

Ю. П. ПЕТРОВ

ОСНОВЫ РАСЧЕТА НА ИЗГИБ ПЛАСТИН ДИСКРЕТНЫМ МЕТОДОМ

Приближенному решению дифференциального уравнения изгиба упругой пластины посвящено много работ. Однако имеющиеся методы решения этой задачи позволяют учитывать далеко не все граничные условия и нагрузки. Наиболее универсальный характер носит метод сеток. Недостатками его являются: громоздкость решения системы алгебраических уравнений, недостаточная точность и получение результата не в аналитической форме.

В этом смысле дискретный метод [1], [4], [6], [7], (или метод прямых) обладает лучшими возможностями. Но наряду с этим он требует решения системы дифференциальных уравнений, что при большом их числе встречает большие трудности.

В данной работе поставлены следующие задачи: 1) найти рациональный метод приближенного решения системы дифференциальных уравнений дискретного метода; 2) исследовать вопрос о точности интерполирования функции прогибов пластины полиномами различных степеней; 3) исследовать вопрос о точности результата расчета в зависимости от числа прямых и граничных условий.

Насколько нам известно, из всех этих вопросов рассматривался только вопрос о числе прямых применительно к решению уравнений Лапласа и Пуассона [7].

§ 1. «СКОЛЬЗЯЩАЯ» ИНТЕРПОЛЯЦИЯ. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дискретный метод позволяет перейти от двухмерной задачи к одномерной. Этот переход можно осуществить по разному, например, «скользящей» интерполяцией функции прогибов пластины степенным полиномом двух переменных [1].

Дифференциальное уравнение изгиба упругой пластины имеет вид

$$D\Delta\Delta W(x, y) = q(x, y). \quad (1.1)$$

Интерполируем функцию $W(x, y)$ полиномом

$$W(x, y) = \sum_0^k a_k x^k, \quad (1.2)$$

где $a_k = f_k(y)$, $k = 2, 4, 6, \dots$

Пользуясь значениями (1.2) в фиксированных точках x ($i=1, 2, \dots, n$), составляем систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_k

$$W_i(x_i, y) = \sum_0^k a_k x_i^k. \quad (1.3)$$

($i = 1, 2, \dots, n$; $n = k + 1$)

Формулы для a_k получаются симметричными и простыми, если $\dots d_{-2} = d_{-1} = d_1 = d_2 \dots = d$ и начало координат полинома (1.2) взято в центральной точке x_i (рис. 1). Ниже, в целях сокращения, пишем W и W_i вместо $W(x, y)$ и $W_i(x_i, y)$.

При $k = 2$

$$W = W_i + \frac{1}{2d}(W_{i+1} - W_{i-1})x + \frac{1}{2d^2}(W_{i+1} - 2W_i + W_{i-1})x^2, \quad (1.4)$$

где W_i , W_{i+1} и W_{i-1} — дискретные функции y при $x = x_i$, $x = x_{i+1}$ и $x = x_{i-1}$.

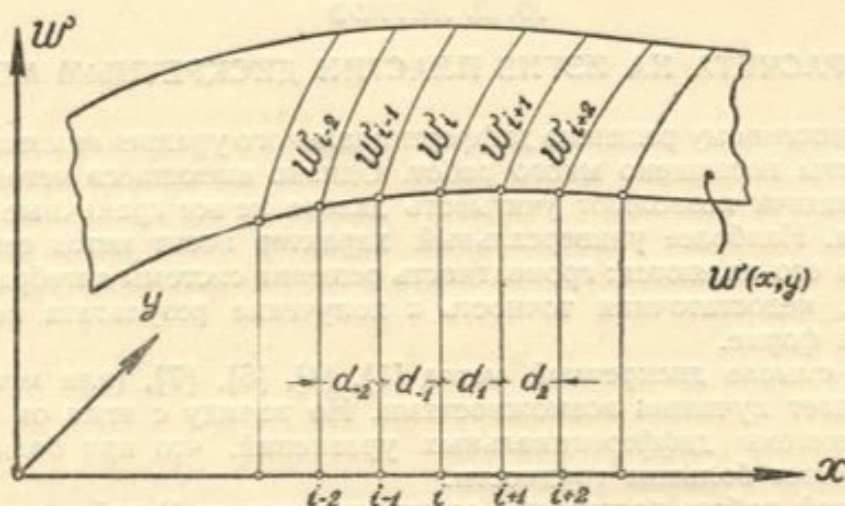


Рис. 1.

Из (1.4) следует

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W_i}{\partial x} &= \frac{1}{2d}(W_{i+1} - W_{i-1}) \\ \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} &= \frac{1}{d^2}(W_{i+1} - 2W_i + W_{i-1}) \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Пользуясь (1.5) как операторами, получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} &= \frac{1}{2d^2}(W_{i+2} - 2W_{i+1} + 2W_{i-1} - W_{i-2}) \\ \frac{\partial^4 W_i}{\partial x^4} &= \frac{1}{d^4}(W_{i+2} - 4W_{i+1} + 6W_i - 4W_{i-1} + W_{i-2}) \end{aligned} \right\} \quad (1.5)^*$$

При $k = 4$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dW_i}{dx} &= \frac{1}{12d}(-W_{i+2} + 8W_{i+1} - 8W_{i-1} + W_{i-2}) \\ \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} &= \frac{1}{12d^2}(-W_{i+2} + 16W_{i+1} - 30W_i + 16W_{i-1} - W_{i-2}) \\ \frac{\partial^3 W_i}{\partial x^3} &= \frac{1}{2d^3}(W_{i+2} - 2W_{i+1} + 2W_{i-1} - W_{i-2}) \\ \frac{\partial^4 W_i}{\partial x^4} &= \frac{1}{d^4}(W_{i+2} - 4W_{i+1} + 6W_i - 4W_{i-1} + W_{i-2}) \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Рассмотрим прямоугольную пластину (рис. 2), нагруженную распределенной нагрузкой $q(x, y)$, с произвольными граничными условиями, которые примем несимметричными относительно оси y . Чтобы получить систему дифференциальных уравнений дискретного метода, проводим в пластине $n + 2$ прямых с расстоянием между ними $d = \frac{a}{n+1}$ (прямые 0 и $n + 1$ проходят по граням AB и CD). Уравнение (1.1) для прямой i , где $x = x_i$, примет вид

$$D\Delta\Delta W_i(x_i, y) = q_i(x_i, y). \quad (1.7)$$

Производные $\frac{\partial^4 W_i}{\partial x^4}$ и $\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}$ в (1.7) заменим их конечно-разностными выражениями, согласно (1.5), (1.5)* или (1.6). Меняя значение индекса i от 0 до $n+1$ и тем самым перенося начало координат интерполирующего полинома (1.2), мы как бы «скользим» этим полиномом по оси x от точки к точке. В результате придем к системе из $n+2$ неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Вид такой системы зависит от степени k полинома (1.2).

