УДК 517.954+517.951+517.956.226+517.956.4

КРАШАНИЦА Ю.А., канд.физ.-мат.наук

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОЛЯ И МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Представлена реализация концепции решения краевых задач механики сплошных сред методом эквивалентных граничных интегральных уравнений

Основные задачи механики сплошных сред формулируются в виде системы консервативных законов сохранения [1,2,6]

$$\nabla_i V^i{}_k = f_k \qquad (i,k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{1}$$

где V_k - некоторые искомые параметры задачи, а f_k - заданные величины, в общем случае тензорной природы. Кроме того на V_k накладываются естественные условия аналитического или физического характера. Значительный научный и практический интерес вызывает непосредственное решение системы (1), не улучшающее дифференциальные свойства решений. В этом отношении наиболее эффективным и универсальным подходом к решению краевых задач является метод граничных интегральных уравнений [3], применение которого оказалось особенно успешным в случае внешних краевых задач для неограниченных областей с компактной внутренней границей, позволяя перейти от исходной задачи к задаче в ограниченной области, причем, как правило, меньшей размерности.

Пусть n-мерный вектор $\xi \in (C)^{(2)}(\mathcal{D})$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} g^{ij}\,\nabla_i\nabla_j\,\xi = 0; \\ \nabla_i\,\xi^i = \varphi, \end{cases} \tag{2}$$

где g^{ij} - компоненты метрического тензора, а φ - фундаментальное решение уравнения Лапласа необходимой размерности [9], тогда

$$\nabla_i\varphi\, e^i = \nabla_i(\nabla_j\xi_i e^i e^i - \nabla_i\xi_j e^i e^j) \equiv \nabla_i \mathcal{R}a\{\xi\}^i \tag{3}$$

и тензор

$$\Gamma \overset{def}{\equiv} I\varphi - \mathcal{R}a\{\xi\} \tag{4}$$

является консервативным:

$$\nabla_i\Gamma^i = 0. \tag{5}$$

Из векторного анализа [8] известно, что для любого вектора

$\xi \in C^{(2)}(\mathcal{D})$ выполняется тождество

$$grad\ div\ \xi - div\ grad\ \xi - rot\ rot\ \xi = 0,$$

которое при использовании оператора $\mathcal{R}a$ из (3) в пространстве любой размерности ($n > 3$) принимает вид

$$\mathcal{F}\ [\xi] \equiv \nabla_i \xi^i,_i - g^{ij}\ \nabla_i \nabla_i \xi^i - \mathcal{R}a\{\xi\}^i,_i \equiv 0. \qquad (6)$$

Нетрудно заметить, что

$$\xi = k\ arctg\ \frac{y}{x}\ , \quad (n = 2); \qquad (7)$$

$$\xi = -\frac{2}{r}-\ grad\ arctg\ \frac{y}{x}\ , \ (n = 3). \qquad (8)$$

Применение оператора $\mathcal{F}$ к тензору Γ, в силу выражений (3...6)

$$\mathcal{F}\ [\Gamma] \equiv \nabla_i \Gamma^i,_i - g^{ij} \nabla_i \nabla_j \Gamma^i - \mathcal{R}a\{\Gamma\}^i,_i = I\delta \qquad (9)$$

приводит к утверждению о его фундаментальности, что доказывает

Теорему I. *Фундаментальным решением дифференциального оператора* $\mathcal{F}$ (9) *является тензор* Γ (4).

По определению, фундаментальное решение есть тензор, составленный из обобщенных функций, т.е. функционал, опеределенный на финитных функциях [9]. Однако в данном случае, как это видно из (4), полученное фундаментальное решение оператора $\mathcal{F}$, локально суммируемо. Это существенно расширяет область его применения и дает возможность получать новые важные результаты.

