієнти $\gamma_{m,n} = \gamma_m(\lambda_n)$, а також константи $\{C_{i,n}\}_{i=1}^4$, які визначаються з системи (13) з точністю до довільного множника. Таким чином, загальний розв’язок рівнянь (4) і (5), якій задовольняє крайовим умовам на

бічних сторонах (6) та умовам спряження переміщень (9), має вигляд

$$U_j = A_0 x + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n X_n^{(1)}(x) + B_n X_n^{(2)}(x)] Y_n^{(j)}(y), \quad j=1, \dots, 4 \quad (15)$$

$$X_n^{(1)} = \frac{\operatorname{ch}(\lambda_n x)}{\lambda_n \operatorname{sh}(\lambda_n L)},$$

$$Y_n^{(1)} = C_{1,n} \cos k_{1,n} y + C_{2,n} \cos k_{2,n} y,$$

$$X_n^{(2)} = \frac{\operatorname{ch}(\lambda_n (x - L))}{\lambda_n \operatorname{sh}(\lambda_n L)},$$

$$Y_n^{(2)} = C_{1,n} \gamma_{1,n} \cos k_{1,n} y + C_{2,n} \gamma_{2,n} \cos k_{2,n} y,$$

$$Y_n^{(3)} = C_{3,n} \cos \frac{\lambda_n}{\sqrt{\mu_1}} (y - H);$$

$$Y_n^{(4)} = C_{4,n} \cos \frac{\lambda_n}{\sqrt{\mu_2}} (y - H).$$

Оскільки коефіцієнти $\{C_{i,n}\}_{i=1}^4$ знаходяться із системи (13) з точністю до довільного множника, то для визначеності та полегшення аналізу збіжності на дані коефіцієнти може бути введена додаткова умова нормування

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^h [Y_n^{(i)}]^2 dy + \sum_{i=3}^4 \int_h^H [Y_n^{(i)}]^2 dy = 1.$$

Коефіцієнти A_0, A_n, B_0, B_n знаходимо із крайових умов (6) – (8). Зазначені крайові умови призводять до системи рівнянь

$$A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n^{(1)}(y) = 0, \\ A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n^{(2)}(y) = \frac{F(y)}{E_2 \delta_2}, \quad y \in (0; h);$$

$$A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n^{(3)}(y) = 0, \\ A_0 L + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \theta_n + B_n \kappa_n] Y_n^{(3)}(y) = 0, \quad y \in (h; H);$$

$$A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n^{(4)}(y) = \frac{F(y)}{E_2 \delta_2}, \\ A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Y_n^{(4)}(y) = \frac{F(y)}{E_2 \delta_2}, \quad y \in (h; H);$$

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Y_n^{(1)}(y) = 0, \quad y \in (0; h);$$

$$A_0 L + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \theta_n + B_n \kappa_n] Y_n^{(1)}(y) = 0$$

$$\theta_n = \frac{\operatorname{ch}(\lambda_n L)}{\lambda_n \operatorname{sh}(\lambda_n L)}, \quad \kappa_n = \frac{1}{\lambda_n \operatorname{sh}(\lambda_n L)}.$$

Цю систему рівнянь може бути розв'язано, наприклад, за допомогою методу найменших квадратів. Для цього суму нескінченного ряду необхідно обмежити деяким скінченним числом доданків N , а невідомі коефіцієнти A_0, A_n, B_0, B_n знаходити з умови найменшого середньоквадратичного ухилення лівих частин рівнянь від заданих правих частин цих рівнянь. Це призводить до системи лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів A_0, A_n, B_0, B_n . В роботі [15] показано, що позадіагональні коефіцієнти системи зменшуються при віддаленні від головної діагоналі, а ряд із квадратів даних коефіцієнтів – збігається. Звідси випливає, що цю систему можна розв'язати за допомогою методу редукції.