При $k=2$

$$W_i^{IV} + \frac{2}{d^2}(W_{i+1}'' - 2W_i'' + W_{i-1}'') + \frac{1}{d^4}(W_{i+2} - 4W_{i+1} + 6W_i - 4W_{i-1} + W_{i-2}) = \frac{q_i}{D} \quad (1.8)$$

$(i = 0, 1, 2, \dots, n, n+1)$

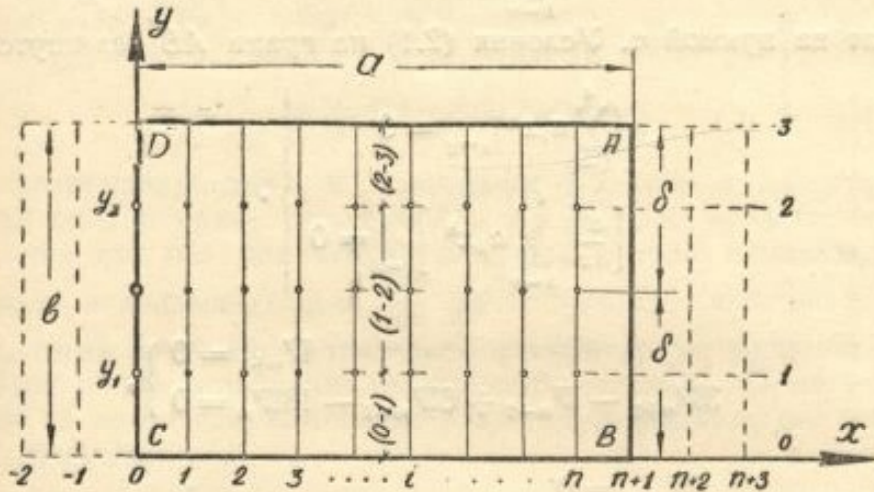


Рис. 2.

При $k=4$

$$W_i^{VI} + \frac{1}{6d^2}(-W_{i+2}'' + 16W_{i+1}'' - 30W_i'' + 16W_{i-1}'' - W_{i-2}'') + \frac{1}{d^4}(W_{i+2} - 4W_{i+1} + 6W_i - 4W_{i-1} + W_{i-2}) = \frac{q_i}{D} \quad (1.9)$$

$(i = 0, 1, 2, \dots, n, n+1)$

Системы (1.8) и (1.9) содержат по $n+6$ неизвестных функций при $n+2$ дифференциальных уравнениях. Четыре внеконтурных функции определяются из граничных условий на гранях AB и CD .

§ 2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим некоторые случаи закрепления граней прямоугольной пластины (рис. 2).

Жесткое защемление граней

На жестко защемленной грани AB имеем:

$$W = 0, \quad \frac{dW}{dx} = 0. \quad (2.1)$$

Располагаем начало координат интерполирующего полинома $W = \sum_{k=0}^2 a_k x^k$ на прямой $n+1$. Рассматриваемое граничное условие на грани

AB приобретает вид

$$\left. \begin{aligned} W|_{x=0} &= a_0 = 0 \\ \frac{dW}{dx}|_{x=0} &= a_1 = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.2)$$

где

$$a_0 = W_{n+1} = 0, \quad a_1 = \frac{1}{2d}(W_{n+2} - W_n).$$

Из (2.2) следует

$$\left. \begin{aligned} W_{n+1} &= 0 \\ W_{n+2} &= W_n \end{aligned} \right\}. \quad (2.3)$$

Найдем внеконтурную функцию W_{n+2} с помощью интерполирующего полинома 4-й степени $W = \sum_{k=0}^4 a_k x^k$. Для этого располагаем его начало координат на прямой n . Условия (2.1) на грани AB запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^4 a_k x^k \right)_{x=d} &= 0 \\ \left[\frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^4 a_k x^k \right) \right]_{x=d} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.4)$$

или

$$\left. \begin{aligned} W_{n+1} &= 0 \\ 3W_{n+2} - W_{n-2} + 6W_{n-1} - 18W_n &= 0 \end{aligned} \right\},$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} W_{n+1} &= 0 \\ W_{n+2} &= 6W_n - 2W_{n-1} + \frac{1}{3}W_{n-2} \end{aligned} \right\}. \quad (2.5)$$

При жестком защемлении грани AD

$$\left. \begin{aligned} W_i|_{y=b} &= 0, \quad \frac{dW_i}{dy}|_{y=b} = 0 \\ (i &= 0, 1, \dots, n, n+1) \end{aligned} \right\}. \quad (2.6)$$

Свободное опирание граней

Располагаем начало координат полинома (1.2) 4-й степени на прямой n . При свободном опирании грани AB это дает

$$\left. \begin{aligned} W_{n+1} &= 0 \\ W_{n+2} &= \frac{1}{11}(-6W_n - 4W_{n-1} + W_{n-2}) \end{aligned} \right\}. \quad (2.7)$$

В случае свободного опирания грани CD

$$\left. \begin{aligned} W_0 &= 0 \\ W_{-1} &= \frac{1}{11}(-6W_1 - 4W_2 + W_3) \end{aligned} \right\}. \quad (2.8)$$

Если свободно оперта грань AD

$$\left. \begin{aligned} W_i|_{y=b} &= 0, \quad \frac{d^2 W_i}{dy^2}|_{y=b} = 0 \\ (i &= 0, 1, 2, \dots, n+1) \end{aligned} \right\}. \quad (2.9)$$

Свободные грани

На грани *AB*

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{x=a} &= 0 \\ \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Заменяв частные производные системы (2.10) их конечно-разностными выражениями из (1.5) и (1.5)*, получим

$$\left. \begin{aligned} W_{n+2} - 2W_{n+1} + W_n + \nu d^2 \frac{d^2 W_{n+1}}{dy^2} &= 0 \\ W_{n+3} - 2W_{n+2} + 2W_n - W_{n-1} + 2d^3 (2 - \nu) \frac{d^2}{dy^2} \frac{W_{n+2} - W_n}{2d} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} W_{n+2} &= 2W_{n+1} - W_n - \nu d^2 W_{n+1} \\ W_{n+3} &= 4W_{n+1} - 4W_n + W_{n-1} + 2d^2 (2 - \nu) [W_n - \\ &\quad - W_{n+1} + \frac{\nu d^2}{2} W_{n+1}^{IV}] - 2\nu d^2 W_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

При интерполировании *W* полиномом 4-й степени непосредственно определить внеконтурные функции *W_{n+2}* и *W_{n+3}* не представляется возможным, так как обе они входят под знак второй производной по *y*. Однако если использовать для $\frac{\partial W}{\partial x}$ односторонние конечно-разностные формулы, тогда возможно определить внеконтурные функции и в этом случае. При начале координат интерполирующего полинома 4-й степени на прямой *O* имеем такую конечно-разностную формулу для первой производной «справа»:

$$\frac{dW^{(+)}}{dx} = \frac{1}{12d} (-25W_0 + 48W_1 - 36W_2 + 16W_3 - 3W_4). \quad (2.13)$$

Соответственно на грани *AB* первая производная «слева»

$$\frac{dW^{(-)}}{dx} = \frac{1}{12d} (25W_{n+1} - 48W_n + 36W_{n-1} - 16W_{n-2} + 3W_{n-3}). \quad (2.14)$$

С помощью формулы (2.14) внеконтурные функции для свободной грани *AB* при интерполировании *W* полиномом 4-й степени выразятся так:

$$\left. \begin{aligned} W_{n+2} &= \frac{1}{14} \left\{ 30W_{n+1} - 18W_n + 2W_{n-1} - 2d^3 (2 - \nu) \frac{d^2}{dy^2} \left[\frac{dW^{(-)}}{dx} \right] - \right. \\ &\quad \left. - 12d^2 \nu \frac{d^2 W_{n+1}}{dy^2} \right\} \\ W_{n+3} &= \frac{1}{7} \left\{ 30W_{n+1} - 32W_n + 9W_{n-1} - 16d^3 (2 - \nu) \frac{d^2}{dy^2} \left[\frac{dW^{(-)}}{dx} \right] - \right. \\ &\quad \left. - 12d^2 \nu \frac{d^2 W_{n+1}}{dy^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Для грани *CD*

$$\left. \begin{aligned} W_{-1} &= \frac{1}{14} \left\{ 30W_0 - 18W_1 + 2W_2 - 2d^3 (2 - \nu) \frac{d^2}{dy^2} \left[\frac{dW^{(+)}}{dx} \right] - \right. \\ &\quad \left. - 12d^2 \nu \frac{d^2 W_0}{dy^2} \right\} \\ W_{-2} &= \frac{1}{7} \left\{ 30W_0 - 32W_1 + 9W_2 - 16d^3 (2 - \nu) \frac{d^2}{dy^2} \left[\frac{dW^{(+)}}{dx} \right] - \right. \\ &\quad \left. - 12d^2 \nu \frac{d^2 W_0}{dy^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

