

Н. И. Гурьев

РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И ПРИЗМАТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ НЕИЗВЕСТНЫХ

В статье излагается метод исследования напряженного состояния оболочек с работающей обшивкой от действия сосредоточенной нагрузки, приложенной к силовому шпангоуту.

Истинное напряженное состояние аппроксимируется в виде суммы двух состояний:

- 1) основного — определяемого по элементарной теории тонкостенных стержней,
- 2) дополнительного, самоуравновешенного.

Целью работы является определение напряжений дополнительного состояния с применением вариационного принципа Кастильяно. За расчетную схему оболочек с равномерно расположенными стрингерами и шпангоутами принимается схема ортотропной оболочки.

Оболочка предполагается полубезмоментной, что позволяет при определении потенциальной энергии деформаций в качестве доминирующих усилий принимать:

- 1) нормальные и касательные усилия в поперечном сечении и
- 2) изгибающие моменты в продольном сечении оболочки.

Введем следующие обозначения:

$\sigma_{\text{доп}}(z, s)$ — дополнительные напряжения в поперечном сечении оболочки;

$q_{\text{доп}}(z, s)$ — интенсивность дополнительных касательных усилий в продольных и поперечных сечениях оболочки;

$M_{\text{доп}}(z, s)$ — интенсивность дополнительных изгибающих моментов в продольном сечении оболочки в самоуравновешенном состоянии;

$\sigma_{\text{осн}}, q_{\text{осн}}$ — усилия от внешней нагрузки, полученные по элементарной теории оболочки как балки,

$\delta = \delta_0 + \frac{\sum F_{\text{ст}}}{U}$ — приведенная толщина обшивки (в случае неподкрепленных оболочек),

δ_0 — истинная толщина обшивки,

$F_{\text{ст}}$ — площадь стрингера,

U — периметр поперечного сечения оболочки.

Свои рассуждения будем относить к оболочке, заделанной на одном конце и жестко связанной со шпангоутом (упругим или абсолютно жестким) на другом. Нагружение осуществляется сосредоточенной силой, приложенной к концевому шпангоуту (или изгибающим и крутящим моментами). Поперечное сечение предполагается симметричным относительно оси y (рис. 1).

Обычно функции, определяющие распределение напряжений вдоль дуги поперечного сечения, аппроксимируются с помощью тригонометрических, алгебраических и других функций [1, 2, 3]. От выбора последних во многом будет зависеть простота и правильность определения дополнительных напряжений. Так, например, аппроксимация $\sigma_{\text{доп}}(z, s)$ с помощью тригонометрических функций достаточно хорошо себя оправ-

дывает для однородных круговых оболочек. При расчете оболочек с другими формами поперечного сечения и при наличии в сечениях сосредоточенных площадей, вырезов и т. п. нужно подыскивать подходящие аппроксимирующие функции для каждой конкретной задачи.

В настоящей статье предлагается аппроксимировать функцию дополнительных напряжений с помощью ее дискретных значений в некоторых избранных точках контура поперечного сечения:

$\sigma_1(z), \sigma_2(z), \dots, \sigma_m(z)$. (рис. 1).

Изменение их вдоль образующих выражается некоторыми пока неизвестными функциями $\sigma_k(z)$, а между двумя точками по контуру принимается в виде линейной функции от дуговой координаты s :

$$\sigma_{\text{доп}}(z, s) = \sigma_{k-1}(z) + \Delta\sigma_k(z) \frac{s}{d_k}, \quad (1)$$

где

$\sigma_{k-1}(z), \sigma_k(z)$ — искомые напряжения в точках $k-1$ и k соответственно,

d — расстояние по дуге между этими точками (рис. 2).

Обход по контуру сечения совершаем по ходу стрелки часов

$$\Delta\sigma_k(z) = \sigma_k(z) - \sigma_{k-1}(z).$$

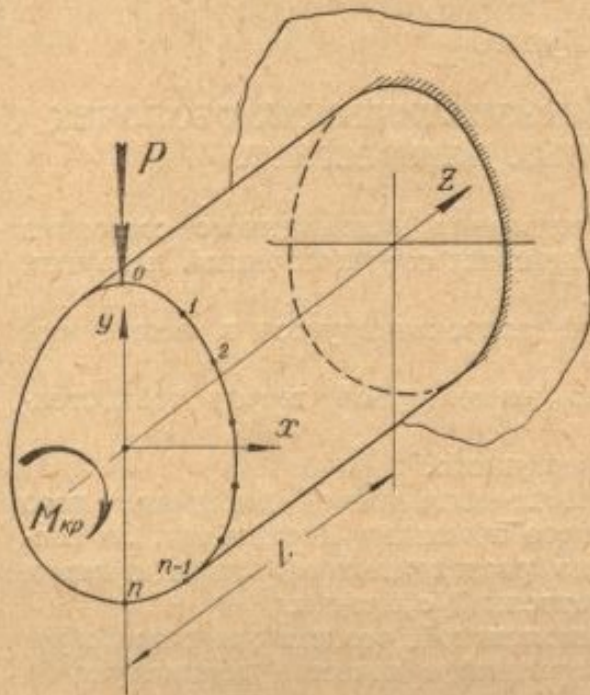


Рис. 1.

