УДК 539.3:620.1

Математическая модель и методика экспериментальной проверки динамических процессов в типовом оборудовании

Кривцов В.С., канд.техн.наук, Нарыжный А.Г.,
Сапрыкин В.Н., канд.техн.наук, Шехов А.В.

Типовая конструкция технологической пушки представляет собой самоуравновешенную пространственную раму на многослойном резино-металлическом амортизаторе, предназначенном для снижения сейсмического воздействия пушки. Рама образована двумя-тремя переменной толщины горизонтальными плитами сложной в плане формы и двумя-четырьмя цилиндрическими вертикальными колоннами. Между собой колонны и плиты соединены с помощью гаек, навинчивающихся на резьбу на концах колонн. К верхней плите с помощью фланцевого соединения крепится ствол пушки. Между верхней и средней плитой, перемещаемой в вертикальном направлении с помощью домкрата, располагаются переходник и технологическая оснастка, предназначенная для выполнения операции технологической обработки над заготовкой. В состав конструкции включены также демпферы, предназначенные для поглощения и рассеяния избыточной механической энергии при выстреле [1].

Результатом выстрела являются колебания конструкции пушки, затухающие за счет излучения энергии в окружающее пространство и в основание, рассеяние ее демпферами, амортизатором, а также потерями ее при трении сопрягаемых поверхностей в узлах связи элементов конструкции [2].

В работах, посвященных анализу колебаний несущей конструкции пушек, предполагается, что связи между плитами и колоннами абсолютно жесткие, колонны и плиты работают только на изгиб, плиты прямоугольной в плане формы, постоянной толщины и без отверстий. Некоторые авторы считают допустимым упростить анализ явления настолько, что пренебрегают объемным характером колебаний [3].

В механике конструкций используются различные математические модели конструктивных элементов типа колонн и плит, достаточно подробно отражающих особенности формы и условий нагружения [4], но в литературе отсутствуют исследования свойств и характеристик узлов резьбовых соединений в динамике, а также описания математических моделей таких узлов, пригодные для использования в расчете колебаний.

В литературе известен подход к построению модели связи (резьбового соединения), учитывающего трение [5], на основе решения задачи контакта двух тел, однако технические трудности решения задачи требуют значительных упрощений и идеализации механизма взаимодействия тел и, следовательно, самой модели связи; подобный подход к построению модели и сама модель связи не пригодны для практического применения при анализе динамики конструкций из-за больших требований к ресурсам ЭВМ.

Ниже на примере соединения плиты и колонны (типовых элементов несущей конструкции установки для импульсной обработки развивается другой подход к построению математической модели связи, основанный на рассмотрении ее как элемента типа двухполюсника, обладающего собственными свойствами упругого и вязкого сопротивления движению, а также инерцией. Этому элементу не ставится в соответствие телесный элемент реальной конструкции; свойства такого элемента проявляются в конструкции и поэтому могут наблюдаться и исследоваться в составе конструкции. С этим (фиктивным) элементом связываются свойства конструкции, обусловленные взаимодействием реальных конструктивных элементов.

Рассмотрим пространственную конструкцию, включающую упругие элементы, соединенные попарно в ряде узлов. В элементах конструкции устанавливается упругое динамическое равновесие, описываемое уравнениями движения в перемещениях [6]

$$\mu_i \nabla^2 U + (\lambda_i + \mu_i)\Delta U + X = \rho_i \ddot{U} \qquad (1)$$

где i – номер элемента;

λ_i, μ_i – коэффициенты Ляме материала элемента;

U – вектор перемещений;

X – вектор внешних объемных сил;

ρ_i – плотность материала элемента.

На свободных от взаимодействия поверхностях элементов конструкции заданы либо перемещения, либо напряжения

$$U = f \ , \ \sigma_n = g \qquad (2)$$

где f – заданные (возможно, нулевые) перемещения точек поверхности элемента;

g – заданные значения давлений на поверхности элемента как функции времени;

σ_n – нормальная компонента тензора напряжений.