Модельна задача та аналіз результатів

Проведемо розрахунок напружено-деформованого стану клейового з'єднання пластин однакових розмірів 5×4 см, ($L = 5$ см, $H = 2$ см), і товщиною $\delta_0 = 4$ мм, виготовлених з алюмінієвого сплаву, $E_1 = E_2 = 70$ ГПа, и $G_1 = G_2 = 26$ ГПа. Параметри клейового шару $\delta_0 = 0,1$ мм, $G_0 = 0,5$ ГПа. До другого шару прикладено рівномірне навантаження $F(y) = F = \text{const}$. На рис. 2 показано графік розподілу дотичних напружень у клейовому шарі, який має ширину 3 см ($h = 1,5$ см, $h/H = 0,75$). В силу симетрії напруження показані лише на половині області склеювання $x \in [0; L]$, $y \in [0; h]$. Напруження показані в безрозмірній формі, у вигляді відношення діючих напружень $\tau(x, y)$ (3) до гіпотетичних напружень $\tau^* = FN/(hL)$, які б виникли в клейовому шарі при рівномірному розподілі напружень по всій площі клейового з'єднання.

Як бачимо, напруження в клейовому шарі на межі з порожниною перевищують напруження на осі симетрії конструкції. Це, загалом, очевидно, оскільки на цю область клею припадає більшість навантаження, що передається на несний шар в області не-

проклею $y \in (h; H)$. Одним з факторів, який визначає розподіл напружень у клейовому шарі, є моделі зсуву несних шарів. Якщо G_1 і G_2 дуже великі, то переміщення несних шарів будуть рівномірними по ширині з'єднання і концентрації напружень біля кутів області склеювання не буде, а буде звичайна для з'єднань концентрація напружень уздовж краю області склеювання $x = 0$ і $x = L$ [13-15].

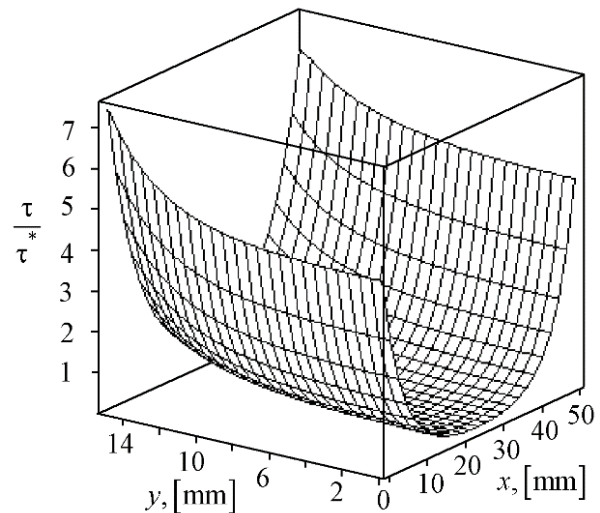


Рис. 2. Розподіл дотичних напружень в клейовому шарі отриманий за запропонованою моделлю

Вище було зазначено, що власні функції не є ортогональними, тому обчислення коефіцієнтів A_n, B_n у розв'язку (15) є достатньо трудомісткою задачею, як і доведення збіжності запропонованого методу. Обчислення показали, що коефіцієнти B_n наближаються до нуля зі зростанням n значно швидше, ніж A_n . Розрахунки показують, що коефіцієнти наближаються до нуля не монотонно. Значення окремих коефіцієнтів A_n, B_n наведено у таблиці 1.

Таблиця 1
Значення деяких коефіцієнтів A_n і B_n

n	A_n	B_n
1	$0,3495334 \cdot 10^{-7}$	$0,805894 \cdot 10^{-12}$
10	$0,1224547 \cdot 10^{-8}$	$0,621178 \cdot 10^{-11}$
20	$0,1971271 \cdot 10^{-8}$	$0,12526 \cdot 10^{-11}$
30	$0,403550 \cdot 10^{-8}$	$-0,5919 \cdot 10^{-12}$
40	$0,469942 \cdot 10^{-7}$	$-0,18463 \cdot 10^{-11}$
50	$0,297692 \cdot 10^{-8}$	$-0,187754 \cdot 10^{-11}$
60	$0,414519 \cdot 10^{-9}$	$-0,135688 \cdot 10^{-11}$
70	$0,79317 \cdot 10^{-9}$	$-0,82464 \cdot 10^{-12}$
80	$0,845379 \cdot 10^{-10}$	$0,260342 \cdot 10^{-12}$

Розрахунки також показали, що $|A_n \cdot n^{3/2}| < M$ і $|B_n \cdot n^{3/2}| < M$, де M - деяке число, рис. 3.