На свободной грани CB

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{d^2 W_i}{dy^2} + \nu \frac{1}{12d^2} (-W_{i+2} + 16W_{i+1} - 30W_i + 16W_{i-1} - W_{i-2}) \right]_{y=0} &= 0 \\ \left[\frac{d^3 W_i}{dy^3} + (2-\nu) \frac{d}{dy} \left\{ \frac{1}{12d^2} (-W_{i+2} + 16W_{i+1} - 30W_i + \right. \right. \\ \left. \left. + 16W_{i-1} - W_{i-2}) \right\} \right]_{y=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

$(i = 0, 1, 2, \dots, n, n+1)$

Грани свободно оперты на упруго прогибающиеся балки

И в этом случае, если функция W интерполируется полиномом 4-й степени, при определении внеконтурных функций необходимо пользоваться формулами (2.13) или (2.14). Пусть свободно оперта на упругую балку грань AB . Тогда

$$\left. \begin{aligned} -W_{n+3} + 16W_{n+2} - 30W_{n+1} + 16W_n - W_{n-1} + 12d^2 \nu \frac{d^2 W_{n+1}}{dy^2} &= 0 \\ W_{n+3} - 2W_{n+2} + 2W_n - W_{n-1} + 2d^3 (2-\nu) \frac{d^2}{dy^2} \left[\frac{dW^{(-)}}{dx} \right] &= \\ = -EJ \frac{d^4 W_{n+1}}{dy^4} & \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Из (2.18) определяются W_{n+2} и W_{n+3} . Приняв в (2.18) $n+1=0$ и заменив $\frac{dW^{(-)}}{dx}$ на $\frac{dW^{(+)}}{dx}$, получим выражение граничных условий (2.18) на грани CD .

На грани DA

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 W_i}{dy^2} + \frac{\nu}{12d^2} (-W_{i+2} + 16W_{i+1} - 30W_i + 16W_{i-1} - W_{i-2}) &= 0 \\ \frac{d^3 W_i}{dy^3} + \frac{2-\nu}{12d^2} \frac{d}{dy} (-W_{i+2} + 16W_{i+1} - 30W_i + 16W_{i-1} - W_{i-2}) &= \\ = -EI \frac{1}{d^4} (W_{i+2} - 4W_{i+1} - 6W_i + 4W_{i-1} - W_{i-2}) & \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

$(i = 0, 1, 2, \dots, n, n+1)$

Аналогично записываются в дискретной форме и остальные случаи опирания граней пластины на упругие опоры.

§ 3. ПРИБЛИЖЕННЫЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Главное препятствие при практическом использовании дискретного метода заключается в громоздкости решения систем дифференциальных уравнений (1.8) или (1.9). Интегрирование последних методом Эйлера мало пригодно, так как уже для систем из трех дифференциальных уравнений приводит к трудоемким вычислениям.

Поэтому нами избран приближенный способ решения систем (1.8) или (1.9), примыкающий к методу «сосредоточенных грузов» [2]. Распространим последний на систему дифференциальных уравнений (1.8). Положим, что граничные условия на гранях AB и CD несимметричны относительно оси y . Определив четыре внеконтурных функции из граничных условий на гранях AB и CD , получим систему из $n+2$ дифференциальных уравнений с $n+2$ неизвестными функциями, изменяющимися в интервале $(0, b)$ (рис 2.).

Переносим все члены полученной системы, кроме W_i^{IV} ($i = 0, 1, 2, \dots, n+1$), в правую часть и рассматриваем их как некоторые рас-

пределенные «добавки» к внешней нагрузке q_i ($i = 0, 1, \dots, n + 1$). Система 1.8) приобретает вид

$$W_i^{IV} = \frac{q_i}{D} - \frac{2}{d^2} (W_{i+1}'' - 2W_i'' + W_{i-1}'') - \frac{1}{d^4} (W_{i+2} - 4W_{i+1} + 6W_i - 4W_{i-1} + W_{i-2}). \quad (3.1)$$

$(i = 0, 1, \dots, n + 1)$

Обозначим

$$\frac{2}{d^2} (W_{i+1}'' - 2W_i'' + W_{i-1}'') + \frac{1}{d^4} (W_{i+2} - 4W_{i+1} + 6W_i - 4W_{i-1} + W_{i-2}) = F_i(y). \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n + 1)$$

Разобьем интервал интегрирования, например, на два равных участка длиной $\delta = \frac{b}{2}$ и представим $F_i(y)$ ($i = 0, 1, \dots, n + 1$) в виде двух «сосредоточенных» грузов:

$$P_1^i = F_1^i(y) |_{y=y_1} \cdot \delta \quad \text{и} \quad P_2^i = F_2^i(y) |_{y=y_2} \cdot \delta \quad (i = 0, 1, \dots, n + 1),$$

что соответствует равномерному распределению «добавочной» нагрузки на каждом из участков δ . В результате, на участке (0—1) получим систему

$$DW_i^{IV} = q_i. \quad (3.2)$$

$(i = 0, 1, \dots, n + 1)$

Интегрируем (3.2) при $q_i = q = \text{const}$.

$$W_i^{(0-1)} = \frac{qy^4}{24D} + \sum_{m=0}^3 C_m^{(i)} \frac{y^m}{m!}. \quad (3.3)$$

$(i = 0, 1, \dots, n + 1; 0! = 1)$

Половина из общего числа постоянных интегрирования $C_m^{(i)}$ ($i=0, 1, \dots, n + 1; m = 0, 1, 2, 3$) определяется из граничных условий на грани BC. Подставив функции $W_i^{(0-1)}$ ($i = 0, 1, \dots, n + 1$) в $F_i(y)$ ($i = 0, 1, \dots, n + 1$) и полагая в полученных выражениях $y = y_1$, находим «сосредоточенные» грузы P_1^i ($i = 0, 1, \dots, n + 1$), влияние которых на участке (1—2) учитываем по методу начальных параметров, а именно:

$$W_i^{(1-2)} = \frac{qy^4}{24D} + \sum_{m=0}^3 C_m^{(i)} \frac{y^m}{m!} - P_1^i \frac{(y - y_1)^3}{6}. \quad (3.4)$$

$(i = 0, 1, \dots, n + 1)$

«Сосредоточенные» грузы P_2^i ($i = 0, 1, \dots, n + 1$) вычисляем так же, как и P_1^i ($i = 0, 1, \dots, n + 1$), но с помощью функций $W_i^{(1-2)}$ ($i = 0, 1, \dots, n + 1$). На участке (2—3)

$$W_i^{(2-3)} = \frac{qy^4}{24D} + \sum_{m=0}^3 C_m^{(i)} \frac{y^m}{m!} - P_1^i \frac{(y - y_1)^3}{6} - P_2^i \frac{(y - y_2)^3}{6}. \quad (3.5)$$

$(i = 0, 1, \dots, n + 1)$

Остальные постоянные интегрирования определяются из граничных условий на грани AD.

Практические вычисления показывают нецелесообразность разделения интервала интегрирования системы (3.1) на большое число участков δ из-за громоздких вычислений «сосредоточенных грузов».

