Халилов С.А.

ПРОБЛЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСУЩЕЙ КОНСТРУКЦИИ БОЛЬШЕГРУЗНЫХ САМОЛЕТОВ

Рост грузоподъемности самолетов и решение связанных с этим проблем требуют разработки новых конструктивных решений, которые наиболее полно отвечают ряду противоречивых требований. Необходимость анализа этих решений с точки зрения механической устойчивости с учетом значительного увеличения строительных высот и напряженности конструкции, возросшей роли промежуточных звеньев, участвующих в восприятии и передаче нагрузки, усложнения характера взаимодействия несущих элементов и агрегатов, наличия больших локальных нагрузок и ряда других факторов, обусловливает разработку новых подходов к решению этой задачи.

Можно выделить д в а существующих п о д х о д а к решению задач устойчивости, отличающиеся степенью строгости и глубиной охвата проблемы.

П е р в ы й и наиболее распространенный подход заключается в выделении из силовой схемы отдельных элементов без учета их взаимодействия. Типичным примером может служить способ исследования устойчивости продольного набора, при котором реальные условия по границам выделяемых элементов заменяются без должного обоснования классическими условиями свободного опирания, заделки и т.п. Попытка подтвердить достоверность получаемых результатов экспериментом сомнительна, так как при проведении эксперимента пытаются обеспечить те же самые классические условия (примером могут служить торцевые испытания).

При в т о р о м подходе, ориентированном на применение метода конечных элементов (МКЭ) в форме метода перемещений, стремится рассматривать отдельные агрегаты или даже всю конструкцию в целом. Основные недостатки здесь таковы : проблематичность достоверности моделей промежуточных звеньев, большая трудоемкость и неоперативность, что делает подход практически бесполезным на стадии проектирования (он реализуется обычно "вдогонку" - изделие может быть запущено в серию без расчетов), трудно или невозможно выделить элемент-"провокатор", что важно с точки зрения рационального использования материала, невысокая точность получаемых результатов, обусловленная погрешностью в определении исходного состояния по МКЭ, погрешностью изгибных КЭ-моделей и погрешностью численной реализации задачи на собственные значения для матриц (стремление ввести изгибные модели с высоким порядком аппроксимации приводит к матрицам высокого порядка, стремление увеличить густоту сетки требует согласования сеток исходного и возмущенного состояний).

П р е д л а г а е т с я подход, альтернативный отмеченным, сущность которого заключается в том, что рассматриваются отдельные элементы или агрегаты, но во взаимодействии по смежным границам со всей конструкцией. Правильное определение качественного и количественного характера этого взаимодействия - первый этап в реализации данного подхода. Эта цель достигается путем постановки и решения ряда двумерных краевых задач с сингулярностями в области и на границе (зачастую это периодические или двоякопериодические задачи). На данном этапе определяются жесткости граничного контура в виде функций или распределений. Нередко жесткости некоторых участков границы известны априори.

На втором этапе решается задача об определении исходного состояния, которое, как правило, является неоднородным. Сложность краевых задач определяется здесь степенью неоднородности искомых полей /1/. Конструктивные методы построения общих аналитических решений для прямоугольных областей даны в работах /2...7/. При этом широко используются специальные функции, свойства которых исследованы в работах /8,9/. Полученные решения представлены в виде суммы равновесной части и ряда по самоуравновешенным составляющим, локализованным у границы. Нормы этих составляющих быстро убывают, так что бесконечный ряд можно оборвать в соответствии с требуемой точностью. Однако влияние дальних составляющих ряда на параметры устойчивости предстоит еще изучить. Учет сингулярностей осуществляется сочетанием полученных и известных фундаментальных решений. Следует отметить, что при выделении агрегата на его границе появляются особые точки, которых в действительности нет. Поэтому необходимо получить соответствующие условия гладкости решений краевых задач в этих точках. Задача эта непростая и должна явиться п р е д м е т о м д а л ь н е й ш и х и с с л е д о в а н и й. Полученные решения позволяют строить высокоточные КЭ-модели.