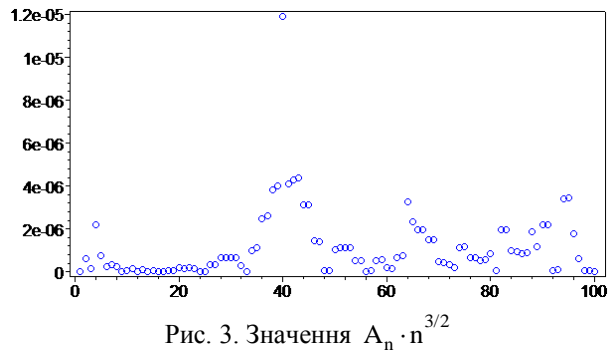


Рис. 3. Значення $A_n \cdot n^{3/2}$

Це непрямо свідчить про збіжність ряду (15).

Для верифікації запропонованої моделі було створено тривимірну скінченно-елементну модель. Однією із проблем скінченно-елементного моделювання клейових з'єднань [17-19] є відносно мала товщина клейового шару, яка визначає мінімальний розмір скінченного елемента. В даному випадку мінімальний розмір елемента було задано таким, що дорівнював δ_0 . Для зменшення кількості елементів було розглянуто половина конструкції $y \in [0, H]$. Крайові умови в площині симетрії на верхній і на нижній сторонах з'єднання – «roller». Прикладене навантаження – рівномірно розподілені по торцю пластини напруження F/δ_1 . Скінченно-елементна сітка показана на рис. 4.

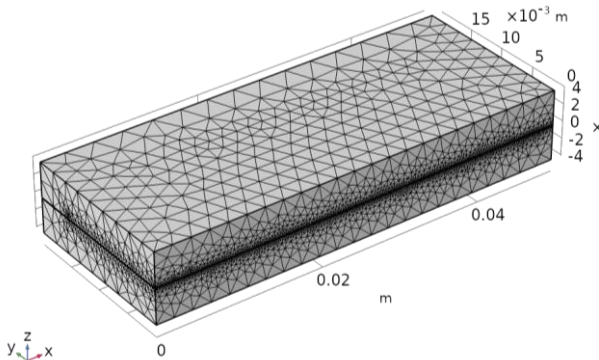


Рис. 4. Скінченно-елементна сітка

Напруження в серединній площині клейового шару (також у безрозмірній формі) показано на рис. 5.

Для наочності наведемо на одному графіку розподіл напружень у клейовому шарі, розрахованих за допомогою запропонованої моделі та знайдених за допомогою скінченно-елементного моделювання. Найбільші напруження в клейовому шарі виникають

на боковому краю клейового шва $y = h$, на межі з областю порушення суцільності клейового шару (на межі з порожниною).

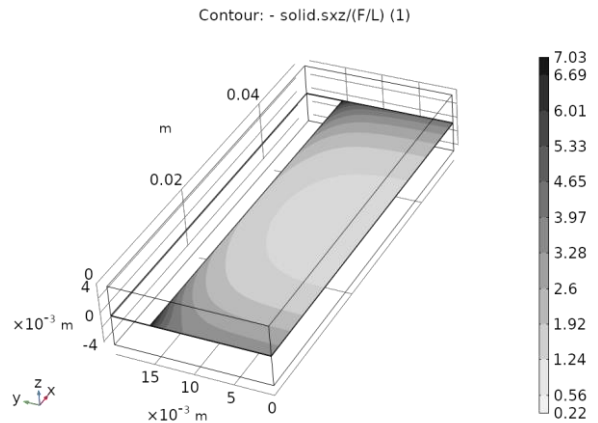


Рис. 5. Розподіл дотичних напружень в клейовому шарі отриманий за допомогою скінченно-елементного моделювання

На рис. 6. наведено графіки дотичних напружень в клейовому шарі вздовж даної лінії, що розраховані за запропонованою в роботі аналітичною моделлю (AM) і за скінченно-елементною моделлю (FEM). Як бачимо, результати дуже близькі. Це говорить про хорошу точність запропонованої моделі та адекватність прийнятих гіпотез і припущень.