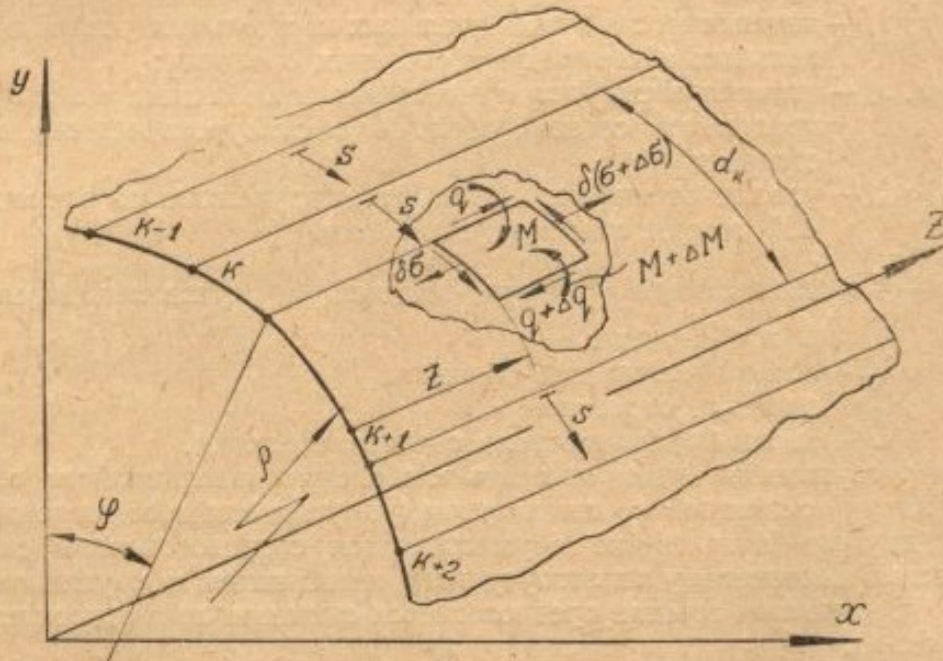


Рис. 2.

В поперечном сечении оболочки продольные усилия, которые соответствуют дополнительным напряжениям, должны удовлетворять условиям самоуравновешиваемости:

$$\oint \sigma_{\text{доп}}(z, s) \delta ds = 0, \quad \oint \sigma_{\text{доп}}(z, s) y \delta ds = 0. \quad (2)$$

С помощью этих условий два дискретных значения (например, $\sigma_{m-1}(z)$, $\sigma_m(z)$) выражаются через все остальные. Последние будут являться лишними (независимыми) неизвестными.

При наличии в поперечном сечении оболочки стрингеров с площадями сечения $f_{стр}$ в левых частях выражений (2) добавятся члены $\sigma_k(z) f_{стр}$, $\sigma_k(z) f_{стр} y_k$ соответственно. В дальнейшем для удобства будем писать σ_k вместо $\sigma_k(z)$.

Из условия равновесия элемента оболочки (рис. 2)

$$\frac{\partial}{\partial z} (\delta \sigma_{доп}) - \frac{\partial q_{доп}}{\partial s} = 0$$

получим сопутствующие нормальным напряжениям дополнительные срезающие усилия — $q_{доп}(z, s)$.

В пределах участка $k-1, k$

$$q_{доп}(z, s) = F_k \left[\sigma'_{k-1} \frac{s}{d_k} + \Delta \sigma'_k \frac{s^2}{2d_k^2} \right] + q_{k-1}(z), \quad (3)$$

где $q_{k-1}(z)$ — интенсивность касательных усилий в точке $k-1$,
 F_k — площадь поперечного сечения пластинки $k-1, k$,

$$\sigma'_{k-1} = \frac{d\sigma_{k-1}}{dz}, \quad \Delta \sigma'_k = \frac{d\sigma'_k}{dz} - \frac{d\sigma_{k-1}}{dz}.$$

В любом поперечном сечении касательные усилия должны быть также самоуравновешены (рис. 2):

$$\oint q_{доп}(z, s) \rho ds = 0, \quad \oint q_{доп}(z, s) \sin \varphi ds = 0. \quad (4)$$

Можно показать, что условия (4) выполняются тождественно в связи с выполнением условий (2).

Промежуточные шпангоуты, свободные от внешней нагрузки, будут нагружены только перепадом касательных усилий обшивки по каждому участку контура

$$q_{шп}(z, s) = \frac{\partial q_{доп}}{\partial z} = F_k \left[\sigma'_{k-1} \frac{s}{d_k} + \Delta \sigma'_k \frac{s^2}{2d_k^2} \right] + q'_{k-1}(z) \quad (5)$$

а торцевые — полным потоком касательных сил

$$q_{0, L}(z, s) = F_k \left[\sigma'_{k-1} \frac{s}{d_k} + \Delta \sigma'_k \frac{s^2}{2d_k^2} \right] + q'(z) \quad (6)$$

и внешней нагрузкой.

Выражение потенциальной энергии системы запишем как

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_0^L \oint \frac{(\sigma_{осн} + \sigma_{доп})^2 \delta ds}{2E} dz + \int_0^L \oint \frac{(q_{осн} + q_{доп})^2 ds}{2G \delta_0} dz + \\ &+ \int_0^L \oint \frac{(M_{осн} + M_{доп})^2 ds}{2E I_{шп}} + dz \mathcal{E}_{ш. о.} + \mathcal{E}_{ш. L} = \\ &= \int_0^L \oint \frac{\sigma_{доп}^2 \delta ds}{2E} dz + \int_0^L \oint \frac{q_{доп}^2 ds}{2G \delta_0} + dz \int_0^L \oint \frac{q_{осн} q_{доп} ds}{G \delta_0} dz + \\ &+ \int_0^L \oint \frac{M_{доп}^2 ds}{2E I_{шп}} dz + \mathcal{E}_{ш. о.} + \mathcal{E}_{ш. L} + C, \quad (7) \end{aligned}$$

где $\mathcal{E}_{ш. о.}$, $\mathcal{E}_{ш. L}$ — потенциальная энергия изгиба концевой ($z=0$) и корневой ($z=L$) шпангоутов соответственно,

$i_{\text{шп}} = \frac{I_{\text{шп}}}{b}$ — погонный момент инерции продольного сечения кольца,

$I_{\text{шп}}$ — момент инерции промежуточного шпангоута,
 b — расстояние между шпангоутами,

$C = \oint \frac{\sigma_{\text{осн}}^2 \delta ds}{2E} + \oint \frac{q_{\text{осн}}^2 ds}{2G\delta_0}$ — интегралы, не зависящие от дополнительных напряжений, в дальнейшем их будем опускать, так как они не оказывают никакого влияния на решение задачи.

Можно показать, что интегралы типа

$\oint \frac{\sigma_{\text{осн}} \sigma_{\text{доп}}}{E} ds, \oint \frac{M_{\text{осн}} M_{\text{доп}}}{E i_{\text{шп}}} ds$ в рассматриваемых случаях нагружения образуются в нуль.