Если же брать один или два участка, результаты решения системы (3.1) получаются неудовлетворительными. Поэтому, отказываясь от деления интервала интегрирования на большое число участков δ , но желая получить практически приемлемое решение системы (3.1), необходимо более точно представить изменение $F_i(y)$ ($i = 0, 1, \dots, n+1$) в интервале $(0, b)$. С этой целью будем рассматривать функции W_i ($i = 0, 1, \dots, n+1$), входящие в $F_i(y)$ ($i = 0, 1, \dots, n+1$) как прогибы балок с соответствующими концевыми условиями и приближенно представлять их полиномами вида

$$W_i = \sum_{k=0}^m b_k^{(i)} \varphi_k(y) \quad (3.6)$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n+1)$$

с неизвестными коэффициентами $b_k^{(i)}$.

Функции $\varphi_k(y)$ ($k = 0, 1, \dots, m$), как и концевые условия, одинаковы для всех прямых. В частном случае граничных условий на гранях AD и BC $\varphi_k(y)$ ($k = 0, 1, \dots, m$) могут быть взяты удовлетворяющими обоим концевым условиям, т. е. граничным условиям на гранях AD и BC . Если же граничные условия на гранях AD и BC таковы, что такой возможности не представляется, тогда функции $\varphi_k(y)$ ($k = 0, 1, \dots, m$) можно взять удовлетворяющими только балочным концевым условиям на каждой из прямых i ($i = 0, 1, \dots, n+1$).

Полином (3.6) может быть как степенным полиномом, так и обобщенным полиномом, у которого каждая из функций $\varphi_k(y)$ представляет собой алгебраический полином. Число неизвестных коэффициентов $b_k^{(i)}$ ($k = 0, 1, \dots, m$) в полиноме (3.6) определяется желательной точностью решения задачи.

Подставив в правую часть системы (3.1) полиномы (3.6), получим

$$W_i^{IV} = \frac{q_i}{D} - \frac{2}{d^2} \sum_{k=0}^m \varphi_k(y) (b_k^{i+1} - 2b_k^i + b_k^{i-1}) - \frac{1}{d^4} \sum_{k=0}^m \varphi_k(y) (b_k^{i+2} - 4b_k^{i+1} + 6b_k^i - 4b_k^{i-1} + b_k^{i-2}) \quad (i = 0, 1, \dots, n+1), \quad (3.7)$$

где коэффициенты b_k^{-1} , b_k^{-2} , b_k^{n+2} , b_k^{n+3} определяются из граничных условий на гранях AB и CD .

Интегрируем (3.7).

$$W_i = \frac{q_i y^4}{24D} + \sum_{m=0}^3 C_m^{(i)} \frac{y^m}{m!} - \sum_{k=0}^m \alpha_k (b_k^{i+1} - 2b_k^i + b_k^{i-1}) - \sum_{k=0}^m \beta_k (b_k^{i+2} - 4b_k^{i+1} + 6b_k^i - 4b_k^{i-1} + b_k^{i-2}) \quad (i = 0, 1, \dots, n+1), \quad (3.8)$$

где

$$\alpha_k = \int_0^b \int_0^b \varphi_k(y) dy dy, \quad \beta_k = \int_0^b \int_0^b \int_0^b \varphi_k(y) dy dy dy dy, \quad q = q_i = \text{const.}$$

Постоянные интегрирования $C_m^{(i)}$ ($i = 0, 1, \dots, n+1$) находятся из соответствующих граничных условий на гранях AD и BC . Определив их, получаем $n+2$ функций вида (3.8). Неизвестные коэффициенты $b_k^{(i)}$ ($k = 0, 1, \dots, m$; $i = 0, 1, \dots, n+1$) могут быть найдены двумя способами: во-первых, приравниванием прогибов W_i ($i = 0, 1, \dots, n+1$) по (3.8) и (3.6), это дает систему алгебраических уравнений, решением

которой и определяются все коэффициенты полинома (3.6); во-вторых, из условия минимума квадратичного отклонения функций W_i ($i = 0, 1, \dots, \dots n + 1$) по (3.8) и (3.6). Такой способ более громоздок, но дает лучшие результаты.

В том случае, если прямые могут быть введены так, чтобы они не пересекали свободную грань или грань, закрепленную на упругой балке, постоянные интегрирования $C_m^{(i)}$ ($i = 0, 1, \dots, n + 1$) определяются отдельно для каждой прямой i . Это позволяет, с использованием приближенного способа интегрирования системы дифференциальных уравнений, получить дискретным методом несложное решение для довольно широкого круга задач об изгибе прямоугольных пластин. При этом метод начальных параметров, с учетом того, что системы вида (1.8) или (1.9) можно получить и при неравных расстояниях между прямыми, дает возможность учитывать не только распределенные внешние нагрузки, но и сосредоточенные, действующие на пластину в любой ее точке.

Когда же решаемая задача такова, что вводимые прямые должны пересекать грани с $W \neq 0$ или грани, закрепленные на упругих балках, применение приближенного способа усложняется из-за громоздких вычислений, связанных с определением постоянных интегрирования и коэффициентов $b_k^{(i)}$ ($k = 0, 1, \dots, m$). Поэтому при решении такого типа задач целесообразно использовать способ «сосредоточенных грузов», так как при этом необходимо определять только постоянные интегрирования.

В заключение отметим, что приближенный способ, изложенный выше, примыкает к приближенному способу интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, который предложен в работе [5].

§ 4. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫМ СПОСОБОМ

Возьмем пример, для которого следует ожидать плохие результаты, а именно: защемленную по контуру пластину размерами $2a \times 2a$, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой $q = \text{const}$ (рис. 3).

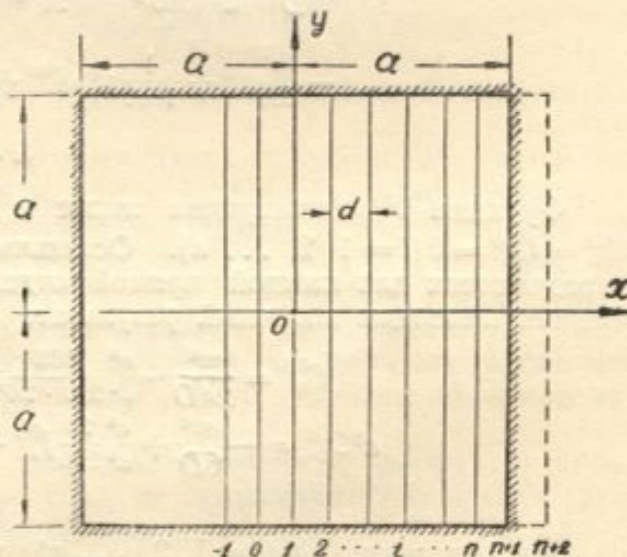


Рис. 3.