Третий этап заключается в постановке и решении самой задачи устойчивости. Неоднородность исходного состояния обусловливает переход к вариационной постановке.

Достоинством описанного подхода является его оперативность; высокая точность получаемых результатов, возможность применения аналитических решений и КЭ-моделей одновременно; многоуровневость выполняемых расчетов, что позволяет выявить элемент-"провокатор" потери устойчивости и внести коррективы в силовую схему, компактность программного обеспечения и ряд других. Особо следует выделить то, что этот подход позволяет обнаружить новое качество и получить его количественную характеристику. Однако ему присущи и недостатки : сложность математического аппарата, необходимость постановки и решения промежуточных краевых задач, объектная направленность, необходимость творческого подхода.

Предложенный подход полностью реализован при исследовании устойчивости типовых нервюр силового кессона крыла[1]. В настоящее время ведутся работы по его приложению к изучению устойчивости панелей крыла и фюзеляжа, подкрепленных стенок лонжеронов, стеночных шпангоутов и ряда других двумерных и одномерных силовых элементов планера самолета. Разрабатывается алгоритм исследования устойчивости крупных агрегатов[2].

Рассмотрим вкратце приложение метода к исследованию устойчивости типовой нервюры регулярной части силового кессона, сечение которого для простоты рассуждений примем прямоугольным. Соединение нервюры с панелями кессона осуществляется посредством промежуточных упругих звеньев (компенсаторов), жесткость которых должна быть учтена. Постановка и анализ возникающих здесь краевых задач опускается.

На первом этапе получена двумерная 2l-периодическая задача (l - расстояние между нервюрами), в результате решения которой получается функция изгибной жесткости панелей в плоскости нервюры. Если допустимо пренебречь возмущениями, вносимыми лонжеронами, и стрингерный набор считать регулярным, то отмеченная двумерная краевая задача редуцируется в одномерную. Решение последней задачи

---

[1] Задача возникла на АНТК им.О.К.Антонова, поставлена и решена впервые в отрасли.

[2] По заказу АНТК им.О.К.Антонова.

получено в замкнутом виде. Связь погонного изгибающего момента, действующего на панели в плоскости нервюры, с углом поворота дается формулой

$$M_o = C_м \theta_o , \tag{1}$$

где $C_м$ - коэффициент жесткости края панели, получаемый в результате реализации первого этапа :

сжатая панель: растянутая панель:

$$C_м^c = \frac{4D_c}{t_c l} \frac{\frac{\alpha_c}{2}}{tg\frac{\alpha_c}{2}}, \qquad C_м^p = \frac{4D_p}{t_p l} \frac{\frac{\alpha_p}{2}}{th\frac{\alpha_p}{2}} \tag{2}$$

Здесь D_c , D_p - изгибные жесткости шпаций "стрингер плюс обшивка", t_c , t_p - расстояния между стрингерами в сжатой и растянутой зонах соответственно;

$$\alpha_c^2 = \frac{P_c l^2}{D_c}, \qquad \alpha_p^2 = \frac{P_p l^2}{D_p};$$

P_c , P_p - силы, приходящиеся на шпации панелей, l - расстояние между нервюрами.

Из формул (2) следует, что (новое качество и его количественная характеристика) : а) когда $P_c \to P_{кр} = \frac{\pi^2 D_c}{l^2}$, т.е. $\alpha_c \to \pi$, то $C_м^c \to 0$ (сжатая панель перестает оказывать на нервюру поддерживающее влияние); б) когда α_p растет до некоторого значения, ограниченного пределом прочности материала растянутой панели, то $C_м^p$ также растет до некоторого предельного значения, что приводит к усилению поддерживающего влияния, оказываемого на нервюру растянутой панелью.