Первые два интеграла в выражении (7) заменяем суммой интегралов по каждому участку.

На участке $k-1, k$

$$\int_0^{d_k} \frac{\sigma_{\text{доп}}^2 \delta ds}{2E} = \frac{F_k}{6E} (\sigma_{k-1}^2 + \sigma_{k-1} \sigma_k + \sigma_k^2), \quad (8)$$

$$\int_0^{d_k} \frac{q_{\text{доп}}^2 ds}{2G\delta_0} = \frac{F_k^2 d_k}{120G\delta_0} [(8\sigma_{k-1}'^2 + 9\sigma_{k-1}' \sigma_k' + 3\sigma_k'^2) + \frac{20q_{k-1}}{F_k} \times \\ \times (2\sigma_{k-1}' + \sigma_k' + \frac{3q_{k-1}}{F_k})]. \quad (9)$$

Вычисление интеграла $\oint \frac{q_{\text{осн}} q_{\text{доп}} ds}{G\delta_0}$ производится для каждого конкретного случая внешней нагрузки и формы поперечного сечения. $M_{\text{доп}}(z, s)$ определяется из расчета рамы шпангоута, нагруженного самоуравновешенным перепадом касательных усилий (5), и является функцией вторых производных от искомым неизвестных.

Таким образом, в выражение полной энергии системы войдут: неизвестные функции дискретных значений нормальных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_{m-2}$, а также их первые и вторые производные:

$$\mathcal{E} = \int_0^L [F(z, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{m-2}; \sigma_1', \sigma_2', \dots, \sigma_{m-2}'; \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{m-2})] dz.$$

Функции $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{m-2}$ должны удовлетворять минимуму потенциальной энергии оболочки. Это требование приводит к простейшей смешанной вариационной задаче от нескольких независимых переменных.

Для оболочек с абсолютно жестким поперечным набором (которые будем называть оболочками первого типа) можно принять

$$\oint \frac{M_{\text{доп}}^2 ds}{2E i_{\text{шп}}} = 0, \quad \mathcal{E}_{\text{ш. } 0} = \mathcal{E}_{\text{ш. } L} = 0,$$

тогда энергия всей системы будет

$$\mathcal{E} = \int_0^L [F(z, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{m-2}; \sigma_1', \sigma_2', \dots, \sigma_{m-2}')] dz, \quad \text{где}$$

$$F = \frac{F_k}{6E} \sum (\sigma_{k-1}^2 + \sigma_{k-1}\sigma_k + \sigma_k^2) + \frac{F_k^2 d_k}{120G\delta_0} \sum [(8\sigma_{k-1}'^2 + 9\sigma_{k-1}'\sigma_k' + 3\sigma_k'^2) + \frac{20q_{k-1}}{F_k} (2\sigma_{k-1}' + \sigma_k' + \frac{3q_{k-1}}{F_k})] + \oint \frac{q_{осн} q_{дон} ds}{G\delta_0}. \quad (10)$$

Для оболочек с конечной жесткостью изгиба поперечного набора, но с бесконечно большой жесткостью сдвига обшивки (оболочки второго типа) можно пренебречь членами, соответствующими энергии сдвига обшивки:

$$\oint \frac{q_{дон}^2 ds}{2G\delta_0} = 0, \quad \oint \frac{q_{осн} q_{дон} ds}{G\delta_0} = 0.$$

В этом случае

$$\mathcal{E} = \int_0^L [F(z, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{m-2}; \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{m-2})] dz + \mathcal{E}_{ш.о} + \mathcal{E}_{ш.л},$$

где $F = \frac{F_k}{6E} \sum (\sigma_{k-1}^2 + \sigma_{k-1}\sigma_k + \sigma_k^2) + \oint \frac{M_{дон}^2 ds}{2Ei_{шн}}$. (11)

1. Для оболочек первого типа дифференциальные уравнения Эйлера имеют вид

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_k} + \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_k'} \right) = 0. \quad (k = 1, 2, \dots, m-2). \quad (12)$$

Выполняя операции, указанные в (12), получим систему линейных, однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами следующего вида:

$$\sum (a_{ik}\sigma_k + b_{ik}\sigma_k') = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m-2) \quad (13)$$

где a_{ik}, b_{ik} — постоянные коэффициенты, зависящие только от геометрии поперечного сечения и количества избранных точек по контуру. Они определяются при подсчете энергии по формуле (10) в каждом конкретном случае внешней нагрузки и формы поперечного сечения оболочки.

Краевые условия для рассматриваемой задачи запишутся следующим образом:

1. На свободном конце оболочки ($z = 0$)

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_{m-2} = 0. \quad (14)$$

2. Для сечения у заделки ($z = L$) воспользуемся естественными граничными условиями вариационной задачи, которые при абсолютно жестких опорах имеют вид:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \sigma_k'} \right]_{z=L} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, m-2). \quad (15)$$

а) В качестве примера произведем расчет на изгиб и кручение прямоугольного кессона, рассмотренного в работе [4].

С целью показать сходимость процесса решения сначала полку делим на два участка (условно назовем это первым приближением), потом на четыре (второе приближение) и т. д. Для каждого приближения находим свое решение и сравниваем с предыдущим (рис. 3).

В первом приближении для изгиба из условий (2) получаем $\sigma_1 = -\sigma_3$. На участке 1—3 по верхней и нижней полке касательные усилия будут:

дополнительные

$$q_{\text{доп.}} = \frac{B\delta_2^{\text{III}}}{2} \left(-\frac{2s}{B} + \frac{4s^2}{B^2} \right) \sigma_1',$$

основные

$$q_{\text{осн.}} = \frac{Q}{HB} s.$$

Эпюры $\sigma_{\text{доп.}}$, $q_{\text{доп.}}$ приведены на рис. 3. Стенки лонжеронов во внимание не принимаются, ибо они приняты работающими только на сдвиг.

Напряженное состояние кессона в первом приближении станет известным после определения функции $\sigma_1 = -\sigma_2$.



