Выпуск 18 1961

Ю. П. ПЕТРОВ

РАСЧЕТ НА ИЗГИБ ПЛАСТИН С ЛИНЕЙНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ ТОЛЩИНЫ ДИСКРЕТНЫМ МЕТОДОМ

Интегрирование дифференциального уравнения упругой пластины переменной жесткости является сложной математической задачей. Строгое ее решение при произвольных граничных условиях и внешних нагрузках пока не представляется возможным. С другой стороны, пластины переменной толщины находят применение в инженерных сооружениях. В связи с этим необходимы численные методы решения такой задачи. К последним относятся: метод сеток и дискретный метод. Поставленная задача решается дискретным методом.

§ 1. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИСКРЕТНОГО МЕТОДА

Рассмотрим прямоугольную пластину размерами $2a \times b$, нагруженную нагрузкой $q(x, y)$, с произвольными граничными условиями (рис. 1).

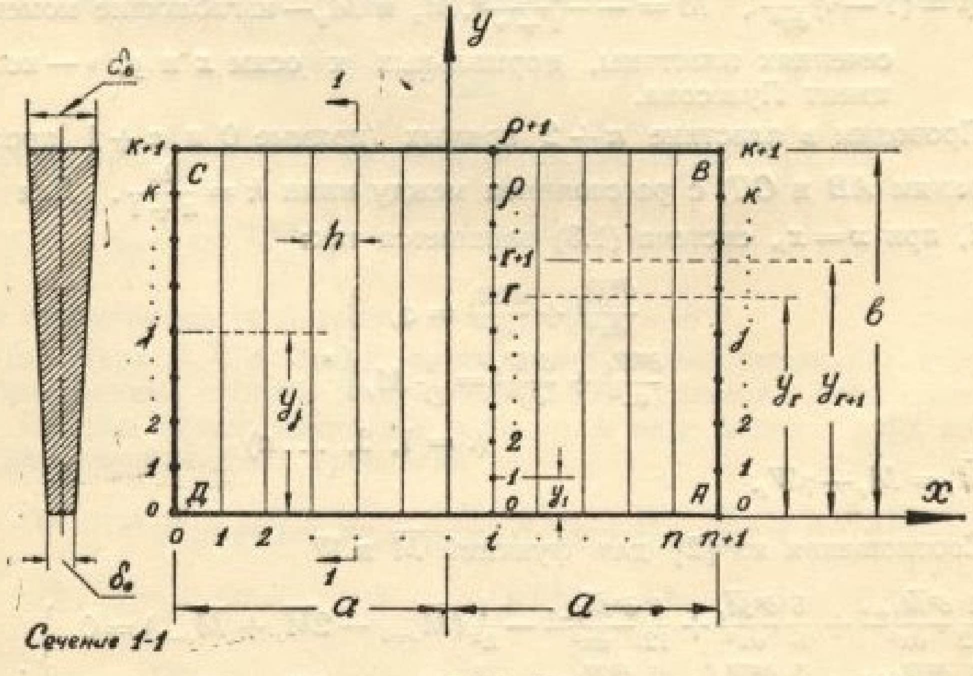

Рис. 1.

Дифференциальное уравнение изгиба пластины с толщиной, изменяющейся в направлении осей x и y:

$$\Delta (D \Delta W) - (1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = q(x, y). \quad (1.1)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Принимаем, что толщина пластины симметрична относительно ее срединной плоскости и изменяется линейно в направлении оси y. Тогда дифференциальное уравнение (1.1) приобретает такой вид:

$$\Delta (D\Delta W) - (1-\nu)\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = q. \tag{1.2}$$

При этом, как известно, с достаточной точностью можно считать, что

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right),\quad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right),$$

$$M_{xy} = D(1-\nu)\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}.$$

В соответствии с этим

$$Q_x = -\left[D\frac{\partial}{\partial x}\Delta W + (1-\nu)\frac{\partial D}{\partial y}\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right],$$

$$Q_y = -\left[D\frac{\partial}{\partial y}\Delta W + \frac{dD}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\right].$$

Представим (1.2) системой из двух дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \Delta M &= q + \mu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ \Delta W &= \frac{1}{D} M \end{aligned}\right\}, \tag{1.3}$$

где $\mu = (1-\nu)\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}$, $M = -\frac{M_x + M_y}{1+\nu}$, M_x и M_y — изгибающие моменты в сечениях пластины, нормальных к осям x и y, ν — коэффициент Пуассона.

Проводим в пластине $n+2$ прямых (прямые 0 и $n+1$ проходят по граням AB и $CД$) с расстоянием между ними $h = \frac{2a}{n+1}$. Для прямой i, при $x = x_i$, система (1.3) запишется так:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \overline{M}_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_i}{\partial y^2} &= q_i \\ \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} &= \frac{1}{D} M_i \end{aligned}\right\}, \tag{1.4}$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots n)$$

где $\overline{M}_i = M_i - \mu W_i$.