На этом же этапе устанавливается связь характерных обобщенных перемещений компенсатора с передаваемыми им обобщенными силами с учетом податливостей панелей кессона :

$$
\begin{aligned}
M_k &= C_\theta \theta_k - C_{\theta v} w_k , \\
Q_k &= -C_{\theta v} \theta_k + C_v w_k , \\
H_k &= C_\varphi \varphi_k ,
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

где M_k, Q_k, H_k - изгибающий момент, перерезывающая сила и крутящий момент, действующие в месте соединения компенсатора с поясом нервюры (по сути, это реакции упругого основания, создаваемого компенсаторами и панелями), θ_k, w_k, φ_k - соответствующие им обобщенные перемещения, $C_\theta, C_{\theta v}, C_v$ и C_φ - коэффициенты жесткости упругого основания, вычисляются в квадратурах.

На втором этапе для определения исходного неоднородного состояния решается краевая задача, сформулированная в перемещениях, в результате чего определяются усилия в поясах нервюры и стойках, а также плоское НДС в стенке.

На третьем этапе ставится вариационная задача, в функционал которой входит и энергия упругого основания. Критическое сочетание исходных нагрузок - результат решения вариационной задачи.

Соответствующее программное обеспечение внедрено на АНТК им.О.К.Антонова.

В общей проблеме исследования устойчивости несущей конструкции особое место занимает з а д а ч а у ч е т а л о к а л ь н ы х н а г р у з о к . Такими являются, например, нагрузки, передаваемые на силовой кессон посредством буферных элементов (промежуточные звенья) со стороны механизации крыла. Исходные поля здесь обладают высокой степенью неоднородности, а их определение представляет достаточно сложную задачу. При решении самой задачи устойчивости возникают проблемы численной реализации, вызванные отсутствием достаточно мощной вычислительной техники. Поэтому особую значимость при решении этой задачи приобретает р а з р а б о т к а н о в ы х э ф ф е к т и в н ы х м а т е м а т и ч е с-

ких моделей и методов их анализа. Такие модели применительно к крыльевым панелям нами построены. Исходное состояние описывается одинарными быстро сходящимися рядами, анализ возмущенного состояния выполнен методом двойных тригонометрических рядов. Результаты исследований внедрены на АНТК им.О.К.Антонова. Полное решение проблемы требует *дальнейших исследований.*

Основой для исследования устойчивости несущих элементов конструкции является метод перемещений, что приводит к завышенным значениям критических параметров. Отсутствие эффективных методов уточнения верхних границ этих параметров ставит актуальную *проблему получения оценок снизу.* Продуктивными здесь оказываются два пути : формулировка краевых задач в терминах *функции напряжений* и получение *функционалов типа Кастильяно.* Известные же подходы, основанные на формулах расщепления, теоремах о включении, методах функции Грина, Ванштейна и промежуточных операторов Фикера в задачах устойчивости элементов конструкции малоэффективны, так как дают либо слишком широкие границы, для уменьшения которых необходимо всякий раз предпринимать специальные меры, либо требуют значительных вычислительных затрат.

Нами *рассмотрено* приложение метода постоянных Шварца, опирающегося на теорему о включении Темпля, к исследованию устойчивости прямоугольных ортотропных пластин при комбинированном нагружении и пяти вариантах граничных условий. При реализации метода в случае естественных краевых условий (свободный край) исходной была вариационная постановка задачи, в остальных случаях ставились краевые задачи. В качестве стартовой допустимой функции принималась одна из собственных функций (специальная мера) оператора краевой задачи, благодаря чему оказалось достаточным выполнить один шаг метода. Целесообразно, по-видимому, р а з в и т ь метод применительно к конструкциям, опираясь на КЭ-технологии.