Рис. 3.

Найдя потенциальную энергию по формуле (10) и написав уравнение Эйлера (12), получим дифференциальное уравнение для определения $\sigma_1 = -\sigma_2$:

$$\frac{B^2}{40} \frac{\delta_2^{\text{III}}}{\delta_c^{\text{III}}} \frac{E}{G} \sigma_1'' - \sigma_1 = 0,$$

общий интеграл которого имеет вид

$$\sigma_1 = A_1 e^{\alpha z} + A_2 e^{-\alpha z},$$

где

$$\alpha^2 = \frac{40}{B^2} \frac{\delta_c^{\text{III}}}{\delta_2^{\text{III}}} \frac{G}{E}. \quad (16)$$

Из граничных условий (14) и (15) следует:

$$A_1 = -A_2 = \frac{5Q}{4BH\delta_2^{\text{III}} \alpha \operatorname{ch} \alpha L}.$$

Следовательно,

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \frac{5Q}{2HB\delta_2^{\text{III}} \alpha} \frac{\operatorname{sh} \alpha z}{\operatorname{ch} \alpha L}.$$

Для второго приближения приведем только основные соотношения в окончательном виде. Из условий (2) следует:

$$2\sigma_2 = \sigma_3 - \sigma_1.$$

Система уравнений (13) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} 10\sigma_1'' - 60b_1\sigma_1 + 6\sigma_3'' &= 0 \\ 10\sigma_3'' - 60b_1\sigma_3 + 6\sigma_1'' &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (17)$$

где

$$b_1 = \frac{32}{3} \frac{1}{B^2} \frac{\delta_1^{III}}{\delta_1^{III}} \frac{G}{E}.$$

Граничные условия для свободного края

$$\sigma_1 = \sigma_3 = 0,$$

для заделанного

$$\left. \begin{aligned} (10\sigma_1' + 6\sigma_3')_{z=L} &= \frac{30Q}{HB\delta_1^{III}} \\ (10\sigma_3' + 6\sigma_1')_{z=L} &= \frac{50Q}{HB\delta_1^{III}} \end{aligned} \right\}. \quad (18)$$

Интегрирование (17) при выполнении граничных условий (18) дает искомые функции σ_1 и σ_3 :

$$\sigma_3; \sigma_1 = \frac{5Q}{2HB\delta_1^{III}} \left(\frac{\text{sh } \alpha z}{\text{ch } \alpha L} \pm \frac{1}{2} \frac{\text{sh } 2\alpha z}{\text{ch } 2\alpha L} \right),$$

где α — коэффициент (16).

На рис. 3 представлена эпюра нормальных напряжений в заделке по ширине полки первого, второго и третьего приближений. Здесь же показано изменение нормальных напряжений вдоль образующей, отмеченной точкой 3. Для сравнения нанесены результаты по работе [4] (пунктирные линии). При кручении первое приближение (полка делится на два участка) будет полностью совпадать с решением в работе [4] при $Q = 0$, ибо оно соответствует допущению о линейном распределении нормальных напряжений по ширине полки, принятой в работе [4].

Для второго приближения (полка делится на четыре участка (рис. 4) система уравнений (13) получается в виде:

$$\left. \begin{aligned} (188 + 15a_1)\sigma_2'' - 4b_2\sigma_2 + (86 + 12,5a_1)\sigma_3'' - b_2\sigma_3 &= 0, \\ (86 + 12,5a_1)\sigma_2'' - b_2\sigma_2 + (59 + 10,4a_1)\sigma_3'' - 2b_2\sigma_3 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

где

$$a_1 = \frac{4H}{B} \frac{\delta_1^{III}}{\delta_1^I}, \quad b_2 = \frac{1280}{B^2} \frac{\delta_1^{III}}{\delta_1^{III}} \frac{G}{E}.$$

Граничные условия для свободного конца ($z = 0$)

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0,$$

для заделанного ($z = L$)

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{94}{5} \frac{B}{\delta_1^{III}} + \frac{6H}{\delta_1^I} \right)_{z=L} \sigma_1' + \left(\frac{43}{5} \frac{B}{\delta_1^{III}} + \frac{5H}{\delta_1^I} \right)_{z=L} \sigma_2' - \left(\frac{144}{\delta_1^{III}} - \frac{48}{\delta_1^I} \right) \frac{M_{кр}}{B^2\delta_1^{III}}, \\ \left(\frac{43}{5} \frac{B}{\delta_1^{III}} + \frac{5H}{\delta_1^I} \right)_{z=L} \sigma_1' + \left(\frac{59}{10} \frac{B}{\delta_1^{III}} + \frac{25H}{6\delta_1^I} \right) \sigma_2' = \left(\frac{120}{\delta_1^{III}} - \frac{48}{\delta_1^I} \right) \frac{M_{кр}}{B^2\delta_1^{III}}. \end{aligned} \right\}$$

Для кессона при тех же исходных данных, что и в работе [4], получено:

$$\sigma_2 = 14,4 \frac{\text{sh } \alpha_1 z}{\text{ch } \alpha_1 L} - 10 \frac{\text{sh } \alpha_2 z}{\text{ch } \alpha_2 L},$$

$$\sigma_3 = 14,4 \frac{\text{sh } \alpha_1 z}{\text{ch } \alpha_1 L} + 17 \frac{\text{sh } \alpha_2 z}{\text{ch } \alpha_2 L}.$$

Здесь $\alpha_1 = 0,0231$, $\alpha_2 = 0,0566$.