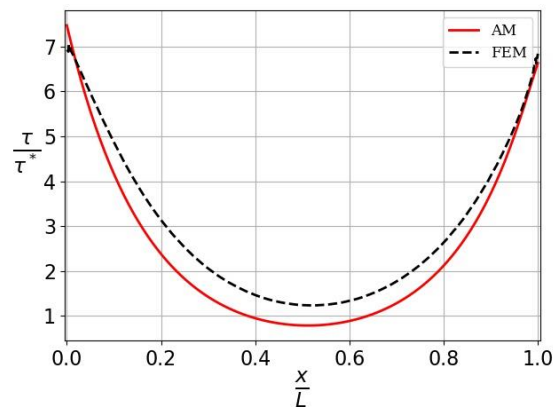


Рис. 6. Розподіл дотичних напружень τ_{xz} / τ^* в клейовому шарі вздовж його бічної межі

Висновки

В роботі отримано аналітичний розв'язок задачі про нерівномірний по ширині напружений стан клейового з'єднання двох прямокутних пластин, що має області непроклею, які паралельні боковим сторонам з'єднання. Розрахунки показали, що:

1. Наявність порожнечі вздовж бічної сторони з'єднання істотно збільшує концентрацію напружень у клейовому шарі.

2. Піки напружень в клеї розташовані в кутах клейового шару.

3. Запропонована в роботі аналітична модель має хорошу точність і може бути розвинена на розв'язання аналогічних задач, наприклад, для дослідження напруженого стану з'єднання коаксіальних труб [20], яке має дефекти в клейовому шарі.

В подальшому передбачається використовувати запропоновану математичну модель тришарової конструкції з податливим заповнювачем для аналізу напружено-деформованого стану конструкцій зі стільниковим заповнювачем [21]. Перспективним також є створення двовимірної математичної моделі клейових з'єднань, що мають форму кільця [22-24].

Внесок авторів: постановка задачі – **С. С. Курєннов, К. П. Барахов;** огляд та аналіз інформаційних джерел – **С. С. Курєннов;** формування аналітичної моделі – **С. С. Курєннов; К. П. Барахов;** аналітичні розрахунки – **С. С. Курєннов, К. П. Барахов;** скінченно-елементне моделювання **С. С. Курєннов;** аналіз результатів та формулювання висновків – **С. С. Курєннов;** редагування тексту статті – **С. С. Курєннов, К. П. Барахов.**

Усі автори прочитали та погодилися з опублікованою версією рукопису.