Соотношения из [2] для функций $\overline{M}$ и W

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{12}\frac{\partial^2 \overline{M}_{i+1}}{\partial x^2} + \frac{5}{6}\frac{\partial^2 \overline{M}_i}{\partial x^2} + \frac{1}{12}\frac{\partial^2 \overline{M}_{i-1}}{\partial x^2} - \frac{1}{h^2}(\overline{M}_{i+1} - 2\overline{M}_i + \overline{M}_{i-1}) &= 0 \\ \frac{1}{12}\frac{\partial^2 W_{i+1}}{\partial x^2} + \frac{5}{6}\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} + \frac{1}{12}\frac{\partial^2 W_{i-1}}{\partial x^2} - \frac{1}{h^2}(M_{i+1} - 2W_i + W_{i-1}) &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{1.5}$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots\ n)$$

Подставляем в (1.5) производные $\frac{\partial^2 \overline{M}_i}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ $(i = 1,2, \ldots n)$ из системы (1.4). Затем переносим «контурные» функции W_0, W_{n+1}, M_0 и M_{n+1} в правые части полученных систем дифференциальных уравнений. Результат кратко запишем в матричном виде:

$$\left.\begin{aligned} AM'' + \frac{1}{h^2} Д(M - \mu W) &= Aq + \frac{1}{12}\left(Q - \psi'' - \frac{12}{h^2}\psi + \mu\frac{12}{h^2}\varphi\right) \\ AW'' + \frac{1}{h^2} ДW &= \frac{1}{D} AM + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{D}\psi - \varphi'' - \frac{12}{h^2}\varphi\right) \end{aligned}\right\}, \qquad (1.6)$$

где $M = (M_1, M_2, \dots M_n)$, $W = (W_1, W_2, \dots W_n)$, $q = (q_1, q_2, \dots q_n)$,

$Q_0 = (q_0, 0, \dots 0)$, $Q_{n+1} = (0, \dots 0, q_{n+1})$, $Q = Q_0 + Q_{n+1}$,

$\psi_0 = (M_0, 0, \dots 0)$, $\psi_{n+1} = (0, \dots 0, M_{n+1})$, $\psi = \psi_0 + \psi_{n+1}$,

$\varphi_0 = (W_0, 0, \dots 0)$, $\varphi_{n+1} = (0, \dots 0, W_{n+1})$, $\varphi = \varphi_0 + \varphi_{n+1}$,

$\psi''_0 = (M''_0, 0, \dots 0)$, $\psi''_{n+1} = (0, \dots 0, M''_{n+1})$, $\psi'' = \psi''_0 + \psi''_{n+1}$,

и т. д. — столбцевые матрицы;

$$A = \begin{vmatrix} {}^5/_6 & {}^1/_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ {}^1/_{12} & {}^5/_6 & {}^1/_{12} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & {}^1/_{12} & {}^5/_6 \end{vmatrix} \qquad Д = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix},$$

$A = E + \frac{1}{12}Д$, E — единичная матрица.

Ортонормированным преобразованием с матрицей B приводим одновременно матрицы A и $Д$ к диагональному виду. Тогда

$$\left.\begin{aligned} Д &= B\lambda B^{-1} \\ A &= B\left(E + \frac{1}{12}\lambda\right)B^{-1} \end{aligned}\right\}, \qquad (1.7)$$

где λ — диагональная матрица с элементами

$$\lambda_s = -2\left(1 + \cos\frac{\pi s}{n+1}\right) (s = 1, 2, \dots n).$$

Элементы преобразующей матрицы вычисляются по формуле

$$b_{ks} = (-1)^{k+s}\sqrt{\frac{2}{n+1}}\sin\frac{\pi ks}{n+1} (k, s = 1, 2, \dots n).$$

Из-за симметричности матрицы $Д$ матрица $B = B^{-1}$.

Подставив (1.7) в (1.6) и опуская несложные выкладки, получаем преобразованные системы дифференциальных уравнений дискретного метода, которые можем компактно записать в виде системы двух матричных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} V'' - \alpha^2(V - \mu U) &= Bq + \frac{1}{12+\lambda}B\left(Q - \psi'' - \frac{12}{h^2}\psi + \mu\frac{12}{h^2}\varphi\right) \\ U'' - \alpha^2 U &= \frac{1}{D}V + \frac{1}{12+\lambda}B\left(\frac{1}{D}\psi - \varphi'' - \frac{12}{h^2}\varphi\right) \end{aligned}\right\}, \qquad (1.8)$$

где $\alpha^2 = -\frac{12\lambda}{h^2(12+\lambda)}$ — диагональная матрица, $V = BM$ и

$U = BW$ — столбцевые матрицы.

Заменив в (1.4) производные $\frac{\partial^2 \overline{M}_i}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}$ $(i = 1, 2, \dots n)$ их конечно-разностными выражениями, которые получаются при «скользящей» интерполяции функций $\overline{M}$ и W степенным полиномом второй степени [1], придем к более простой системе двух матричных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} V'' - \alpha^2 (V - \mu U) &= Bq - \frac{1}{h^2} B(\psi - \mu\varphi) \\ U'' - \alpha^2 U &= \frac{1}{D} V - \frac{1}{h^2} B\varphi \end{aligned}\right\}, \tag{1.9}$$

где $\alpha^2 = -\frac{\lambda}{h^2}$.

В случае симметрии граничных условий относительно оси y, используя принцип наложения решений, можем вместо одной задачи решать две более простые: симметричную и обратно-симметричную.