Задача решалась так. Учитывая симметрию W относительно оси y , проводим в пластине n прямых с расстоянием между ними $d = \frac{a}{n}$. Решение ведем приближенным способом, приняв

$$W_i = b_i \varphi = b_i (a^2 - y^2)^2. \quad (4.1)$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$

Система дифференциальных уравнений (1.8) приобретает вид

$$W_i^{IV} = \frac{q}{D} - \frac{2}{d^2} (12y^2 - 4a^2) f_i^{(2)} - \frac{1}{d^4} (a^4 - 2d^2 y^2 + y^4) f_i^{(0)}, \quad (4.2)$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$

где

$$\begin{aligned} f_i^{(2)} &= b_{i+1} - 2b_i + b_{i-1}, \\ f_i^{(0)} &= b_{i+2} - 4b_{i+1} + 6b_i - 4b_{i-1} + b_{i-2}. \end{aligned}$$

Система (1.9) имеет вид

$$W_i^{IV} = \frac{q}{D} - \frac{2}{d^2} (12y^2 - 4a^2) - f_i^{(2)} \frac{1}{d^4} (a^4 - 2a^2y^2 + y^4) f_i^{(0)}, \quad (4.3)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

где

$$\begin{aligned} 12f_i^{(2)} &= -b_{i+2} + 16b_{i+1} - 30b_i + 16b_{i-1} - b_{i-2}, \\ f_i^{(0)} &= b_{i+2} - 4b_{i+1} + 6b_i - 4b_{i-1} + b_{i-2}. \end{aligned}$$

Из граничного условия на грани $x = a$, согласно (2.3), следует:

$$b_{n+2} = b_n \text{ и } b_{n+1} = 0,$$

а согласно (2.5):

$$b_{n+2} = 6b_n - 2b_{n-1} + \frac{1}{3}b_{n-2} \text{ и } b_{n+1} = 0.$$

Из-за симметрии относительно оси y

$$b_0 = b_2, \quad b_{-1} = b_3.$$

Интегрируем (4.2) или (4.3).

$$\begin{aligned} W_i &= \frac{qy^4}{24D} - \frac{2}{d^2} \left(\frac{12}{360}y^3 - \frac{4a^2}{24}y^4 \right) f_i^{(2)} - \frac{1}{d^4} \left(\frac{a^4}{24}y^4 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2a^2}{360}y^6 + \frac{1}{1680}y^8 \right) f_i^{(0)} + \sum_{m=0}^3 C_m^{(i)} \frac{y^m}{m!}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

Функция W симметрична также и относительно оси x . Поэтому $C_1^{(i)} = C_3^{(i)} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Остальные постоянные интегрирования определяются для каждой прямой отдельно. Опуская несложные выкладки, приводим конечный результат:

$$\left. \begin{aligned} C_0^{(i)} &= \frac{qa^4}{24D} - \frac{a^8}{d^4} \frac{163}{210 \cdot 24} f_i^{(0)} + \frac{a^6}{d^2} \frac{1}{5} f_i^{(2)} \\ a^2 C_2^{(i)} &= -\frac{qa^4}{6D} + \frac{a^8}{d^4} \frac{29}{210} f_i^{(0)} - \frac{a^6}{d^2} \frac{14}{15} f_i^{(2)} \end{aligned} \right\}. \quad (4.5)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

Коэффициенты b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) найдем, приравняв прогибы при $y = 0$ по (4.1) и (4.4). Это дает алгебраическую систему

$$C_0^{(i)} = b_i a^4, \quad (4.5)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

решением которой и определяются все b_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Подставив найденные коэффициенты b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) в (4.4), получаем искомые функции W_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Точность приближенного способа покажем, интегрируя систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} W_1^{IV} + \frac{8}{a^2} (2W_2'' - 2W_1'') + \frac{16}{a^4} (-8W_2 + 6W_1) &= \frac{q}{D} \\ W_2^{IV} + \frac{8}{a^2} (-2W_2'' + W_1'') + \frac{16}{a^4} (8W_2 - 4W_1) &= \frac{q}{D} \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

методом Эйлера и приближенным способом.

Концевые условия для функций W_2 и W_1 :

$$W_2|_{y=a} = W_1|_{y=a} = 0, \quad W_2'|_{y=a} = W_1'|_{y=a} = 0.$$

Интегрирование системы (4.6) методом Эйлера дает:

$$W_2 = B_1 \operatorname{ch} \alpha y \cos \beta y + B_4 \operatorname{sh} \alpha y \sin \beta y + B_5 \operatorname{ch} \alpha_1 y \cos \beta_1 y + B_8 \operatorname{sh} \alpha_1 y \sin \beta_1 y +$$

$$+ \bar{W}_2 = B_1 \psi_1 + B_4 \psi_2 + B_5 \psi_3 + B_8 \psi_4 + \frac{qa^4}{16D},$$

$$W_1 = B_1 (\gamma \psi_1 + \rho \psi_2) + B_4 (\gamma \psi_2 - \rho \psi_1) + B_5 (-\gamma \psi_3 + \rho_1 \psi_4) +$$

$$+ B_8 (-\gamma \psi_4 - \rho_1 \psi_3) + \frac{5\gamma a^4}{128D},$$

где

$$\alpha = 0,9365 \frac{1}{d}, \quad \alpha_1 = 1,85736 \frac{1}{d}, \quad \gamma = 0,5905, \quad \gamma_1 = 0,5903,$$

$$\beta = 0,51049 \frac{1}{d}, \quad \beta_1 = 0,25739 \frac{1}{d}, \quad \rho = 0,07001, \quad \rho_1 = 0,06905,$$

$$B_1 = -0,61811, \quad B_4 = 0,05691, \quad B_5 = -0,00432, \quad B_8 = -0,000105.$$

Значения функций W_1 и W_2 при $y=0$ получились такими:

$$W_1|_{y=0} = 0,0236 \frac{qa^4}{D}, \quad W_2|_{y=0} = 0,0162 \frac{qa^4}{D}.$$

Решая систему (4.6) приближенным способом, найдем:

$$W_1|_{y=0} = 0,0237 \frac{qa^4}{D}, \quad W_2|_{y=0} = 0,0163 \frac{qa^4}{D}.$$

Результаты расчета взятого примера представлены графиками на рис. 4, 5, 6 и 7.

При $n = 2, 3$ и 4 системы дифференциальных уравнений дискретного метода решались приближенным способом. При $n = 1$ дифференциальные уравнения интегрировались методом Эйлера. Для сравнения на рис. 4, 5, 6 и 7 приведены результаты расчета того же примера, полученные методом Бубнова-Галеркина при удерживании в ряде, аппроксимирующем функцию W , двух членов (второе приближение).

На рис. 4 показано повышение точности с увеличением степени полинома, интерполирующего функцию W . Об этом же говорит и сравнение графиков на рис. 5 и 6.

Рис. 5 и 6 иллюстрируют зависимость точности расчета от определения внеконтурной функции W_{n+2} по формулам (2.3) и (2.5) (при фиксированной степени k полинома, интерполирующего W). На рис. 5 и 6 сокращенно мы писали: ΓU по (2.3), если внеконтурная функция W_{n+2} определялась по формуле (2.3); соответственно — ΓU по (2.5). То же — для рис. 4 и 7.

Графики рис. 7 показывают нарастание точности (при фиксированной степени k интерполирующего полинома) в зависимости от числа введенных прямых.

Рассмотрим задачу об изгибе пластины размерами $2a \times 2a$, нагруженной нагрузкой $q = \text{const}$, у которой две противоположные грани жестко защемлены, а две остальные — свободны (рис. 8).