На рис. 4 приведены второе и третье приближения по ширине полки кессона и вдоль образующей, отмеченной точкой 3. Эпюра нормальных напряжений в заделке во втором и последующих приближениях по методу дискретных неизвестных находится в полном соответствии с теоре-

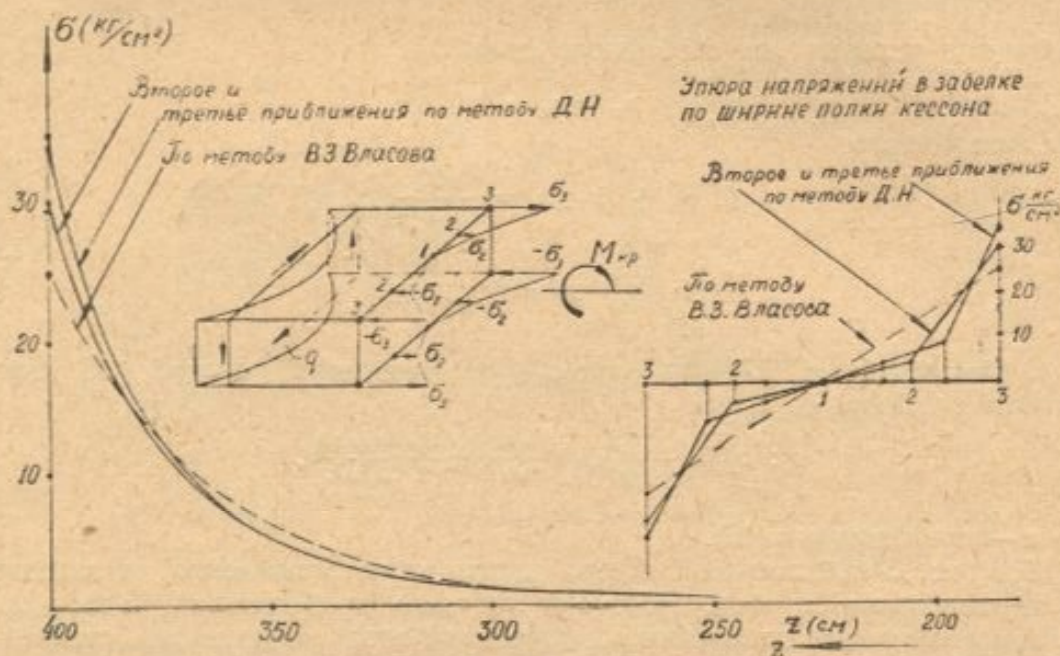


Рис. 4.

тическими результатами Г. Эбнера [6], полученными при строгой постановке задачи о кручении прямоугольного кессона.

На рис. 4 пунктирной линией нанесены результаты по вариационному методу В. З. Власова [4]. Как видно из рисунка, обычно принимаемый линейный закон изменения нормальных напряжений по ширине полки для сечений вблизи заделки может привести к заметным погрешностям.

б) Рассмотрим теперь изгиб коротких открытых оболочек, подкрепленных стрингерами с площадью $f_{\text{стр}}$ (рис. 5). В первом приближении полка делилась на два участка. В качестве лишних неизвестных выбраны напряжения в точках 1, 2, 3.

Из условий (2) следует:

$$\sigma_2 = a_2 \sigma_1, \quad \sigma_3 = a_3 \sigma_1,$$

где

$$a_2 = \left(\frac{6f_{\text{стр}}}{H\delta} + 2 \right), \quad a_3 = \left(2 + \frac{6f_{\text{стр}}}{H\delta} + \frac{16f_{\text{стр}}}{B\delta} + \frac{2H}{B} + \frac{24f_{\text{стр}}^2}{BH} \right).$$

Для примеров, приведенных в работе [5],

$$a_2 = 2,8, \quad a_3 = 3,94.$$

Эпюры $\sigma_{доп.}$ и $q_{доп.}$ представлены на рис. 5. На участках 1—2 и 3—2 по формуле (3) находим:

$$q_{1-2}(z, s) = \left[H\delta \left(\frac{s}{H} - \frac{1+a_2}{4} \frac{s^2}{H^2} \right) + f_{стр} \right] \sigma'_1,$$

$$q_{3-2}(z, s) = \left[2a_3 \frac{s}{B} - 2(a_2 - a_3) \frac{s^2}{B^2} \right] \sigma'_1$$

(обход на участке 3—2 ведем от точки 3 к точке 2).

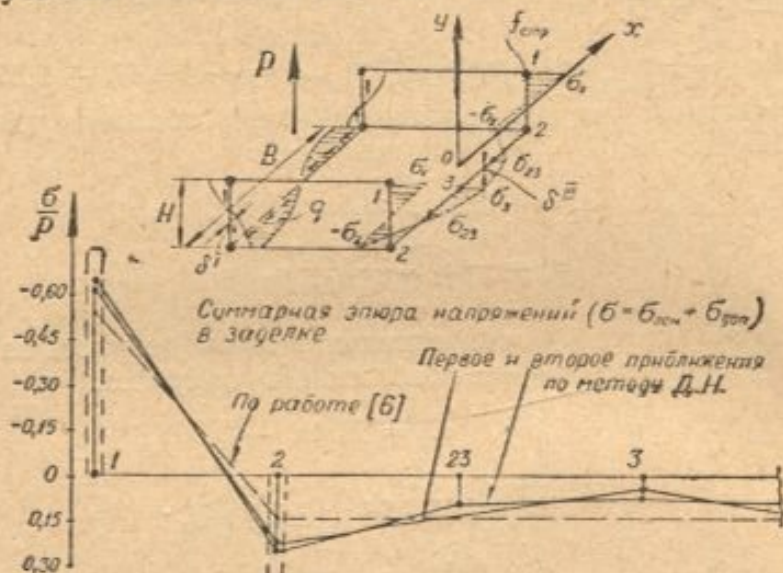


Рис. 5.

Потенциальная энергия в рассматриваемом случае будет

$$\mathcal{E} = \int_0^L \left[\frac{A_1}{E} \sigma_1^2 + \frac{B_1}{G} \sigma_1'^2 + \oint \frac{q_{осн} q_{доп}}{Gb} ds \right] dz,$$

где

$$A_1 = \frac{Hb}{3} (1 - a_2 + a_2^2) + \frac{Bb}{6} (a_2^2 - a_2 a_3 + a_3^2) + f_{стр} (1 + a_2^2) = 85,6 \text{ см}^2;$$

$$B_1 = H^3 \delta \left(\frac{2}{15} - \frac{3}{20} a_2 + \frac{a_2^2}{20} \right) + 2f_{стр} H^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{a_2}{6} \right) + f_{стр}^2 \frac{H}{b} + \frac{B^3 \delta}{8} \left(\frac{2}{15} a_3^2 - \frac{3}{20} a_2 a_3 + \frac{a_2^2}{20} \right) = 30676 \text{ см}^4;$$

$$\oint \frac{q_{осн} q_{доп}}{Gb} ds = \frac{2}{Gb} \left(\int_0^H q_{осн} q_{доп} ds + \int_0^{b/2} q_{осн} q_{доп} ds \right). \quad (19)$$

Эпюра $q_{осн.}$ приведена в работе [5] (стр. 68).