Література

1. Ahn, J. *Advanced modeling of the behavior of bonded composite joints in aerospace applications [Text]* / J. Ahn, S. Stapleton, A. M. Waas // *Composite Joints and Connections*. – 2011. – P. 423-434. DOI: 10.1533/9780857094926.2.423.
2. Roskiewicz, M. *New challenges and technologies related to aircrafts' battle damages [Text]* / M. Roskiewicz, T. Smal, S. Szrama // *Scientific Journal of the Military University of Land Forces*. – 2018. – Vol. 50, No. 2(188). – P. 208-223. DOI 10.5604/01.3001.0012.2509.
3. *Analytical models of adhesively bonded joints. Part I: Literature survey [Text]* / L. F. M. da Silva, P. J. C. das Neves, R. D. Adams, J. K. Spelt // *Int. J. Adhes. Adhesiv.* – 2009. – Vol. 29. – P. 319-330. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2008.06.005.
4. Rossettos, J. N. *Comparison of the Effects of Debonds and Voids in Adhesive Joints [Text]* / J. N. Rossettos, P. Lin, H. Nayeb-Hashemi // *Journal of Engineering Materials and Technology*. – 1994. – Vol. 116, Iss.4. – P. 533-538. DOI:10.1115/1.2904324.
5. Olia, M. *Analysis of adhesively bonded joints with gaps subjected to bending [Text]* / M. Olia, J. N. Rossettos // *International Journal of Solids and Structures*. – 1996. – Vol. 33, Iss. 18. – P. 2681-2693. DOI: 10.1016/0020-7683(95)00168-9.
6. Shishesaz, M. *Shear stress distribution in adhesive layers of a double-lap joint with void or bond separation [Text]* / M. Shishesaz, N. Bavi // *Journal of Adhesion Science and Technology*. – 2013. – Vol. 27, Iss. 11. – P. 1197-1225. DOI: 10.1080/01694243.2012.735914.
7. Shishesaz, M. *Interfacial shear stress distribution in the adhesively bonded tubular joints under tension with a circumferential void or debond [Text]* / M. Shishesaz, S. Tehrani // *Journal of Adhesion Science and Technology*. – 2020. – Vol. 34, Iss. 11. – P. 1172-1205. DOI:10.1080/01694243.2019.1701894.
8. Sengab, A. *A numerical study of failure of an adhesive joint influenced by a void in the adhesive [Text]* / A. Sengab, R. Talreja // *Composite Structures*. – 2016. – Vol. 156. – P. 165-170. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.12.052.
9. Vihak, V. M. *Investigation of the plane stressed state in a rectangular domain [Text]* / V. M. Vihak, Y. V. Tokovyyi, // *Materials Science*. – 2002. – Vol. 38, Iss. 2. – P. 230-237. DOI:10.1023/a:1020994204806.
10. Tokovyy, Y. *The direct integration method for elastic analysis of nonhomogeneous solids [Text]* / Y. Tokovyy, C. C. Ma. – Newcastle : Cambridge Scholars Publ. – 2021. – 342 p.
11. Rapp, P. *Mechanics of adhesive joints as a plane problem of the theory of elasticity. Part II: Displacement formulation for orthotropic adherends [Text]* / P. Rapp // *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. – 2015. – Vol. 15, Iss. 2. – P. 603-619. DOI: 10.1016/j.acme.2014.06.004.
12. *Design, analysis and performance of adhesively bonded composite patch repair of cracked aluminum aircraft panels [Text]* / A. C. Okafor, N. Singh, U. E. Ene-umuoh, S. V. Rao // *Composite Structures*. – 2005. – Vol. 71, Iss. 2. – P. 258-270. DOI: 10.1016/j.compstruct.2005.02.023.
13. Kurennov, S. S. *A Simplified Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Nonuniform Load [Text]* / S. S. Kurennov // *Mechanics of Composite Materials*. – 2015. – Vol. 51, Iss. 4. – P. 479-488. DOI: 10.1007/s11029-015-9519-2.
14. Kurennov, S. S. *Two-Dimensional Stressed State of an Adhesive Joint. Nonclassical Problem [Text]* / S. S. Kurennov, O. G. Polyakov, K. P. Barakhov // *J Math Sci*. – 2021. – Vol. 254. – P. 156-163. DOI: 10.1007/s10958-021-05295-5.
15. Kurennov, S. S. *Determining Stresses in an Adhesive Joint with a Longitudinal Unadhered Region Using a Simplified Two-Dimensional Theory [Text]* / S. S. Kurennov // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. – 2019. – Vol. 60, Iss. 4. – P. 740-747. doi:10.1134/s0021894419040199.
16. Vasil'ev, V. V. *On the solution singularity in the plane elasticity problem for a cantilever strip [Text]* /

V. V. Vasil'ev, S. A. Lurie // *Mech. Solids*. – 2013. – Vol. 48. – P. 388-396. DOI: 10.3103/S0025654413040055.

17. Machado, R. M. D. *Extended finite element modelling of aluminium stepped-adhesive joints [Text]* / R. M. D. Machado, R. D. S. G. Campilho, R. J. B. Rocha // *The Journal of Adhesion*. – 2019. – Vol. 95, Iss. 5-7. – P. 450-473. DOI: 10.1080/00218464.2018.1548966.

18. *Application of the Finite Element Method in the Analysis of Composite Materials: A Review [Text]* / S. David Müzel, E. P. Bonhin, N. M. Guimarães, E. S. Guidi // *Polymers*. – 2020. – Vol. 12, Iss. 4. – Article no. 818. DOI: 10.3390/polym12040818.