А. Симметричная задача (рис. 2)

Внешняя нагрузка — $q^{(c)}$. Из-за симметрии относительно оси y

$$W_0 = W_2, \quad M_0 = M_2 \text{ и } q_0^{(c)} = q_2^{(c)}.$$

Для рассматриваемой задачи имеем такую систему:

$$\left.\begin{aligned} V'' - \alpha_{(c)}^2 (V - \mu U) &= B_{(c)}^{-1} q^{(c)} + \\ + \frac{1}{12 + \lambda_{(c)}} \cdot B_{(c)}^{-1} &\left(Q_{n+1}^{(c)} - \psi''_{n+1} - \frac{12}{h^2}\psi_{n+1} + \mu\frac{12}{h^2}\varphi_{n+1}\right) \\ U'' - \alpha_{(c)}^2 U = \frac{1}{D} V + \frac{1}{12 + \lambda_{(c)}} B_{(c)}^{-1} &\left(\frac{1}{D}\psi_{n+1} - \varphi''_{n+1} - \frac{12}{h^2}\varphi_{n+1}\right) \end{aligned}\right\}, \tag{1.10}$$

где $\alpha_{(c)}^2 = -\frac{12\lambda_{(c)}}{h^2(12 + \lambda_{(c)})}$ — диагональная матрица с элементами

$$(\lambda_s)_{(c)} = -2\left[1 + \cos\frac{\pi(2s-1)}{2n}\right] (s = 1, 2, \ldots n),$$

$V = B_{(c)}^{-1} M$, $U = B_{(c)}^{-1} W$ — столбцевые матрицы. Элементы обратной матрицы $B_{(c)}^{-1}$ находятся решением n алгебраических систем

$$B_{(c)}^{-1} B_{(c)} = E.$$

При этом элементы преобразующей матрицы $B_{(c)}$ вычисляется по формуле

$$b_{ks}^{(c)} = (-1)^{k-1}\sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin(n + 1 - k)\frac{\pi(2s-1)}{2n}$$
$$(k, s = 1, 2, \ldots n).$$

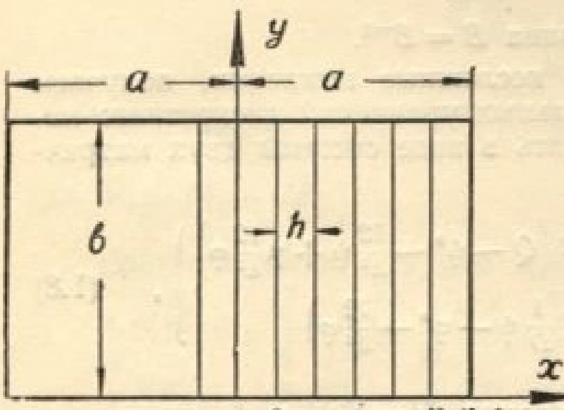

Рис. 2.

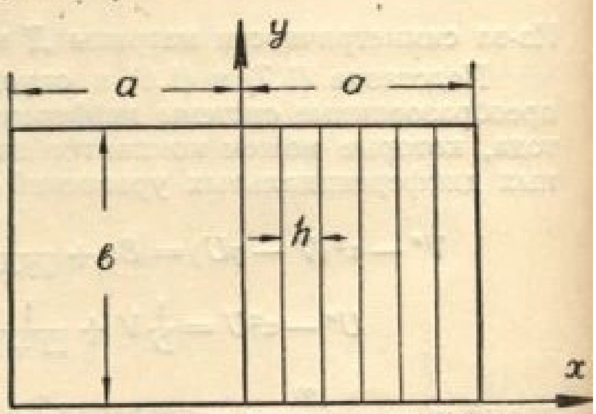

Рис. 3.

В. Обратносимметричная задача (рис. 3)

Внешняя нагрузка — $q^{(oc)}$. В силу обратной симметрии

$$W_0 = M_0 = q_0^{(oc)} = 0, \text{ т. е. } \varphi_0 = \varphi''_0 = \psi_0 = \psi''_0 = Q_0^{(oc)} = 0.$$

Система матричных дифференциальных уравнений имеет такой вид:

$$\left.\begin{aligned} V'' - \alpha^2(V - \mu U) &= Bq^{(oc)} + \frac{1}{12+\lambda} B\Big(Q_{n+1}^{(oc)} - \psi_{n+1}'' - \\ &\quad - \frac{12}{h^2}\psi_{n+1} + \mu\frac{12}{h^2}\varphi_{n+1}\Big) \\ U'' - \alpha^2 U &= \frac{1}{D} V + \frac{1}{12+\lambda} B\left(\frac{1}{D}\psi_{n+1} - \varphi_{n+1}'' - \frac{12}{h^2}\varphi_{n+1}\right) \end{aligned}\right\}, \qquad (1.11)$$

потому что при одинаковом числе прямых $Д_{(oc)} = Д$, $A_{(oc)} = A$, а значит, и $\lambda_{(oc)} = \lambda$, $B_{(oc)} = B_{(oc)}^{-1} = B = B^{-1}$.

§ 2. «КОНТУРНЫЕ» ФУНКЦИИ

Элементами столбцевых матриц φ_0, φ_{n+1}, ψ_0 и ψ_{n+1} являются «контурные» функции W_0, W_{n+1}, M_0 и M_{n+1}, которые определяются условиями закрепления граней AB и $СД$. Поэтому рассмотрим, например, некоторые граничные условия на грани $СД$.

Грань $СД$ свободно оперта

«Контурные» функции W_0 и M_0 равны нулю. Следовательно,

$$\varphi_0 = \varphi_0'' = \psi_0 = \psi_0'' = 0.$$

Грань $СД$ жестко защемлена

Имеем: $W_0 = 0$, но $M_0 \neq 0$, так как $\left.\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right|_{x=-a} \neq 0$. Значит, $\varphi_0 = \varphi_0'' = 0$, а $\psi_0 \neq \psi_0'' \neq 0$.