Первый интеграл в выражении (19) подсчитывался по правилу перемножения трапециевидальных эпюр. При этом вертикальная стенка разбивалась на три участка. Второй интеграл вычислялся непосредственным интегрированием. В результате получено:

$$\oint \frac{q_{осн} q_{доп.}}{Gb} = \frac{P}{I_x G b} (94,4H + 0,1715B^3) \sigma'_1,$$

где I_x — момент инерции сечения относительно центральной оси $x-x$.

Для определения σ_1 получено следующее дифференциальное уравнение:

$$\sigma_1' - \frac{G}{E} \frac{A_1}{B_1} \sigma_1 = 0,$$

общий интеграл которого будет

$$\sigma_1 = C_1 e^{\alpha z} + C_2 e^{-\alpha z},$$

где

$$\alpha^2 = \frac{G}{E} \frac{A_1}{B_1} = 0,001115.$$

Граничные условия для свободного конца ($z=0$) $\sigma_1=0$. Следовательно $C_1 = -C_2 = D$.

В заделке $\left[\frac{\partial F}{\partial \sigma_1'} \right]_{z=L} = 0$, т. е. $\frac{2B_1}{G} \sigma_1'_{z=L} = -(94,4H + 0,1715B^3) \frac{P}{I_x G}$, отсюда для частного случая рассматриваемой оболочки ($B=100$ см, $H=25$ см, $\delta=0,3$ см, $L=100$ см) получаем:

$$\sigma_2 = -2,8\sigma_1, \quad \sigma_3 = 3,94\sigma_1,$$

$$\sigma_1 = -87,5 \frac{P}{I_x} \frac{\text{sh } \alpha z}{\text{ch } \alpha L}.$$

Во втором приближении горизонтальная полка делилась на 4 участка. Для данного примера во втором приближении получено:

$$\sigma_2 = -2,8\sigma_1, \quad \sigma_{23} = 2,54\sigma_1 - 0,56\sigma_3,$$

$$\sigma_1 = - \left(93 \frac{\text{sh } \alpha_1 z}{\text{ch } \alpha_1 L} + 20 \frac{\text{sh } \alpha_2 z}{\text{ch } \alpha_2 L} \right) \frac{P}{I_x},$$

$$\sigma_3 = - \left(320 \frac{\text{sh } \alpha_1 z}{\text{ch } \alpha_1 L} + 148 \frac{\text{sh } \alpha_2 z}{\text{ch } \alpha_2 L} \right) \frac{P}{I_x},$$

где $\alpha_1 = 0,0334$, $\alpha_2 = 0,069$.

На рис. 5 приведена суммарная эпюра напряжений ($\sigma = \sigma_{\text{осн.}} + \sigma_{\text{дон}}$) в заделке. Для сравнения нанесены результаты по работе [5]. Данные расчета этого примера находятся в хорошем соответствии с экспериментом подобных оболочек.

II. Для оболочек второго типа система дифференциальных уравнений Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_k} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_k'} \right) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m-2)$$

приводит к следующей системе линейных, однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma_k'} \Phi_1 \right) + \frac{F_{k \text{ мп.}}}{3} \frac{\partial}{\partial \sigma_k} \Phi_2 = 0. \quad (20)$$

$$(k = 1, 2, \dots, m-2)$$

Здесь

$$\Phi_1 = \sum_0^{d_k} M_{\text{дон}}^2 ds; \quad \Phi_2 = \sum (\sigma_{k-1}^2 + \sigma_{k-1} \sigma_k + \sigma_k^2). \quad (21)$$

Суммирование распространяется по всему контуру поперечного сечения.

Корни характеристического уравнения системы (20) имеют следующий вид:

$$r_p = \pm \alpha_p (1 \pm i),$$

где α_p — коэффициенты, зависящие только от геометрических размеров сечения и количества избранных точек, вычисляются для каждого конкретного вида нагрузки и формы поперечного сечения.

Общее решение для длинных (полубесконечных) оболочек можно представить как

$$\sigma_k = \sum_{p=1}^t e^{-\alpha_p z} (A_{kp} \sin \alpha_p z + B_{kp} \cos \alpha_p z). \quad (22)$$

$$(k = 1, 2, \dots, m-2)$$

Связь между постоянными A_{kp} , B_{kp} ($k = 1, 2, \dots, m-2$) для каждого корня устанавливается системой (20), откуда могут быть определены только отношения A_{kp} , B_{kp} , т. е.

$$A_{kp} = a_{kp} A_p,$$

$$B_{kp} = b_{kp} B_p.$$

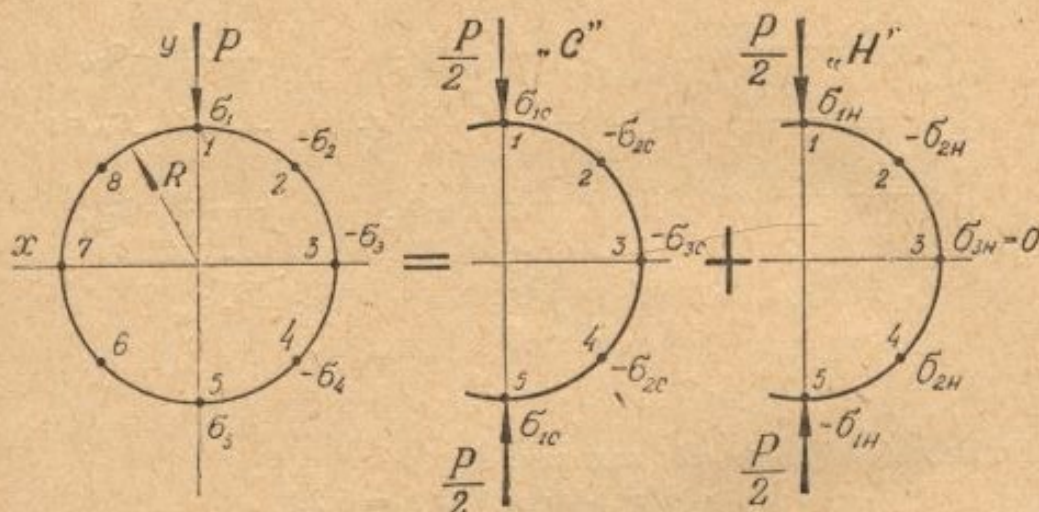


Рис. 6.