19. *The effect of joint configuration on the strength and stress distributions of dissimilar adhesively bonded joints [Text]* / A. Y. Kanani, X. Hou, R. Laidlaw, J. Ye // *Engineering Structures*. – 2021, – Vol. 226. – Article no. 111322. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.111322.

20. *Stress State of Two Glued Coaxial Tubes Under Nonuniform Axial Load [Text]* / S. Kurennov, K. Barakhov, D. Dvoretzka, O. Poliakov // In: *Nechyporuk, M., Pavlikov, V., Kritskiy, D. (eds) Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – 2020. ICTM 2020. Lecture Notes in Networks and Systems*. – Springer, Cham, 2021. – Vol. 188. – P. 389-400. DOI: 10.1007/978-3-030-66717-7_33.

21. *Optimal Design of Composite Shelled Sandwich Structures with a Honeycomb Filler [Text]* / A. Kondratiev, O. Potapov, A. Tsaritsynskiy, T. Nabokina // In: *Ivanov, V., Trojanowska, J., Pavlenko, I., Zajac, J., Peraković, D. (eds) Advances in Design, Simulation and Manufacturing IV. DSMIE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. – Springer, Cham, 2021 – P. 546-555. DOI: 10.1007/978-3-030-77719-7_54.

22. Барахов, К. П. Узагальнення моделі голанда і рейсснера на випадок осевої симетрії [Текст] / К. П. Барахов // *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. – 2021. – № 2. – С. 12-19. DOI: 10.32620/akt.2021.2.02.

23. *Напружено-деформований стан пластини, яка послаблена круговим вирізом та посилена двома круглими накладками [Текст]* / С. С. Куреннов, К. П. Барахов, О. О. Вамболь, В. М. Степаненко // *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. – 2021. – № 2. – С. 4-13. DOI: 10.32620/akt.2022.2.01.

24. *Analysis of the Adhesive Damage for Different Patch Shapes in Bonded Composite Repair of Corroded Aluminum Plate Under Thermo-Mechanical Loading [Text]* / M. Salem, M. Berrahou, B. Mechab, B. B. Bouadjra // *Journal of Failure Analysis and Prevention*. – 2021. – Vol. 21, Iss. 2. – P. 1274-1282. DOI: 10.1007/s11668-021-01167-x.

References

1. Ahn, J., Stapleton, S., & Waas, A. M. Advanced modeling of the behavior of bonded composite joints in aerospace applications. *Composite Joints and Connections*, 2011, pp. 423-434. DOI: 10.1533/9780857094926.2.423.

2. Roskowicz, M., Smal, T. & Szrama, S. New challenges and technologies related to aircrafts' battle damages. *Scientific Journal of the Military University of Land Forces*, 2018, vol. 50, no. 2(188), pp. 208-223. DOI 10.5604/01.3001.0012.2509.

3. da Silva, L. F. M., das Neves, P. J. C., Adams, R. D. & Speltz, J. K. Analytical models of adhesively bonded joints. Part I: Literature survey. *Int. J. Adhes. Adhesiv.*, 2009, vol. 29, pp. 319-330. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2008.06.005.

4. Rossettos, J. N., Lin, P., & Nayeb-Hashemi, H. Comparison of the Effects of Debonds and Voids in Adhesive Joints. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 1994, vol. 116, iss. 4, pp. 533-538. DOI: 10.1115/1.2904324.

5. Olia, M., & Rossettos, J. N. Analysis of adhesively bonded joints with gaps subjected to bending. *International Journal of Solids and Structures*, 1996, vol. 33, iss. 18, pp. 2681-2693. DOI: 10.1016/0020-7683(95)00168-9.

6. Shishesaz, M., & Bavi, N. Shear stress distribution in adhesive layers of a double-lap joint with void or bond separation. *Journal of Adhesion Science and Technology*, 2013, vol. 27, iss. 11, pp. 1197-1225. DOI: 10.1080/01694243.2012.735914

7. Shishesaz, M., & Tehrani, S. Interfacial shear stress distribution in the adhesively bonded tubular joints under tension with a circumferential void or debond. *Journal of Adhesion Science and Technology*, 2020, vol. 34, iss. 11, pp. 1172-1205. DOI: 10.1080/01694243.2019.1701894.