Из-за симметрии относительно оси y

$$W_{-2} = W_8, \quad W_{-1} = W_7 \text{ и т. д.}$$

Пример 1. Возьмем $W = \sum_{k=0}^2 a_k x^k$, $n = 5$. Тогда $3d = a$. Согласно принятым данным система (1.8) после подстановки в нее внеконтурных

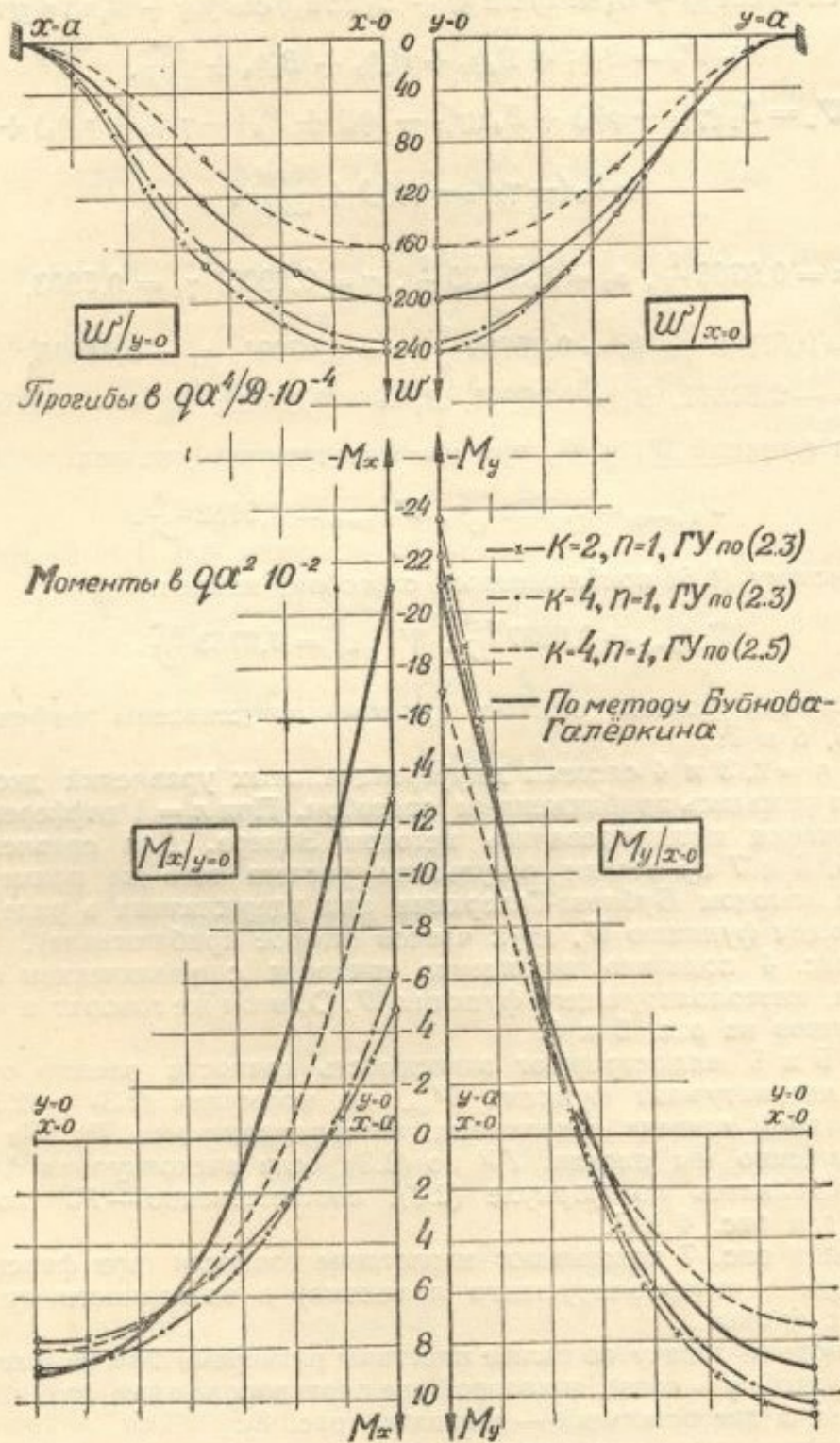


Рис. 4.

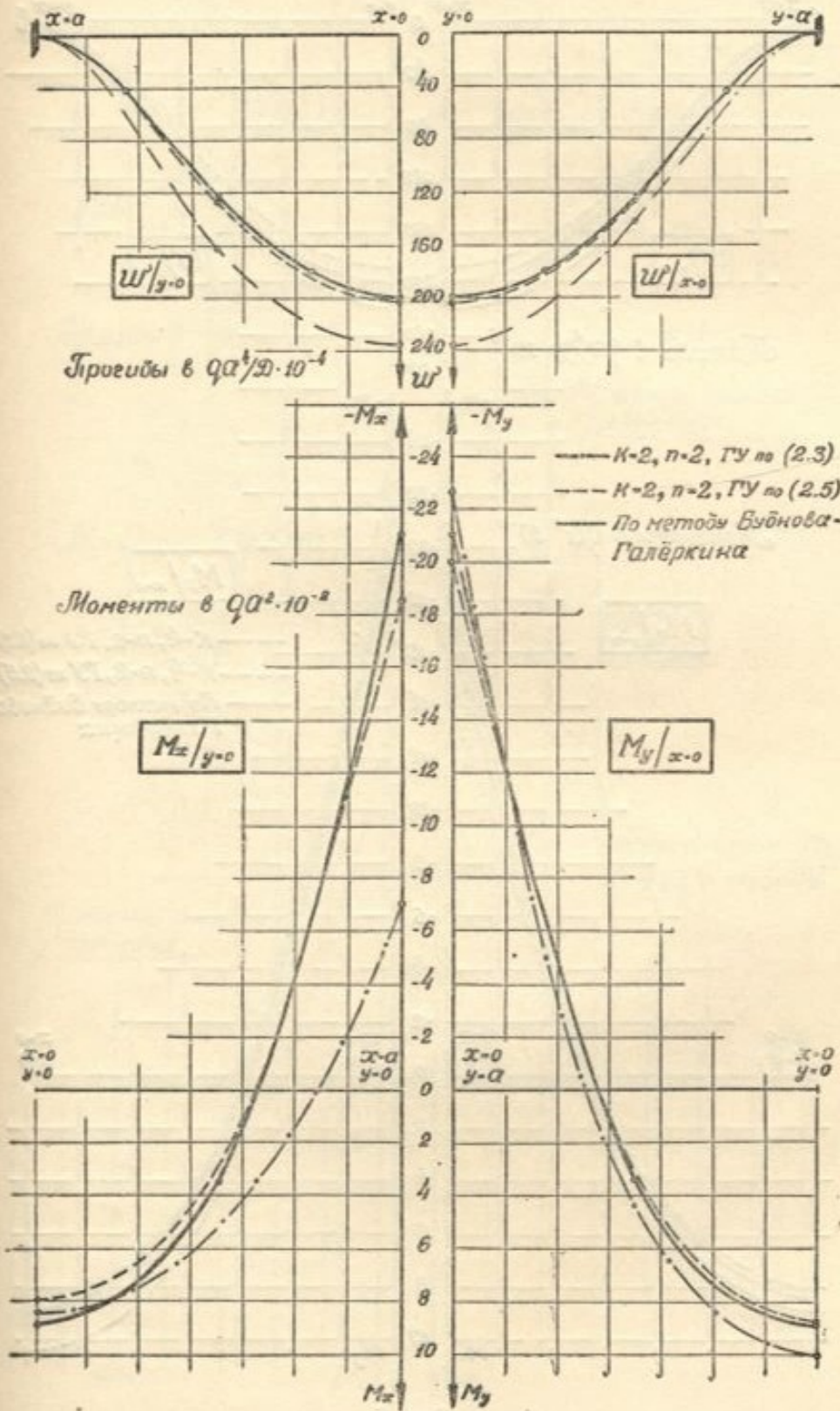


Рис. 5.