Составим интеграл

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{F}\{\mathbf{A}\}\cdot\Gamma\ dx = \int_{\mathcal{D}} \Big[- g^{ij}\ \nabla_i \nabla_j \mathbf{A}^i\ \Gamma_i - \mathcal{R}a_i\{\mathbf{A}\}_i \Gamma_i\Big] dx,$$

и проинтегрируем каждое слагаемое по частям

$$\int_{\mathcal{D}} \Big(\mathcal{F}\{\mathbf{A}\},\Gamma\Big) dx = \int_{\mathcal{D}} \nabla_i \mathbf{A}_j\ \nabla_i\ \Gamma_j\ dx\ -$$

$$- \int_{\mathcal{S}} \Big(\Big[\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \nu}\ \cdot\ +\ \vec{\nu}\cdot\ \mathcal{R}a\{\mathbf{A}\}\ \Big],\Gamma\Big)\ d\mathcal{S}. \qquad (10)$$

Так как $\mathcal{F}$ самосопряженный оператор, то

$$\int\limits_{\mathcal{D}}\Big[\mathbf{A},\mathcal{F}\{\Gamma\}\Big]dx = \int\limits_{\mathcal{D}} \nabla_i A_j \, \nabla_i \, \Gamma_j \, dx \; -$$

$$- \int\limits_{\mathcal{S}}\Big[\mathbf{A},\Big[\, \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu} \; + \; \vec{\nu}\cdot \mathcal{R}a\{\Gamma\} \,\Big]\Big]d\mathcal{S}. \tag{11}$$

Вычитая выражение (II) из выражения (IO) и замечая, что все пространственные интегралы взаимно уничтожаются, приходим к формуле

$$\int\limits_{\mathcal{D}}\Big[\mathcal{F}\{\mathbf{A}\}\cdot\Gamma - \mathbf{A}\cdot\mathcal{F}\{\Gamma\}\Big]dx = \int\limits_{\mathcal{S}}\Big[\mathcal{F}_S\{\mathbf{A}\}\cdot\Gamma - \mathbf{A}\cdot\mathcal{F}_S\{\Gamma\}\Big]d\mathcal{S}, \tag{12}$$

где

$$\mathcal{F}_S\{\mathbf{A}\} \equiv A^i{}_{,i}\,\vec{\nu} - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\nu} - \vec{\nu}\cdot\mathcal{R}a\{\mathbf{A}\}, \tag{13}$$

а в $\mathbf{R}^3$

$$\mathcal{F}_S\{\mathbf{A}\} \equiv \vec{\nu}\,\operatorname{div}\mathbf{A} - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\nu} - [\vec{\nu},\operatorname{rot}\mathbf{A}]. \tag{14}$$

Полученные формулы (IO, II, I2) можно рассматривать как некие новые аналоги известных формул Грина% первой и второй соответственно.

Из формулы Грина (I2), пользуясь стандартными средствами (см., например, [4]), получаем интегральное представление векторов $\mathbf{A}$ класса $C^{(2)}(\mathcal{D})$ в n-мерном пространстве. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Интегральное представление векторов* $\mathbf{A}$ *класса* $C^{(2)}(\mathcal{D})$ в n-мерном пространстве имеет вид

$$\mathbf{A}(x) = \int\limits_{S}\Big[\, \mathbf{A}(\xi)\cdot\mathcal{F}_S\{\Gamma|\xi-x|\} - \mathcal{F}_S\{\mathbf{A}\}\cdot\Gamma|\xi-x|\Big]d_\xi\mathcal{S} \; +$$

$$+ \int\limits_{\mathcal{D}}(\nabla_i A^i{}_{,i},\Gamma)dx. \tag{15}$$

В $\mathbf{R}^3$ это представление можно записать в более обозримой форме

$$\mathbf{A}(x) = \int\limits_{\mathcal{S}}\Big[\Big[\Big(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\nu} - \Big[\vec{\nu},\operatorname{rot}\mathbf{A}\Big]\Big]\cdot\Gamma \; - \mathbf{A}\cdot\Big(\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu} - \Big[\vec{\nu},\;\operatorname{rot}\Gamma\Big]\Big)\Big]d\mathcal{S} \; +$$

$$+ \int\limits_{\mathcal{D}}(\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A},\;\Gamma)\;dx \tag{16}$$

Из выражения (16) особенно хорошо видно, что в общем случае вектор в ограниченном пространстве определяется как своими граничными значениями, так и всеми своими векторными характеристиками, включая нормальную производную, расходимость и меру вихреобразования. При изучении же полей в безграничном пространстве целесообразно вводить достаточно удаленную контрольную поверхность, на которой, обычно, известны требуемые параметры.