Тогда система решений (22) будет содержать для каждого корня две постоянные интегрирования A_p и B_p . Для их определения используем граничные условия.

На свободном конце ($z = 0$)

$$\sigma_k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, m-2). \quad (23)$$

Следовательно, $B_p = 0$ ($p = 1, 2, \dots, t$), а постоянные A_p определяются из естественных граничных условий вариационной задачи:

$$\frac{\partial F}{\partial (\sigma_k^0)_{z=0}} = \frac{\partial \mathcal{E}_{ш.о.}}{\partial (\sigma_k^0)_{z=0}} \quad (k = 1, 2, \dots, m-2).$$

При симметрии внешней нагрузки относительно $y-y$ и наличии двух осей симметрии поперечного сечения система уравнений (20) распадается на независимые друг от друга группы дифференциальных уравнений. Для этого напряженное состояние оболочки, симметричное относительно $y-y$, нужно представить в виде суммы двух ортогональных состояний (рис. 6):

- 1) состояния C , симметричного относительно горизонтального диаметра $x-x$,
- 2) состояния H , кососимметричного относительно $x-x$.

При этом количество неизвестных для состояния C будет $n-1$ (одно неизвестное исключается первым уравнением (2), для состояния H — $n-2$ (одно неизвестное исключается вторым уравнением (2); напряжение в точке на оси $x-x$ равно нулю).

Здесь n — количество избранных точек на четверти периметра контура сечения.

а) Приведем только основные соотношения, полученные при расчете круговой оболочки данным методом (рис. 6). Половина контура разбивалась на четыре равных участка. Из условий (2) имеем:

$$2\sigma_{2C} = \sigma_{1C} - \sigma_{3C}, \quad \sigma_{2H} = 0,707\sigma_{1H},$$

где σ_{1C} , σ_{2C} , σ_{3C} , σ_{1H} , σ_{2H} — значение напряжений в точках 1, 2, 3 для симметричного и кососимметричного состояния соответственно. Аналогичные обозначения приняты для всех величин.

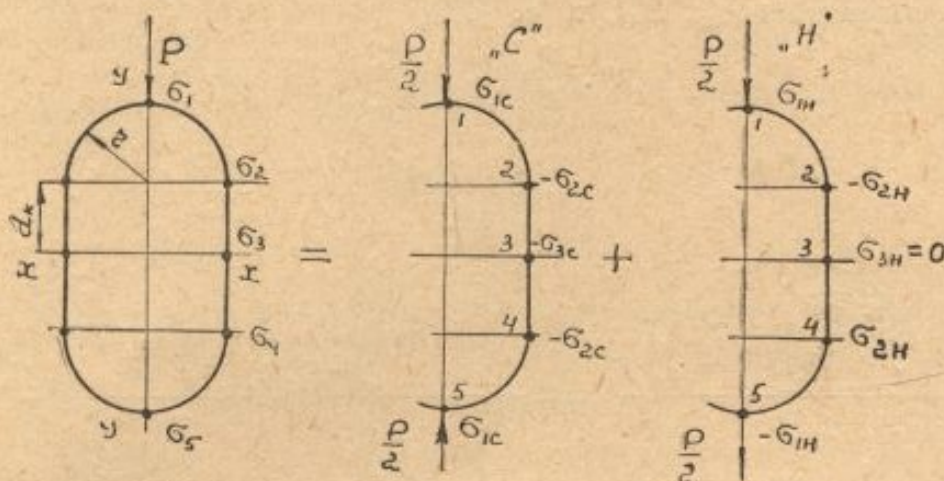


Рис. 7.

По второй формуле (21) находим:

$$\Phi_{2C} = 4(\sigma_{1C}^2 + \sigma_{3C}^2), \quad \Phi_{2H} = 5,2\sigma_{1H}^2.$$

Найдя значение изгибающих моментов по каждому участку (1—2 и 2—3) от перепада касательных усилий (5) для статически неопределимого кольца-шпангоута, можно определить:

$$\Phi_{1C} = 48 \cdot 10^{-4} R^6 \delta^2 d_k (\sigma_{1C} + \sigma_{3C})^2,$$

$$\Phi_{1H} = 3,68 \cdot 10^{-4} R^6 \delta^2 d_k \sigma_{1C}^2.$$

Система (20) получена в виде двух независимых дифференциальных уравнений:

$$2\sigma_{1C}^{IV} + \lambda\sigma_{1C} = 0,$$

$$\sigma_{1H}^{IV} + 17\lambda\sigma_{1H} = 0,$$

где

$$\sigma_{1C} = \sigma_{3C}, \quad \lambda = \frac{10^4}{36} \frac{l_{\text{шп}}}{R^6}.$$

При выполнении граничных условий (23) в окончательном виде получено:

$$\sigma_{1C} = -1,33 \frac{e^{\alpha_C z} \sin \alpha_C z}{\alpha_C R^3 \left(1 + 2\alpha_C \frac{l_{\text{ш.о.}}}{l_{\text{шп.}}}\right)} P,$$

$$\sigma_{1H} = -2,6 \frac{e^{-\alpha_H z} \sin \alpha_H z}{\alpha_H R^3 \left(1 + 2\alpha_H \frac{l_{\text{ш.о.}}}{l_{\text{шп.}}}\right)} P,$$

где

$$\alpha_C^2 = \frac{6}{R^3} \sqrt{\frac{l_{\text{шп.}}}{b}}, \quad \alpha_H^2 = \frac{36}{R^3} \sqrt{\frac{l_{\text{шп.}}}{b}},$$

$l_{\text{ш.о.}}$ — момент инерции сечения концевой шпангоута.