Чтобы проинтегрировать систему дифференциальных уравнений, соответствующую рассматриваемому случаю граничных условий на грани $СД$, представим «контурную» функцию M_0 степенным полиномом

$$M_0 = \sum_{k=0}^{m-2} d_k^{(0)} y^k \qquad (2.1)$$

с неизвестными коэффициентами $d_k^{(0)}$, подлежащими определению в дальнейшем.

Грань $СД$ свободна

В этом случае $W_0 \neq 0$ и $M_0 \neq 0$, т. е.

$$\varphi_0 \neq \varphi_0'' \neq \psi_0 \neq \psi_0'' \neq 0.$$

На грани $СД$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0. \qquad (2.2)$$

Из второго дифференциального уравнения системы (1.3)

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{1}{D} M - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}. \qquad (2.3)$$

Подставив (2.3) в (2.2), найдем

$$M_0 = D(1-\nu)\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2}. \qquad (2.4)$$

Таким образом, в данном случае, как и в предыдущем, необходимо «интерполировать» только одну «контурную» функцию, а именно: W_0. Пусть

$$W_0 = \sum_{k=0}^{m} c_k^{(0)} y^k, \qquad (2.5)$$

где $c_k^{(0)}$ — неизвестные коэффициенты.

Тогда, согласно (2.4),

$$M_0 = D(1-\nu)\sum_{k=0}^{m} k(k-1)\, c_k^{(0)} y^{k-2}.$$

Изменив в вышеприведенных выражениях индекс 0 на $n+1$, получим соответствующие рассмотренным граничным условиям «контурные» функции на грани AB.

§ 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Системы дифференциальных уравнений § 1 являются системами с переменными коэффициентами. Поэтому возможно только приближенное их интегрирование. Возьмем, например, систему (1.8) и будем искать ее решение приближенным способом линейной апроксимации функций U_i и V_i $(i=1, 2, \ldots n)$, находящихся в правой части. Прежде всего в системе (1.8) заменим «контурные» функции «интерполирующими» их степенными полиномами вида (2.1) и (2.5). В результате группирования получившихся в правых частях многочленов система (1.8) приобретает вид

$$\left.\begin{aligned} V_i'' - \alpha_i^2 V_i = -\alpha_i^2 \mu U_i + \sum_{s=1}^{n} b_{is} q_s(y) + \\ + \frac{1}{12+\lambda_i}\left[b_{i1} q_0(y) + b_{in} q_{n+1}(y)\right] + \sum_{k=0}^{m} \xi_k^{(i)} y^k \\ U_i'' - \alpha_i^2 U_i = \frac{1}{D} V_i + \sum_{k=0}^{m} \eta_k^{(i)} y^k \quad (i=1, 2, \ldots n) \end{aligned}\right\}, \tag{3,1}$$

где коэффициенты $\xi_k^{(i)}$ и $\eta_k^{(i)}$ представляют собой линейные комбинации коэффициентов «интерполирующих» полиномов. Ради простоты полагаем $q=\text{const}$. Тогда

$$Aq + \frac{1}{12} Q = q,$$

а в системе (3.1) вместо

$$\sum_{s=1}^{n} b_{is} q_s(y) + \frac{1}{12+\lambda_i}\left[b_{i1} q_0(y) + b_{in} q_{n+1}(y)\right]$$

будет

$$q\,\frac{12}{12+\lambda_i}\sum_{s=1}^{n} b_{is} = q\beta_i \,(i=1, 2, \ldots n).$$

Разобъем интервал интегрирования $(0, b)$ на $\rho+1$ участков равной длины ρ точками (рис. 1). На участке между точками r и $r+1$ функции U_i и V_i $(i=1, 2, \ldots n)$, находящиеся в правых частях дифференциальных уравнений системы (3. 1), считаем изменяющимися линейно, т. е.

$$\left.\begin{aligned} U_i^{(r,\, r+1)} = \frac{\bar{y}_r}{\Delta y}\left[U_i^{(r+1)} - U_i^{(r)}\right] + U_i^{(r)} \\ V_i^{(r,\, r+1)} = \frac{\bar{y}_r}{\Delta y}\left[V_i^{(r+1)} - V_i^{(r)}\right] + V_i^{(r)} \end{aligned}\right\}, \tag{3.2}$$

$$(i=1, 2, \ldots n)$$

где $U_i^{(r)} = U_i|_{y=y_r}$, $V_i^{(r)} = V_i|_{y=y_r}$ и т. д.;

$\bar{y}_r = y - y_r$ переменная на участке $(r, r+1)$,

$\Delta y = y_{r+1} - y_r = \text{const}.$

Интегрируем систему (3.1), с учетом выражений (3.2), по методу начальных параметров с переносом начала координат от точки $r-1$ к точке r. Это позволяет рассчитывать дискретным методом пластины, нагруженные не только распределенной нагрузкой, но и сосредоточенной, приложенной в точке, через которую проходит одна из прямых.