Основные краевые задачи механики сплошных сред методами теории потенциала, классического или обобщеного, сводятся в общем случае к системе граничных интегральных уравнений (см., например, [7]). Практическая, численная реализация метода связана с переходом от интегралов к конечным суммам, что возможно, если границы области $\mathcal{S}_i$ представляются набором канонических областей σ^k_i, для которых удается построить наилучшие, в некотором смысле, квадратурные формулы. Однако исследуемая система уравнений, наряду с интегралами по ограниченным или замкнутым одно- или двумерным многообразиям от непрерывных вектор-функций, содержит как несобственные, так и сингулярные интегралы (см., например, [10]), для которых квадратурные формулы не существуют ([5]).

Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу функций $\mathcal{L}_2(\mathcal{S}_R)$ на сфере радиуса R. Для вычисления несобственного интеграла типа потенциала простого слоя

$$v(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathcal{S}_R} \frac{f(y)}{|x - y|} d\mathcal{S}_y \tag{17}$$

разложим подынтегральную функцию в ряд по сферическим функциям $Y_l(\theta)$, которые в R^3 вычисляются по формуле Лапласа, тогда интеграл (17) вычисляется по квадратурной формуле

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathcal{S}_R} \frac{f(y)}{|x - y|} d\mathcal{S}_y = R \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Y_k(x)}{2k + 1} . \tag{18}$$

При вычислении несобственного интеграла типа потенциала двойного слоя на сфере $\mathcal{S}$: $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = R^2$; аналогично, после некоторых вычислений, имеем

$$w(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathcal{S}_R} f(y) \frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{1}{|x - y|}\right) d\mathcal{S}_y = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Y_k(x)}{2k + 1} . \tag{19}$$

К сингулярным интегралам будем относить интегралы по сфере с центром в начале координат вида

$$\int\limits_{\mathcal{S}_R} \left[\mathbf{n}_y \times \nabla_y \left(\frac{1}{|x-y|} \right) \right] \mathbf{B}\,(y)\, d\mathcal{S}_y\,, \tag{20}$$

где тензор $\mathbf{B} \in \mathcal{L}_2(\mathcal{S}_R)$. Так что, предшествующий процесс приводит к квадратурно-интерполяционным формулам вычисления сингулярного интеграла

$$\int\limits_{\mathcal{S}_R} \left[\mathbf{n}_y \times \nabla_y \frac{1}{|x-y|} \right] \mathbf{B}(y) d\mathcal{S}_R = -\,4\pi\, R \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{n}\cdot \mathrm{rot}\ \mathbf{B}_k(x)}{2k+1}\,, \tag{21}$$

где производные сферических функций $\mathbf{B}_k$ находятся по рекуррентным соотношениям.

В практических задачах интегралы для потенциалов простого (I8) и двойного (I9) слоев часто вычисляются по поверхностям составленным из частей сфер $\mathcal{S}^R_k$: $(\theta_k < \theta < \theta_{k+1};\ \varphi_k < \varphi < \varphi_{k+1})$, расположенных так, что $0 < \theta_k,\ \theta_{k+1} < \pi,\ 0 >< \varphi_k,\ \varphi_{k+1} < 2\pi$. Вычислим интегралы $v(x)$ и $w(x)$ по всей поверхности сферы $\mathcal{S}^R$: $(0 \le \theta \le \pi;\ 0 \le \varphi \le 2\pi)$

$$v(x) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\overline{f_1(y)}}{|x-y|} d\mathcal{S}_y; \qquad w(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathcal{S}^R} \overline{f_2(y)}\, \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} d\mathcal{S}_y \tag{22}$$

с финитными плотностями $\overline{f_i(x)} \in \mathcal{L}_2(\mathcal{S}^R)$, носитель которых $\mathrm{supp}\ \overline{f_i} = \mathcal{S}^R$ допускает разложение в обобщенный ряд Фурье по полной системе ортогональных сферических функций $\{F_{il}\}$.