Для гладкой оболочки $\delta = \delta_0$ подсчитано суммарное дополнительное напряжение по образующей I ($\sigma_{1\text{доп}} = \sigma_{1C} + \sigma_{1H}$) при следующих данных:

$$\mu = \frac{\delta_0}{R} = \frac{1}{100}, \quad \frac{J_{\text{ш. о.}}}{i_{\text{шп}}} = 10R. \quad \text{Обозначено } \varepsilon = \frac{z}{R}.$$

Результаты представлены на рис. 8. Здесь же пунктиром нанесены суммарные напряжения по результатам работы [2] при 6 членах ряда (от $n = 2$ до $n = 7$).

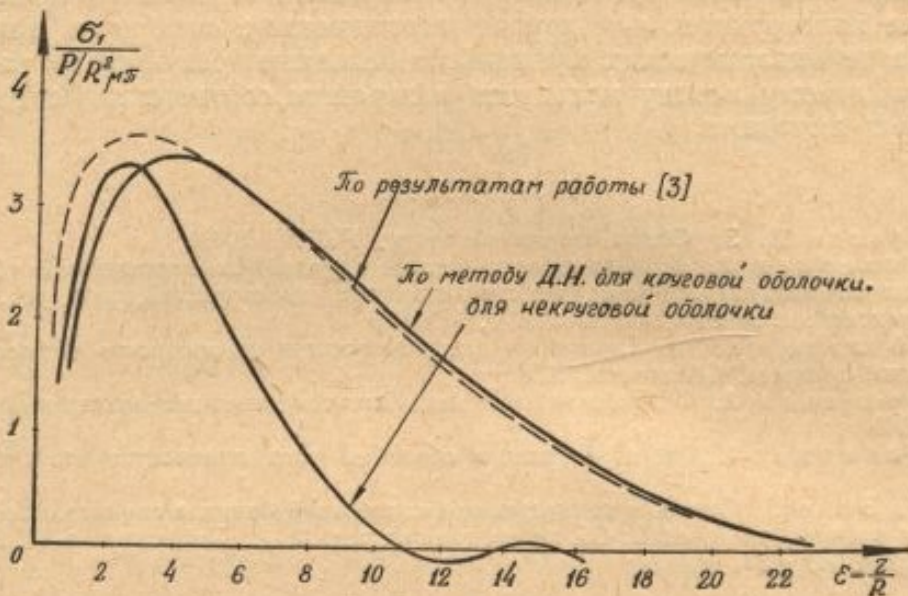


Рис. 8.

б) Аналогичный расчет был произведен для оболочки, поперечное сечение которой представлено на рис. 7.

Из условий (2) следует:

$$2\sigma_{2C} = \sigma_{1C} - \sigma_{3C}, \quad \sigma_{2H} = 0,7773\sigma_{1H}.$$

Система (20) свелась к следующим уравнениям:

$$81\sigma_{1C}^{IV} + \lambda\sigma_{1C} = 0,$$

$$17,5\sigma_{1H}^{IV} + \lambda\sigma_{1H} = 0.$$

Здесь $\sigma_{1C} = 3,5\sigma_{3C}$, $\lambda = \frac{10^4}{3} \frac{i_{\text{шп}}}{r^2 \delta}$.

При выполнении граничных условий (23) получено:

$$\sigma_{1C} = -1,02 \frac{e^{-\alpha_C z} \sin \alpha_C z}{\alpha_C r^2 \delta \left(1 + 2\alpha_C \frac{I_{\text{ш. о.}}}{i_{\text{шп}}}\right)} P,$$

$$\sigma_{1H} = -1,4 \frac{e^{-\alpha_H z} \sin \alpha_H z}{\alpha_H r^2 \delta \left(1 + 2\alpha_H \frac{I_{\text{ш. о.}}}{i_{\text{шп}}}\right)} P,$$

где

$$\alpha_C^2 = \frac{3,1}{r^2} \sqrt{\frac{i_{\text{шп}}}{\delta}}; \quad \alpha_H^2 = \frac{6,9}{r^2} \sqrt{\frac{i_{\text{шп}}}{\delta}}.$$

На рис. 8 представлено изменение напряжений вдоль образующей I при тех же данных оболочки, что и для круговой. Периметры поперечных сечений в обоих случаях принимались равными.

ВЫВОДЫ

Изложенный метод является сравнительно простым инженерным методом определения дополнительного напряженного состояния оболочек. Аппроксимация дополнительных напряжений с помощью дискретных неизвестных позволяет получить общий метод расчета оболочек различных форм с открытым и закрытым поперечными сечениями. По своей идее метод дискретных неизвестных более точнее (при определенном выборе количества неизвестных) отображает истинное напряженное состояние конструкции, чем другие вариационные методы с неизвестными в виде аналитических функций. Численные результаты расчетов по предлагаемому методу находятся в хорошем соответствии с другими известными методами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Общая теория оболочек, ГТТИ, 1949.
2. Иммерман А. Г. Расчет ортотропной круглой цилиндрической оболочки на поперечную нагрузку. Расчет пространственных конструкций, под ред. проф. А. А. Уманского, Машстройиздат, вып. 3, М. 1955.
3. Образцов И. Ф. Некоторые вопросы расчета на прочность тонкостенных конструкций самолета, Оборонгиз, 1957.
4. Феофанов А. Ф. Строительная механика тонкостенных конструкций, Оборонгиз, 1959.
5. Климов В. И. Расчет открытых оболочек типа авиаконструкций, Оборонгиз, 1957.
6. Г. Эбнер, Кручение тонкостенной коробчатой балки в случае несвободного искажения поперечных сечений. Сб. переводов под ред. А. А. Уманского и П. М. Знаменского, ЦАГИ, 1937.