На участке (0—1) $\bar{y}_0 = y - y_0 = y$, так как $y_0 = 0$. Поэтому

$$V_i^{(0-1)} = A_1^{(i)} \operatorname{ch} \alpha_i y + A_2^{(i)} \frac{1}{\alpha_i} \operatorname{sh} \alpha_i y - \alpha_i \mu \int_0^y U_i^{(0,1)}(t) \operatorname{sh} \alpha_i (y-t)\, dt +$$
$$+ \frac{1}{\alpha_i} \sum_{k=0}^{m} \xi_k^{(i)} \varphi_k^{(i)}(y) + q\beta_i \frac{1}{\alpha_i} \varphi_0^{(i)}(y),$$
$$U_i^{(0-1)} = B_1^{(i)} \operatorname{ch} \alpha_i y + B_2^{(i)} \frac{1}{\alpha_i} \operatorname{sh} \alpha_i y + \frac{1}{\alpha_i} \int_0^y \left(\sum_{k=0}^{k} \theta_k t^k \right) V_i^{(0,1)}(t) \operatorname{sh} \alpha_i (y-t)\, dt +$$
$$+ \frac{1}{\alpha_i} \sum_{k=0}^{m} \eta_k^{(i)} \varphi_k^{(i)}(y) \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

где

$$\varphi_0^{(i)}(y) = \int_0^y \operatorname{sh} \alpha_i (y-t)\, dt, \quad \varphi_1^{(i)}(y) = \int_0^y t \operatorname{sh} \alpha_i (y-t)\, dt,$$
$$\varphi_k^{(i)}(y) = \frac{1}{\alpha_i} \left[\frac{k(k-1)\varphi_{k-2}^{(i)}}{\alpha_i} - y^k \right] (k = 2, 3, \ldots m), \quad \sum_{k=0}^{k} \theta_k y^k \cong \frac{1}{D}.$$

При $y = 0$

$$V_i^{(0-1)}\big|_{y=0} = V_i^{(0)} = A_1^{(i)}, \quad U_i^{(0-1)}\big|_{y=0} = U_i^{(0)} = B_1^{(i)}$$
$$(i = 1, 2, \ldots n).$$

Функции $V_i^{(0-1)}$ и $U_i^{(0-1)}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ при $y = y_1$ должны быть равны, соответственно $V_i^{(1)}$ и $U_i^{(1)}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$. Это дает ряд алгебраических систем

$$\left. \begin{aligned} V_i^{(0-1)}\big|_{y=y_1} &= V_i^{(1)} \\ U_i^{(0-1)}\big|_{y=y_1} &= U_i^{(1)} \end{aligned} \right\}, \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

решением которых находим значения $U_i^{(1)}$ и $V_i^{(1)}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$.

Далее вычисляем производные

$$\frac{d}{dy} V_i^{(0-1)}\big|_{y=y_1} \text{ и } \frac{d}{dy} U_i^{(0-1)}\big|_{y=y_1} (i = 1, 2, \ldots n).$$

Переносим начало координат в точку $y = y_1$ и интегрируем систему (3.1) на участке (1—2).

$$V_i^{(1-2)} = \bar{A}_1^{(i)} \operatorname{ch} \alpha_i \bar{y}_1 + \bar{A}_2^{(i)} \frac{1}{\alpha_i} \operatorname{sh} \alpha_i \bar{y}_1 - \alpha_i \mu \int_0^{\bar{y}_1} U_i^{(1,2)}(t) \operatorname{sh} \alpha_i (\bar{y}_1 - t)\, dt +$$
$$+ \frac{1}{\alpha_i} \sum_{k=0}^{m} \bar{\xi}_k^{(i)} \varphi_k^{(i)}(\bar{y}_1) + q\beta_1 \frac{1}{\alpha_i} \varphi_0^{(i)}(\bar{y}_1),$$
$$U_i^{(1-2)} = \bar{B}_1^{(i)} \operatorname{ch} \alpha_i \bar{y}_1 + \bar{B}_2^{(i)} \frac{1}{\alpha_i} \operatorname{sh} \alpha_i \bar{y}_1 + \frac{1}{\alpha_i} \int_0^{\bar{y}_1} \left(\sum_{k=0}^{k} \bar{\theta}_k \bar{t}^k \right) V_i^{(1,2)}(t) \operatorname{sh} \alpha_i (\bar{y}_1 - t)\, dt +$$
$$+ \frac{1}{\alpha_i} \sum_{k=0}^{m} \bar{\eta}_k^{(i)} \varphi_k^{(i)}(\bar{y}_1) \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

где

$$\sum_{k=0}^{k}\overline{\theta}_k\overline{y}_1^k=\sum_{k=0}^{k}\theta_k(\overline{y}_1+y_1)^k,$$

$$\sum_{k=0}^{m}\overline{\xi}_k^{(i)}\overline{y}_1^k=\sum_{k=0}^{m}\xi_k^{(i)}(\overline{y}_1+y_1)^k,\ \sum_{k=0}^{m}\overline{\eta}_k^{(i)}\overline{y}_1^k=\sum_{k=0}^{m}\eta_k^{(i)}(\overline{y}_1+y_1)^k,$$

$$\overline{y}_1=y-y_1,\ y_1=\frac{b}{\rho+1}.$$

Постоянные интегрирования участка (1—2) легко определяются из начальных условий при $\overline{y}_1=0$, а именно:

$$\overline{A}_1^{(i)}=V_i^{(1)},\quad \overline{A}_2^{(i)}=\frac{\partial}{\partial y}V_i^{(0-1)}\big|_{y=y_1},$$

$$\overline{B}_1^{(i)}=U_i^{(1)},\quad \overline{B}_2^{(i)}=\frac{\partial}{\partial y}U_i^{(0-1)}\big|_{y=y_1}.$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots\ n)$$