Используя для ядра потенциала двойноо слоя $w\ (x)$ на сфере формулу (I9), придем к квадратурным формулам

$$w(x) = -\,\frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{F_{2l}(x)}{2l+1}\,, \qquad v(x) = R \sum_{l=0}^{\infty} \frac{F_{1l}(x)}{2l+1}; \tag{23}$$

где

$$\sum_{l=0}^{\infty} F_{il}(x) = \begin{cases} f_i(x), & x \in \mathcal{S}^R_k, \\ 0, & x \in \mathcal{S}^R - \mathcal{S}^R_k\,. \end{cases} \tag{24}$$

Предположим теперь, что произвольная поверхность $\mathscr{S}_k$ эллиптическоо типа достаточно мала и локально задана параметрически

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v); \quad (u_k \le u \le u_{k+1}; \quad v_k \le v \le v_{k+1}), \tag{25}$$

т.е. является элементом поверхности в ортогональных криволинейных координатах (u,v).

Возвращаясь к вычислению интегралов $v(x)$ и $w(x)$, заменим элемент поверхности $\mathscr{S}_k$ элементом сферы $\mathscr{S}_k^R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k, \gamma_k)$. При достаточно большом n сфера $\mathscr{S}_k^R$ наиболее плотно прилегает к $\mathscr{S}_k$ и длины ортогональных границ этих поверхностей имеют один порядок

$$\Delta\mathscr{S}_k^v = R_k\,\Delta\theta_k; \qquad (\Delta\theta_k \cong \theta_{k+1} - \theta_k)$$

$$\Delta\mathscr{S}_k^u = R_k\,\Delta\varphi_k \sin\theta_k; \quad \Delta\mathscr{S}_{k+1}^u = R_k\,\Delta\varphi_k \sin\theta_{k+1}, \tag{26}$$

где $\Delta\mathscr{S}_k^v$, $\Delta\mathscr{S}_k^u$, $\Delta\mathscr{S}_{k+1}^u$ измеряются вдоль соответствующей координатной линии элемента поверхности по известной римановой метрике.

Система (26) однозначно определяет сферические координаты поверхности $\mathscr{S}_k^R$: $\Delta\theta_k$, $\Delta\varphi_k$, θ_k и интегралы для потенциалов вычисляются приближенно по формулам (23) и (24).

Пусть теперь интегралы вычисляются по замкнутой поверхности

$$\mathscr{S} = \sum_{k=1}^{N} \mathscr{S}_k,$$

где $\mathscr{S}_k$ – компактные области регулярного двумерного многообразия, допускающие параметризацию с изометрической сетью (u,v). Тогда основные функции $f_i(x)$ можно представить в форме конечной суммы

$$f_i(x) = \sum_{k=1}^{N} f_i^k(x)$$

причем $f_i^k(x)$ сосредоточены строго внутри области $\mathscr{S}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$: $f_i^k(x) = 0$, если $x \bar{\in} \mathscr{S}_k$ [9].

Вычисляя для каждой области параметры аппроксимирующих сфер $\mathscr{S}_k^R$, а интегралы по системе сферических сегментов по формулам (23),(24), получим квадратурные формулы для интегралов типа потенциалов

$$v(x) = \sum_{k=1}^{N} R_k \sum_{l=1}^{\infty} \frac{F_{1l}^k(x)}{2l+1}; \quad w(x) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{F_{2l}^k(x)}{2l+1} \tag{27}$$

в случае достаточно широкого класса кусочно-регулярных поверхностей.

Список литературы

1. Шевелев Ю.Д. [I] Пространственные задачи вычислительной аэрогидродинамики.- М.: Наука, 1986.- 368 с.

2. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред.-М.%Мир. 1991.-560 с.

3. Метод граничных интегральых уравнений. Вычислительные асекты и приложения к механике. Под ред. Т. Крузо и Ф. Риццо. - М.% Мир, 1978.

4. Крашаница Ю.А. Метод сращиваемых интегральных представлений в динамике вязкой жидкости // Изв. ВУЗов. Авиационная техника. N3, 1989.

5. Krashanitsa Y.A.,Rashkovan V.M.About Some Control Probleems in Electromagnetic Fields //Proc. of Second Colloquim on Differential Equations. Plovdiv, 1991.

6. Козорез В.В., Крашаница Ю.А., Рашкован В.М. Законы сохранения и граничные задачи управления в магнитном поле // ИК АН Украины. Препринт 92-3, 1992.

n 7. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука ,1970.

8. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу. - М.% Издательство МГУ, 1979.

9. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс.-М.% Наука, 1965.

10. Бабенко К.И. Основы численного анализа.- М.: Наука, 1986. - 876.