При наличии следящих нагрузок данный метод становится неприменимым, поскольку операторы краевых задач перестают быть самосопряженными. Нами д а н о о б о б щ е н и е метода (пока для одномерных задач) на случай почти самосопряженных (термин наш) операторов. В задаче об устойчивости продольной стойки, подкрепляющей стенку силовой нервюры и сжатой на жестко защемленных концах силами P и kP ($0 \le k \le 1$) и нагруженной дополнительно распределенной следящей нагрузкой интенсивности $q = (1-k)P/l$ (l - длина стойки), получена простая зависимость :

$$P_{кр} = \lambda_1^2 EJ/l^2, \qquad (4)$$

где

$$\nu_1^* = \nu_2 - \frac{\nu_1 - \nu_2}{\dfrac{\lambda_2^2}{\nu_2} - 1} \le \lambda_1^2 \le \nu_2^*, \qquad (5)$$

$$\nu_2^* = \min\{\nu_2, \frac{8\pi^2}{1+k}\},$$

$$\nu_1 = \frac{3\cdot 7\cdot 10\cdot 11(1+k)}{29 f_1(k)}, \qquad \nu_2 = \frac{29\cdot 6\cdot 13\cdot 16}{461(1+k)}\frac{f_1(k)}{f_2(k)},$$

$$f_1(k) = k^2 + 2\,\frac{115}{116}\,k + 1 \approx (1+k)^2,$$

$$f_2(k) = k^2 + 2\,\frac{449}{461}\,k + 1 \approx (1+k)^2,$$

$$\lambda_2^2 = 8\mu^2/(1+k),$$

$$\mu = a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3} - \frac{13}{15a^5} - \frac{146}{105a^7} - \ldots \approx 4{,}493, \qquad a = 3\pi/2$$

При $k = 0$ (неблагоприятный случай) имеем :

$77{,}422 < \lambda_1^2 < 78{,}507$

Если теперь принять $\lambda_1^2 = (\nu_1^* + \nu_2^*) / 2 = 77{,}96$, то погрешность в определении критической нагрузки оказывается менее 0,7%.

При $k = 1$ получаем ($\lambda_1^2 = 39{,}478$ - точное решение)

$39{,}221 < \lambda_1^2 \le 39{,}478$.

Другой способ получения нижних оценок - это формулировка задач устойчивости в терминах *функции напряжений*. Решение этой проблемы имеет *фундаментальное* значение, поскольку позволяет :

- получить краевые задачи *встречного метода*;
- автоматически сформулировать *встречный вариационный принцип*, основанный на функционале типа Кастильяно.

Результатом как решения краевых задач, так и определения стационарных точек функционалов будут *нижние оценки* критических параметров. Наличие встречных функционалов открывает пути развития КЭ-технологий в форме *метода сил*.

Дадим формулировку задачи устойчивости в терминах функции напряжений (насколько нам известно, таких попыток не предпринималось) на примере пластины при однородном исходном состоянии. Выразим кривизны ($æ_1$, $æ_2$) и кручение ($æ_{12}$) изогнутой поверхности пластины в возмущенном состоянии через некоторую функцию φ (нижние буквенные индексы означают взятие частных производных) :

$$æ_1 = \varphi_{xyy} + k\alpha_2\varphi_x \; , \quad æ_{12} = \varphi_{yyy} + k\alpha_2\varphi_y \; , \tag{6}$$
$$æ_2 = -\varphi_{xxx} + k\alpha_1\varphi + 2\varphi_{xyy} + k\alpha_{12}\varphi_y \; ,$$

где $k = N_0/D$, $N_x = \alpha_1 N_0$, $N_{xy} = \alpha_{12} N_0$, $N_y = \alpha_2 N_0$, N_0 – искомый параметр, D – цилиндрическая жесткость пластины. Тогда уравнение равновесия в возмущенном состоянии и одно из условий неразрывности будут выполнены автоматически. Подстановка зависимостей (6) в оставшееся уравнение неразрывности приводит к уравнению

$$\nabla^2\nabla^2\varphi + k\,(\alpha_x\varphi_{xx} + 2\alpha_{xy}\varphi_{xy} + \alpha_y\varphi_{yy}) = 0\,, \tag{7}$$

ничем не отличающемуся от уравнения метода перемещений. Классические граничные условия формулируются так (рассматривается край $x=const=x_1$) :