Из алгебраической системы

$$\left.\begin{array}{l}V_i^{(1-2)}\big|_{y=y_1}=V_i^{(2)}\\ U_i^{(1-2)}\big|_{y=y_1}=U_i^{(2)}\end{array}\right\}\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots\ n)$$

находим значения $V_i^{(2)}$ и $U_i^{(2)}$ $(i=1,\ 2,\ \ldots\ n)$. Снова вычисляем производные

$$\frac{\partial}{\partial y}V_i^{(1-2)}\big|_{y=y_1}\ \text{и}\ \frac{\partial}{\partial y}U_i^{(1-2)}\big|_{y=y_1}\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots\ n).$$

Система (3.1) интегрируется на участке (2—3) и т. д., до последнего участка $\rho+1$. Процесс интегрирования прост. Вычисление значений $V_i^{(r,\,r+1)}$, $U_i^{(r,\,r+1)}$, $\frac{\partial}{\partial y}V_i^{r,\,r+1}$ и $\frac{\partial}{\partial y}U_i^{(r,\,r+1)}$ $(i=1,\ 2,\ldots n)$ в точках $y=y_r$ $(r=1,\ 2,\ \ldots\ \rho)$ осуществляется легко, так как

$$\operatorname{ch}\alpha_i\overline{y}_r\big|_{y=y_{r+1}}=\operatorname{ch}\alpha_i\Delta y=\text{const},$$

$$\operatorname{sh}\alpha_i\overline{y}_r\big|_{y=y_{r+1}}=\operatorname{sh}\alpha_i\Delta y=\text{const},$$

$$\varphi_k^{(i)}(\overline{y}_r)\big|_{y=y_{r+1}}=\varphi_k^{(i)}(\Delta y)=\text{const}\ \ (r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \rho).$$

Решение алгебраических систем

$$\left.\begin{array}{l}V_i^{(r,\,r+1)}\big|_{y=y_{r+1}}=V_i^{(r+1)}\\ U_i^{(r,\,r+1)}\big|_{y=y_{r+1}}=U_i^{(r+1)}\end{array}\right\}\ (i=1,\ 2,\ \ldots\ n;\ r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \rho)$$

также не представляет труда и может быть записано в общем виде.

Систему (3.1) можно также проинтегрировать методом осреднения переменных коэффициентов, который подробно изложен в монографии [3].

§ 4. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассуждения относим к грани *АД* (рис. 1). Положим, что граничные условия на гранях *АВ* и *СД* относительно оси y несимметричны.

Грань *АД* свободна

Имеем:

$$\left.\begin{array}{r}\left(\frac{\partial^2W}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2W}{\partial x^2}\right)_{y=0}=0\\ \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2W}{\partial y^2}+(2-\nu)\frac{\partial^2W}{\partial x^2}\right]_{y=0}=0\end{array}\right\}\qquad(4.1)$$

Подставим (2.3) в (4.1). Это дает

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\frac{\nu}{D(1-\nu)}M\right)_{y=0}=0\\ &\left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}+\frac{2-\nu}{\nu-1}\frac{1}{D}\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{2-\nu}{\nu-1}\frac{1}{D^2}\frac{dD}{dy}M\right)_{y=0}=0\end{aligned}\right\}. \tag{4.2}$$

Запишем (4.2) для каждой прямой i ($i=1,\ 2,\ \ldots\ n$) и перейдем от функций W_i и M_i ($i=1,\ 2,\ \ldots\ n$) к функциям U_i и V_i ($i=1,\ 2,\ \ldots\ n$). Учитывая, что детерминант $\|B\|\neq 0$, вместо системы (4.2), получаем такие граничные условия:

$$\left.\begin{aligned} &\left(U''+\frac{\nu}{D(1-\nu)}V\right)_{y=0}=0\\ &\left[U'''+\frac{2-\nu}{(\nu-1)D}\left(V'-\frac{1}{D}\frac{\partial D}{dy}V\right)\right]_{y=0}=0\end{aligned}\right\}, \tag{4.3}$$

где $U=BW$, $V=BM$ — столбцевые матрицы.

Грань *АД* свободно оперта

$$U/_{y=0}=0,\ V/_{y=0}=0.$$

Грань *АД* жестко защемлена

$$U/_{y=0}=0,\ U'/_{y=0}=0.$$

Из изложенного выше видно, что «контурные» функции на гранях *АВ* и *СД*, а также и граничные условия на гранях *АД* (или *ВС*) не отличаются от таковых для прямоугольных пластин постоянной толщины[1]. Исключение представляет случай свободной грани *АД* (или *ВС*). Поэтому вопросы, общие для рассматриваемых пластин и пластин постоянной жесткости, в дальнейшем нами опущены.

§ 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ «ИНТЕРПОЛИРУЮЩИХ» ПОЛИНОМОВ

Неизвестные коэффициенты степенных полиномов, которыми представлены «контурные» функции, находятся в результате совместного решения основной и дополнительной систем алгебраических уравнений.

Рассмотрим граничные условия на свободной грани *СД*. Поскольку равенство нулю на грани *СД* изгибающих моментов M_x было использовано для определения «контурной» функции M_0, невыполненным на этой грани остается условие равенства нулю обобщенных срезывающих сил

$$-\left[D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+(2-\nu)\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)+2(1-\nu)\frac{dD}{dy}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right]=0. \tag{5.1}$$

Из второго дифференциального уравнения системы (1.3) находим

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=\frac{1}{D}M-\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \tag{5.2}$$

Посредством (5.2) уравнение (5.1) преобразуются к такому виду:

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}+\frac{2-\nu}{D(\nu-1)}\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{2}{D}\frac{dD}{dy}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}=0. \tag{5.3}$$

---

[1] См. статью Ю. П. Петрова в настоящем сборнике «Расчет на изгиб упругих прямоугольных пластин дискретным методом».