8. Sengab, A., & Talreja, R. A numerical study of failure of an adhesive joint influenced by a void in the adhesive. *Composite Structures*, 2016, vol. 156, pp. 165-170. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.12.052.

9. Vihak, V. M., & Tokovyy, Y. V. Investigation of the plane stressed state in a rectangular domain. *Materials Science*, 2002, vol. 38, iss. 2, pp. 230-237. DOI: 10.1023/a:1020994204806.

10. Tokovyy, Y. & Ma, C. C. *The direct integration method for elastic analysis of nonhomogeneous solids*. Newcastle, Cambridge Scholars Publ., 2021. 342 p.

11. Rapp, P. Mechanics of adhesive joints as a plane problem of the theory of elasticity. Part II: Displacement formulation for orthotropic adherends. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 2015, vol. 15, iss. 2, pp. 603-619. DOI: 10.1016/j.acme.2014.06.004.

12. Okafor, A. C., Singh, N., Enemuoh, U. E. & Rao, S. V. Design, analysis and performance of adhesively bonded composite patch repair of cracked aluminum aircraft panels. *Composite Structures*, 2005, vol. 71, iss. 2, pp. 258-270. DOI: 10.1016/j.compstruct.2005.02.023.
13. Kurennov, S. S. A Simplified Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Nonuniform Load. *Mechanics of Composite Materials*, 2015, vol. 51, iss. 4, pp. 479-488. DOI: 10.1007/s11029-015-9519-2.
14. Kurennov, S. S., Polyakov, O. G. & Barakhov, K. P. Two-Dimensional Stressed State of an Adhesive Joint. Nonclassical Problem. *J Math Sci*, 2021, vol. 254, pp. 156-163. DOI: 10.1007/s10958-021-05295-5.
15. Kurennov, S. S. Determining Stresses in an Adhesive Joint with a Longitudinal Unadhered Region Using a Simplified Two-Dimensional Theory. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2019, vol. 60, iss. 4, pp. 740-747. DOI: 10.1134/s0021894419040199.
16. Vasil'ev, V. V. & Lurie, S. A. On the solution singularity in the plane elasticity problem for a cantilever strip. *Mech. Solids*, 2013, vol. 48, pp. 388-396. DOI: 10.3103/S0025654413040055.
17. Machado, R. M. D., Campilho, R. D. S. G., & Rocha, R. J. B. Extended finite element modelling of aluminium stepped-adhesive joints. *The Journal of Adhesion*, 2019, vol. 95, iss. 5-7, pp. 450-473. DOI: 10.1080/00218464.2018.1548966.
18. David Müzel, S., Bonhin, E. P., Guimarães, N. M., & Guidi, E. S. Application of the Finite Element Method in the Analysis of Composite Materials: A Review. *Polymers*, 2020, vol. 12, iss. 4, article no. 818. DOI: 10.3390/polym12040818.
19. Kanani, A. Y., Hou, X., Laidlaw, R., & Ye, J. The effect of joint configuration on the strength and stress distributions of dissimilar adhesively bonded joints. *Engineering Structures*, 2021, vol. 226, article no. 111322. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.111322.
20. Kurennov, S., Barakhov, K., Dvoretzka, D. & Poliakov, O. Stress State of Two Glued Coaxial Tubes Under Nonuniform Axial Load. In: *Nechyporuk, M., Pavlikov, V., Kritskiy, D. (eds) Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering - 2020. ICTM 2020. Lecture Notes in Networks and Systems*, 2021, vol. 188, Springer, Cham, pp. 389-400. DOI: 10.1007/978-3-030-66717-7_33.
21. Kondratiev, A., Potapov, O., Tsaritsynskiy, A. & Nabokina, T. Optimal Design of Composite Shelled Sandwich Structures with a Honeycomb Filler. In: *Ivanov, V., Trojanowska, J., Pavlenko, I., Zajac, J., Peraković, D. (eds) Advances in Design, Simulation and Manufacturing IV. DSMIE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering*, Springer, Cham, 2021, pp. 546-555. DOI: 10.1007/978-3-030-77719-7_54.
22. Barakhov, K. P. Uzahal'nennya modeli Holanda i Reyssnera na vypadok os'ovoyi symetriyi [Generalization of the Holland and Reissner model in case of axial symmetry]. *Aviacijno-kosmicna tehnika i tehnologia – Aerospace technic and technology*, 2021, no. 2, pp. 12-19. DOI: 10.32620/akt.2021.2.02.
23. Kurennov, S., Barakhov, K., Vambol, O. & Stepanenko, V. Napruzhenno-deformovanyy stan plastyny, yaka poslablena kruhovym vyrizom ta posylena dvoma kruhlymy nakladkamy [The stress-strain state of a plate is weakened by a circular cutout and reinforced by two round patches]. *Aviacijno-kosmicna tehnika i tehnologia – Aerospace technic and technology*, 2022, no. 2, pp. 4-13. DOI: 10.32620/akt.2022.2.01.
24. Salem, M., Berrahou, M., Mechab, B. & Bouiadja, B. B. Analysis of the Adhesive Damage for Different Patch Shapes in Bonded Composite Repair of Corroded Aluminum Plate Under Thermo-Mechanical Loading. *Journal of Failure Analysis and Prevention*, 2021, vol.21, iss. 2. DOI: 10.1007/s11668-021-01167-x.