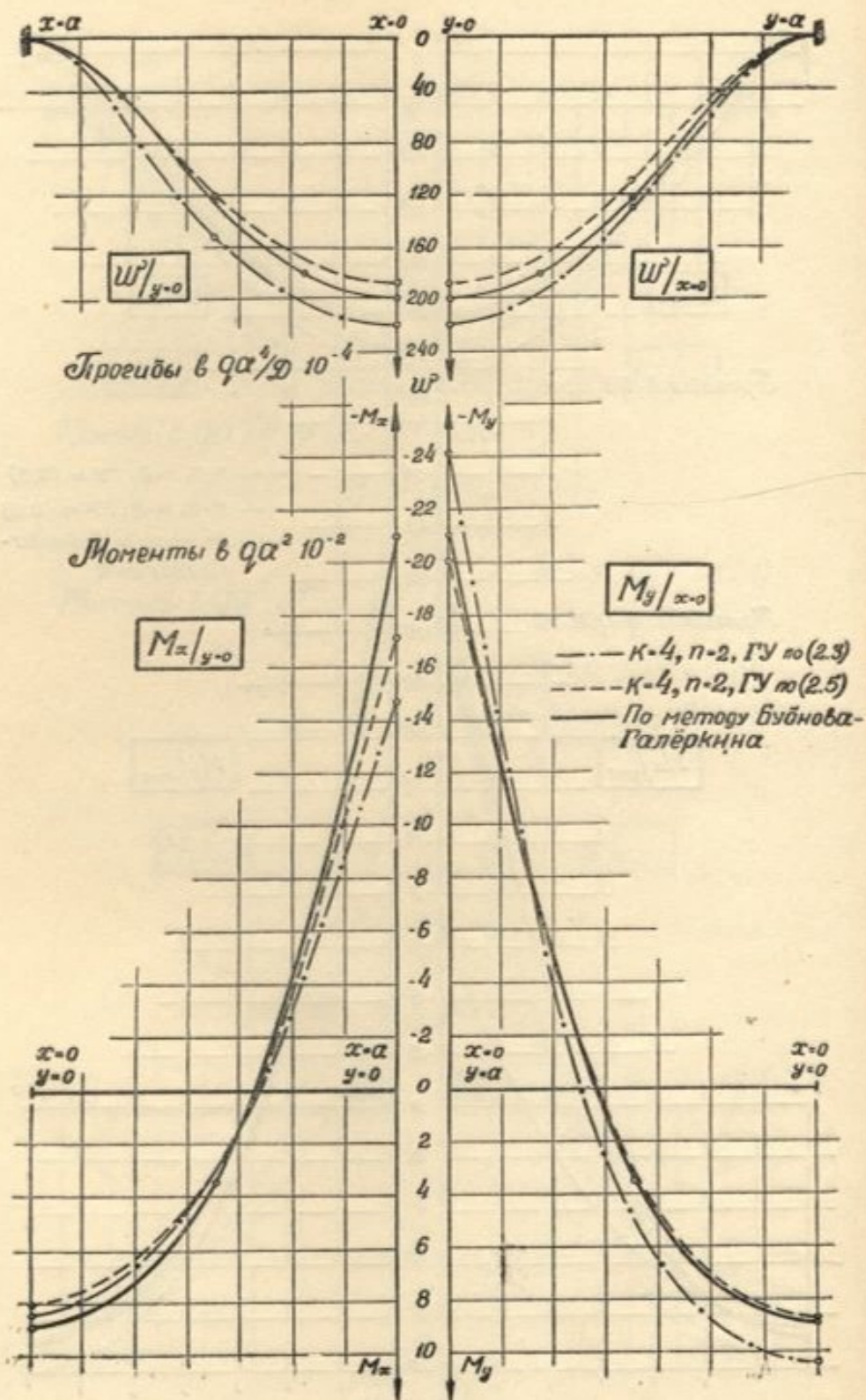


Рис. 6.

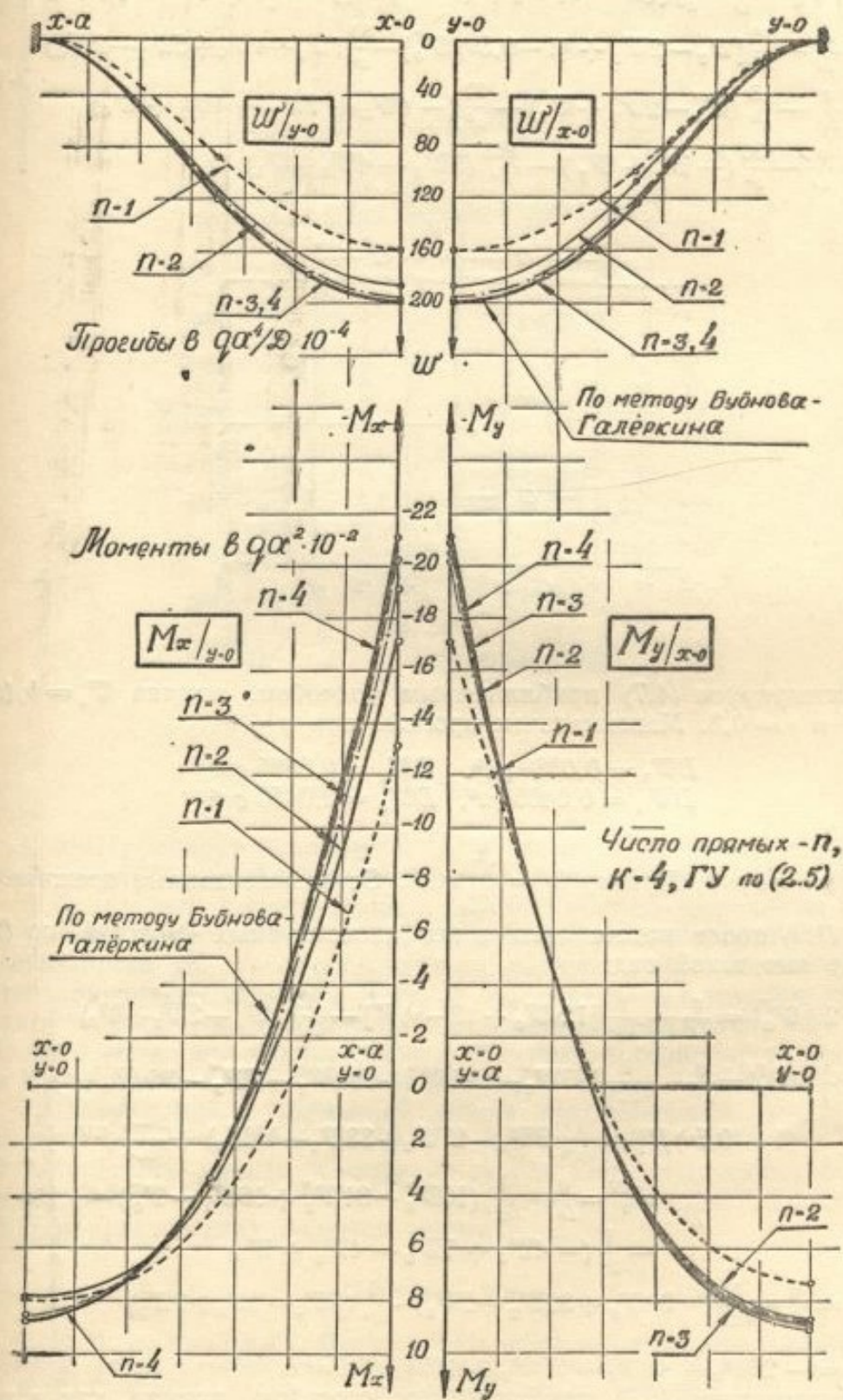


Рис. 7.