Имеем:

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}\right|_{x=-a} &= \frac{1}{2h^3}(-5W_0+18W_1-24W_2+14W_3-3W_4) = \\ &= -\frac{5}{2h^3}W_0+\frac{1}{2h^3}\sum_{k=1}^{4} f_k W_k \\ \left.\frac{\partial M}{\partial x}\right|_{x=-a} &= \frac{1}{12h}(-25M_0+48M_1-36M_2+16M_3-3M_4) = \\ &= -\frac{25}{12h}M_0+\frac{1}{12h}\sum_{k=1}^{4} p_k M_k \\ \left.\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right|_{x=-a} &= -\frac{25}{12h}W_0'+\frac{1}{12h}\sum_{k=1}^{4} p_k W_k' \end{aligned}\right\}. \tag{5.4}$$

Подставив (5.4) в (5.3), переходим от функций W_k и M_k ($k=1,\ 2,\ \ldots\ 4$) к функциям U_i и V_i ($i=1,\ 2,\ \ldots\ n$). В результате вместо (5.3) получим

$$6\sum_{s=1}^{n} U_s \sum_{k=1}^{4} f_k b_{ks} + \frac{2-\nu}{D(\nu-1)} h_2 \sum_{s=1}^{n} V_s \sum_{k=1}^{4} p_k b_{ks} -$$

$$-\frac{2}{D}\frac{dD}{dy}h^2\sum_{s=1}^{n} U_s' \sum_{k=1}^{4} p_k b_{ks} = 30W_0 + \frac{2-\nu}{D(\nu-1)}25h^2M_0 - \frac{2}{D}\frac{dD}{dy}25h^2W_0'. \tag{5.5}$$

Уравнение (5.5) считаем основным граничным условием на свободной грани *СД*. Оно и привлекается для нахождения коэффициентов степенного полинома, которым представлена «контурная» функция W_0. Полагая в (5.5) $y=y_j$ ($j=1,\ 2,\ \ldots\ k$), придем к основной алгебраической системе

$$\Big[6\sum_{s=1}^{n} U_s \sum_{k=1}^{4} f_k b_{ks} + \frac{2-\nu}{D(\nu-1)}h^2\sum_{s=1}^{n} V_s \sum_{k=1}^{4} p_k b_{ks} - \frac{2}{D}\frac{dD}{dy}h^2\sum_{s=1}^{n} U_s' \sum_{k=1}^{4} p_k b_{ks} -$$

$$\left. - 30W_0 - \frac{2-\nu}{D(\nu-1)}25h^2M_0 + \frac{2}{d}\frac{dD}{dy}25h^2W_0'\right]_{y=y_j} = 0 \quad (j=1,\ 2,\ \ldots\ k). \tag{5.6}$$

Для жестко защемленной грани *СД* основное граничное условие не отличается от такового для пластины постоянной толщины.

Опуская некоторые подробности, рассмотрим дополнительные условия в точке *Д* в случае свободных граней *ДА* и *ДС* (рис. 1). В точке *Д* имеем:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0\end{aligned}\right\}.$$

откуда

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0 \ \text{ и } \ \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2}=M_0=0;$$

$$R=2D(1-\nu)\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}=0,$$

или

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}=0;$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}+\frac{2-\nu}{D(\nu-1)}\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{2}{D}\frac{dD}{dy}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}=0 \\ \frac{\partial^3 W}{\partial y^3}+\frac{2-\nu}{D(\nu-1)}\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{2-\nu}{D^2(\nu-1)}\frac{dD}{dy}M=0\end{aligned}\right\}. \tag{a}$$

Но в точке $Д$ также

$$\frac{\partial M}{\partial y} = D(1-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + \frac{dD}{dy}(1-\nu)\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}. \qquad (б)$$

Из сравнения (а) и (б), с учетом того, что

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0,$$

следует:

$$\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} = 0, \quad \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{2-\nu}{D(1-\nu)}\frac{\partial M}{\partial x} = 0.$$

Как видим, дополнительные условия в точке $Д$ в случае свободных граней $ДА$ и $ДС$ для рассматриваемых пластин и пластин постоянной жесткости одинаковы. То же самое можно сказать и в отношении иных дополнительных условий.

Значения функций U_i и V_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ в точках $(r = 1, 2, \ldots \rho)$ получаются в результате интегрирования системы дифференциальных уравнений. При «интерполировании», например, «контурной» функции W_0 степенным полиномом (2.5) целесообразно число участков, на которое разбивается интервал интегрирования системы и степень полинома (2.5) назначать так, чтобы было

$$\rho + d = m + 1,$$

где d — число дополнительных условий в точках C и $Д$.
Тогда в основную алгебраическую систему войдут значения функций U_i и V_i $(i = 1, 2, \ldots n)$, которыми мы уже располагаем.