1) заделка : $\varkappa_2 = \varkappa_{12} = 0$
2) свободное опирание : $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$
3) свободный от изгиба край :

$$\varkappa_1 + \nu\varkappa_2 = 0$$
$$(1-\nu)\varkappa_{2x} + k\,(\alpha_1 w_x + \alpha_{12} w_y) = 0$$

4) свободный от изгиба край свободен и от мембранных усилий :

$$\varkappa_{2x} = 0\,, \quad \varkappa_1 + \nu\varkappa_2 = 0.$$

Как видно из приведенных краевых условий, параметр критической нагрузки k входит в краевые условия. Это один из недостатков метода. Второй недостаток заключается в том, что в третьем случае краевых условий присутствуют углы поворота, от которых, впрочем, в ряде случаев можно избавиться:

$$w_x = -\int_{y_1}^{y} \varkappa_{12}(x=x_1, S)\,dS + w_x(x=x_1, y=y_1) \tag{8}$$

$$w_y = -\int_{y_2}^{y} æ_2(x=x_1, S)dS + w_y(x=x_1, y=y_2)$$

Выбирая y_1 и y_2 соответствующим образом, можно обратить в нуль вторые слагаемые в правых частях равенств (8).

Выражая далее энергию изгиба в возмущенном состоянии и работу усилий исходного состояния на перемещениях возмущенного через кривизны и углы поворота и учитывая (6), придем к функционалу типа Кастильяно.

ВЫВОДЫ.

1. Разработан, исследован и внедрен в практику проектирования подход к исследованию устойчивости конструкций большегрузных самолетов.
2. Разработаны эффективные математические модели и дан их анализ применительно к задачам устойчивости элементов конструкции при действии локальных нагрузок.
3. Развит метод постоянных Шварца для двумерных задач с самосопряженными операторами и одномерных задач с п о ч т и самосопряженными операторами.
4. В терминах функции напряжений в п е р в ы е получены краевая задача и функционал типа Кастильяно применительно к задачам устойчивости.
5. Сформулированы направления дальнейших исследований.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Халилов С.А. Устойчивость прямоугольных пластин при неоднородном деформировании. -В кн.: Расчет и проектирование конструкций

летательных аппаратов, Харьков, 1989, с.50-57.

2. Халилов С.А. Решение в прямоугольнике статической задачи теории упругости при заданных на границе напряжениях. -В кн.: Вопросы проектирования самолетных конструкций, Харьков, 1982, Вып.3, с.120-127.

3. Халилов С.А. Изгиб прямоугольной ортотропной пластины при заданных на границе перемещениях. -В кн.: Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов, Харьков, 1987, с.31-38.

4. Халилов С.А. Действие краевых самоуравновешенных нагрузок на прямоугольную пластину. -В кн.: Вопросы оптимизации тонкостенных силовых конструкций летательных аппаратов, Харьков, 1983, Вып.4, с.137-148.

5. Халилов С.А., Дибир А.Г. К определению плоского напряженного состояния прямоугольной стрингерной пластины. Там же, с.76-86.

6. Халилов С.А., Дибир А.Г. Определение корректирующих полей напряжений в плоской задаче теории упругости для ортотропного прямоугольника. -В кн.: Математические методы анализа динамических систем, Харьков, 1985, с.148-153.

7. Халилов С.А., Дибир А.Г. К задаче включения для прямоугольной стрингерной пластинки. -В кн.: Вопросы проектирования и производства тонкостенных силовых конструкций, Харьков, 1984, с.53-63.

8. Халилов С.А. Новые системы ортонормированных многочленов, некоторые их свойства и приложения. -В кн.: Прочность конструкций летательных аппаратов, Харьков, 1975, Вып.5, с.35-47.

9. Халилов С.А. Полные системы ортонормированных степенных полиномов для решения некоторых краевых задач линейной теории оболочек и пластин. -В кн.: Численные методы решения задач строительной механики, Киев, 1978, с.98-102.