функций по (2.12) приобретает вид

$$\left. \begin{aligned} (1-\nu^2)W_0^{IV} &= \frac{q}{D} - \frac{18}{a^2} [(2\nu-2)W_0'' + (2-\nu)W_1''] - \frac{162}{a^4} (W_2 - 2W_1 + W_0) \\ W_1^{IV} &= \frac{q}{D} - \frac{18}{a^2} [W_2'' - 2W_1'' + (1-0,5\nu)W_0''] - \frac{81}{a^4} (W_3 - 4W_2 + 5W_1 - 2W_0) \\ W_2^{IV} &= \frac{q}{D} - \frac{18}{a^2} (W_3'' - 2W_2'' + W_1'') - \frac{81}{a^4} (-4W_3 + 7W_2 - 4W_1 + W_0) \\ W_3^{IV} &= \frac{q}{D} - \frac{36}{a^2} (-W_3'' + W_2'') - \frac{162}{a^4} (3W_3 - 4W_2 + W_1) \end{aligned} \right\} (4.7)$$

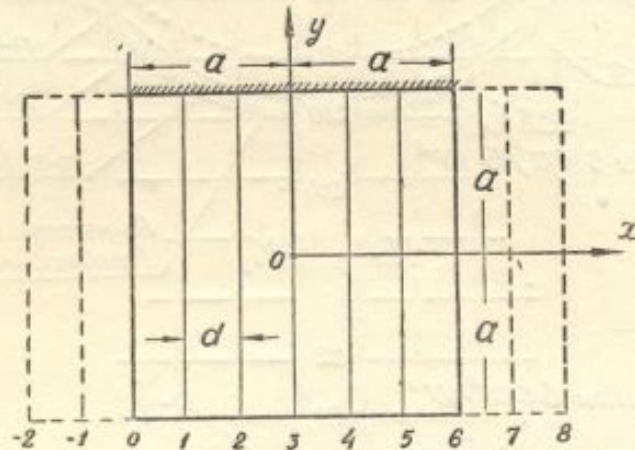


Рис. 8.

Интегрируем (4.7) приближенным способом, приняв $W_i = b_i(a^2 - y^2)^2$ и $\nu = 0,3$. Максимальные прогибы при $y = 0$

$$\left. \begin{aligned} DW_3 &= 0,0380 qa^4, & DW_2 &= 0,0385 qa^4 \\ DW_1 &= 0,0405 qa^4, & DW_0 &= 0,0450 qa^4 \end{aligned} \right\} (4.8)$$

Пример 2. Пример $W = \sum_{k=0}^4 a_k x^k$. Остальные данные прежние. Система (1.9) после подстановки в нее внеконтурных функций по (2.15) приобретает такой вид:

$$\left. \begin{aligned} (1-2\nu)W_0^{IV} &= \frac{q}{D} - \frac{1}{7d^2} [12\nu W_0'' + (2-\nu)f''] - \frac{12}{7d^4} (W_0 - 2W_1 + W_2) \\ \left(1 + \frac{\nu}{7}\right)W_1^{IV} &= \frac{q}{D} - \frac{1}{42d^2} [97W_0'' - 201W_1'' + 111W_2'' - 7W_3'' - 36\nu W_0'' + \\ & (1-0,5\nu)f''] - \frac{1}{7d^4} (7W_3 - 27W_2 + 33W_1 - 13W_0) + \frac{2-\nu}{504} f^{IV} \\ W_2^{IV} &= \frac{q}{D} - \frac{1}{6d^2} (16W_3'' - 31W_2'' + 16W_1'' - W_0'') - \\ & - \frac{1}{d^4} (-4W_3 + 7W_2 - 4W_1 + W_0) \\ W_3^{IV} &= \frac{q}{D} - \frac{1}{6d^2} (-30W_3'' + 32W_2'' - 2W_1'') - \frac{1}{d^4} (6W_3 - 8W_2 + 2W_1) \end{aligned} \right\} (4.9)$$

где $f = -25W_0 + 48W_1 - 39W_2 + 16W_3$, $3d = a$.

Интегрируем (4.9) приближенным способом, приняв, как и выше, $W_i = b_i(a^2 - y^2)^2$ и $\nu = 0,3$.

Максимальные прогибы при $y = 0$

$$\left. \begin{aligned} DW_3 &= 0,0423 qa^4, & DW_2 &= 0,0433 qa^4 \\ DW_1 &= 0,0467 qa^4, & DW_0 &= 0,0540 qa^4 \end{aligned} \right\} (4.10)$$

Сравнение (4.8) и (4.10) показывает их небольшое расхождение, что свидетельствует о правильности результатов. На рис. 9 приведены графики максимальных прогибов при $y=0$, которые построены по (4.8), (4.10) и по данным расчета рассматриваемого примера методом сеток [3] с решеткой типа $\frac{a}{2}$.

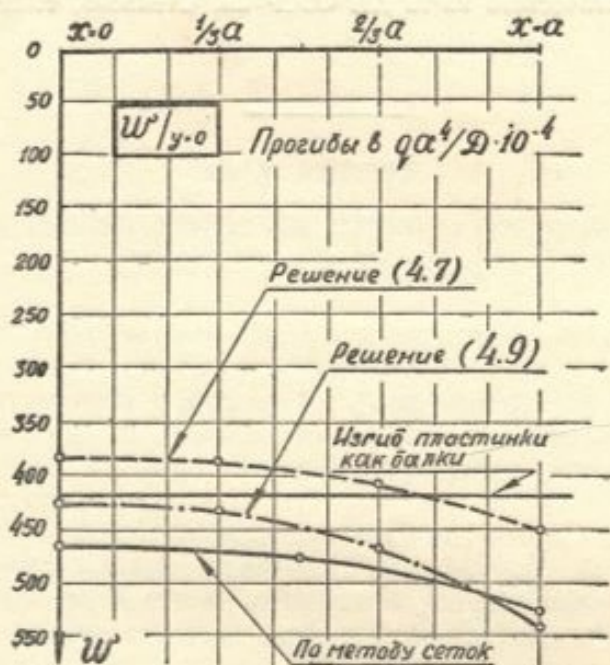


Рис. 9.

ВЫВОДЫ

1. Интерполируя функцию $W(x, y)$ полиномом четвертой степени, можно получить удовлетворительные результаты с введением 5—7 прямых.
2. Результаты расчета показывают, что точность выражения граничных условий существенно влияет на значения элементов изгиба пластины. В особенности это относится к прямым, расположенным вблизи контура. Интерполирование функции $W(x, y)$ полиномом 4-й степени дает возможность более точно определять внеконтурные функции, чего нельзя сказать о полиноме второй степени. Поэтому интерполированию функции $W(x, y)$ полиномом 4-й степени следует отдать предпочтение.
3. Изложенный в настоящей работе приближенный способ позволяет получить несложное решение системы дифференциальных уравнений дискретного метода. Сравнение результатов, полученных по этому способу, с результатами более точного метода показывает его достаточную для практических расчетов точность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. П. Винокуров. Приближенный метод решения плоской задачи теории упругости. Труды Харьковского инженерно-строительного ин-та, в. 2, 1949.
2. Л. П. Винокуров. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений строительной механики. Труды Харьковского инженерно-строительного ин-та, в. 3, 1951.
3. П. М. Варвак. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок, ч. 2. Изд. АН УССР, 1952.
4. Л. В. Канторович и В. И. Крылов. Методы приближенного решения уравнений в частных производных, М. — Л., ОНТИ, 1936.

5. В. В. Новожилов. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений в обыкновенных производных. Прикладная математика и механика, т. 16, в. 3, 1952.

6. М. Г. Слободянский. Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругости. Прикладная математика и механика, т. 3, в. 1, 1939.

7. В. Н. Фадеева. Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. Труды математического ин-та АН СССР им. Стеклова, т. 28, 1949.