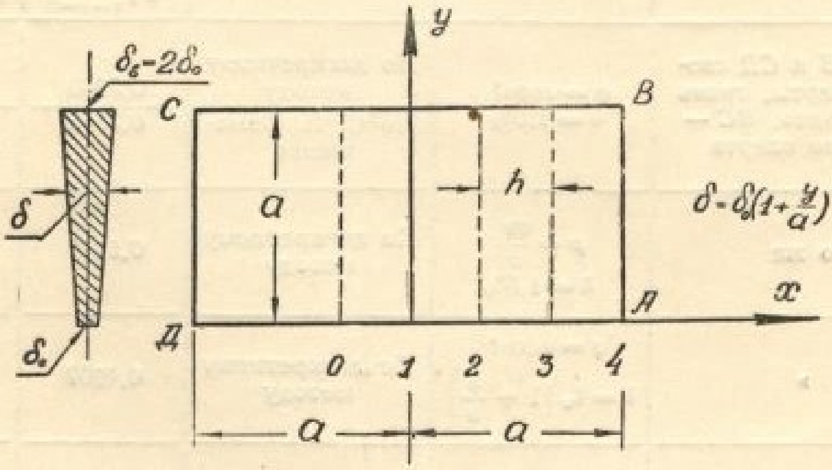

Рис. 4.

В качестве примера была взята пластинка размерами $2a \times a$ (рис. 4), которая рассчитывалась дискретным методом при $n = 3$ (вводилось три прямых). Интегрировалась система (1.10). При расчете пластины переменной толщины число участков линейного апроксимирования функций U_i и V_i $(i = 1, 2, 3)$ бралось равным двум (т. е. $\rho = 1$).

Результаты расчетов представлены в таблицах 1 и 2. Там же для некоторых примеров в целях сравнения приведены соответствующие данные из работы [4] Сопоставление последних с полученными по дискретному методу позволяет сделать заключение о достоверности расчета дискретным методом пластин с $\delta = 1{,}5\delta_0$, нагруженных нагрузкой $p = qy/a$.

$\nu = 0{,}3$ **Таблица 1**

Граничные условия	Нагрузка и толщина	Решение	Прогибы в $qa^4/E\delta_0^3$	Моменты в qa^2	
			$W/_{x=y=0}$	$M_y\big\|_{x=0,\ y=a}$	$M_x\big\|_{x=0,\ y=0}$
Грани *АВ* и *СД* свободно оперты, грань *АД* свободна, *ВС* жестко защемлена	$q = \mathrm{const}$ $\delta = 1{,}5\delta_0$	По дискретному методу	0,1890	—0,3265	0,1227
		По С. П. Тимошенко	0,1880	—0,3190	0,1172
То же	$p = \frac{qy}{a}$ $\delta = 1{,}5\delta_0$	По дискретному методу	0,0557	—0,1170	0,0370
»	$q = \mathrm{const}$ $\delta = \delta_0\left(1+\frac{y}{a}\right)$	По дискретному методу	0,2750	—0,4780	0,0550
»	$p = \frac{qy}{a}$ $\delta = \delta_0\left(1+\frac{y}{a}\right)$	По дискретному методу	0,0640	—0,1452	0,0130

$\nu = 0{,}3$ **Таблица 2**

Граничные условия	Нагрузка и толщина	Решение	Прогибы в $qa^4/E\delta_0^3$	Моменты в qa^2
			$W/_{x=y=0}$	$M_x\big\|_{x=y=0}$
Грани *АВ* и *СД* свободно оперты, грань *АД* свободна, *ВС* — свободно оперта	$q = \mathrm{const}$ $\delta = 1{,}5\delta_0$	По дискретному методу	0,3660	0,2564
		По С. П. Тимошенко	0,3675	0,2400
То же	$p = \frac{qy}{a}$ $\delta = 1{,}5\delta_0$	По дискретному методу	0,1180	0,0815
»	$q = \mathrm{const}$ $\delta = \delta_0\left(1+\frac{y}{a}\right)$	По дискретному методу	0,4907	0,0980
»	$p = \frac{qy}{a}$ $\delta = \delta_0\left(1+\frac{y}{a}\right)$	По дискретному методу	0,1300	0,02590

Прогиб в точке $x = 0$, $y = 0$ для пластины переменной толщины, нагруженной нагрузкой $p = qy/a$, оказался больше на 10.2%, чем прогиб аналогичной пластины, но с толщиной $\delta = 1{,}5\delta_0$ (табл. 2). Это соответствует результату (увеличение на 20%), который получен при решении задачи методом малого параметра [5].

ВЫВОДЫ

В настоящей работе изложена основанная на дискретном методе методика расчета упругих прямоугольных пластин с линейно изменяющейся толщиной при разнообразных граничных условиях (включая и консольные пластины).

Расчеты показывают, что даже небольшое число прямых и участков апроксимирования обеспечивает удовлетворительную точность. С увеличением числа прямых и участков апроксимирования дискретный метод может быть использован при расчетах и исследовании многих практически важных задач о напряженно-деформированном состоянии упругих пластин с толщиной, изменяющейся линейно в одном направлении.

Дискретный метод легко распространяется и на задачу об изгибе упругой пластины с линейным изменением жесткости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. П. Винокуров. Прямые методы решения пространственных и контактных задач для массивов и фундаментов. Изд-во Харьковского Гос. ун-тета, 1956.

2. М. Г. Слободянский. Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругости. Прикладная математика и механика, т. 3, в. 1, 1939.

3. Р. Фрезер, В. Дункан и И. Коллар. Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике. Иноиздат, 1950.

4. С. П. Тимошенко. Пластинки и оболочки, Гостехиздат, 1948.

5. H. Favre, W. Schumann. Bull. techn. Suisse romande. 1955, 81, № 11, 161—173.