Надійшла до редакції 11.02.2023, розглянута на редколегії 12.06.2023

STRESS -STRAIN STATE OF ADHESIVE JOINT, THAT HAS A LONGITUDINAL DEFECT

Sergiy Kurennov, Kostiantyn Barakhov

In adhesive joints, one has to face the phenomenon of non-adhesive. It is known that non-adhesive reduces the strength of such joints. Analytical models known today for calculating the stress-strain state of adhesive joints have certain defects that appear as a result of simplification (one-dimensional models), and the realization of numerical methods requires a large resource of computing equipment. The subject of study in this article is a mathematical model of the stress-strain state of an adhesive joint of two plates. The purpose of this research is to study the stress-strain state of an adhesive joint with non-adhesives and to develop methods for studying the stress state of adhesive lap joints. Methods: a simplified two-dimensional analytical model of the stress state of the adhesive joint was used to construct an analytical solution to the problem of the stress state of the joint, which contains a defect in the adhesive layer along the side edge of the bonding area. The simplification of the model consists of the fact that the transverse

displacements of the base layers are considered to be zero. This assumption can be interpreted as the presence of base layers of high stiffness in the transverse direction, and it allows reducing the problem of the stressed state of the joint to a system of two partial differential equations with respect to the longitudinal movements of the base layers and obtaining the solution of the problem in an analytical form. The obtained solution is written in the form of functional series. The eigenfunctions are not orthogonal. Using the least squares method, the solution of the problem is reduced to a system of linear equations. The model problem for joining two aluminum plates of the same size has been solved. The results showed that the presence of non-adhesive area can significantly increase the stress near the edge of the adhesive layer. Corner points in the adhesive layer are especially dangerous from the strength point of view. The results were compared with the results of finite element modeling. The comparison showed that the proposed mathematical model has high accuracy for engineering calculations. This model can be developed to solve similar problems, for example, to study the stress state of the joint of coaxial pipes, which has defects in the adhesive layer.

Keywords: adhesive joint; analytical model; finite element method; phenomenon of non-adhesive; method of least squares.

Куреннов Сергій Сергійович – д-р техн. наук, доц., проф. каф. вищої математики та системного аналізу, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна.

Барахов Костянтин Петрович – канд. техн. наук, доц. каф. вищої математики та системного аналізу, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна.

Sergiy Kurennov – Doctor of Technical Science, Associate Professor, Professor of Department of Higher Mathematics and System Analysis, National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv, Ukraine, e-mail: kurennov.ss@gmail.com, ORCID: 0000-0002-3835-3288.

Kostiantyn Barakhov – Candidate of Technical Science, Associate Professor of Department of Higher Mathematics and System Analysis, National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv, Ukraine, e-mail: kpbarakhov@gmail.com, ORCID: 0000-0003-1714-7917.