Соотношения между напряжениями и деформациями (закон Гука) имеют вид

$$\sigma_{ij} = \lambda \vartheta \delta_i^j + 2\mu\varepsilon_{ij} \qquad (3)$$

где ϑ – объемная деформация;

$\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ – компоненты тензоров деформаций и напряжений;

δ_i^j – дельта Кронекера.

Компоненты тензора деформаций связаны с вектором перемещений

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \qquad (4)$$

где x_i – координаты трехмерной глобальной системы координат.

На поверхностях элементов, входящих во взаимодействие, конкретный вид определяющих уравнений, связывающих переменные состояния, неизвестен, что и составляет проблему расчета механического состояния подобных конструкций. В литературе [7] есть замечание, что резьбовые соединения в динамике ведут себя подобно вязкоупругим элементам.

Известные формулировки задач механики конструкций с сухим и вязким трением приводят к необходимости решения не дифференциальных уравнений,а дифференциальных неравенств [8].Высокая трудоемкость решения задач с такими формулировками на ЭВМ является причиной малого числа решений и неизученности рассматриваемой проблемы.

Учитывая,что подробный анализ НДС в зоне контакта не первоочередная,а следующая за исследованием НДС конструкции в целом, задача,сформулируем систему определяющих уравнений так, чтобы избежать названные трудности.

Предположим ,что зона контакта деталей в соединении неизменна и существует некоторая функция ,описывающая состояние на поверхности контакта деталей узла

$$\Phi_j(u'-u'', \dot{u}'-\dot{u}'', \sigma, \varkappa, t) = 0, \tag{5}$$

где j - номер узла связи;
$\varkappa$ - параметры взаимодействия;
t - время.

Верхние индексы "′","″" отмечают принадлежность переменной к контактирующим в узле смежным деталям.На состояние узла оказывают влияние не абсолютные значения перемещений u',u'' и скоростей смежных поверхностей $\dot{u}'$, $\dot{u}''$,а их разности ,имеющие смысл относительных смещений и скоростей.Сухое трение связано с нормальной компонентой тензора напряжений,оба вида трения,сухое и вязкое,проявляют себя образованием(ненулевой) касательной компоненты тензора напряжений на границе;в целом тензор напряжений непрерывен при переходе через границу раздела смежных деталей.

Пусть уравнение (5) разрешимо относительно напряжений

$$\sigma - G_j(u'-u'', \dot{u}'-\dot{u}'', \varkappa, t) = 0. \tag{6}$$

Очевидно,при отсутствии относительных смещений и их скоростей недиагональные элементы матрицы-функции должны быть равны нулю,поскольку касательные напряжения отсутствуют.

В предположении малости относительных смещений и скоростей линеаризуем последнее уравнение,разлагая его по степеням $(u'-u'')$ и $(\dot{u}'-\dot{u}'')$ и пренебрегая высшими,чем первая,степенями разложения

$$\sigma - c\cdot(u'-u'') - d\cdot(\dot{u}'-\dot{u}'') - \sigma_0 = 0 \tag{7}$$

где c - жесткость контакта;
d - вязкость контакта;
σ_0 - нормальное давление в контакте.

Пусть для определенности конструкция в начальный момент времени имеет заданную конфигурацию и известное распределение перемещений и их скоростей

$$u|_{t=0} = f, \quad \dot{u}|_{t=0} = g, \tag{8}$$

где f – начальные перемещения ;

g – начальные скорости.

С формальной точки зрения систему уравнений(1),(2),(7),(8)можно рассматривать как формулировку задачи динамики конструкции с узлами связи,испытывающими сухое и вязкое трение. Выполним формальную дискретизацию отмеченной системы уравнений по методу конечных элементов в пространстве перемещений [9].Для этого расчленим элементы конструкции на конечные элементы (КЭ) ,внутри каждого из которых введем параметрическую аппроксимацию искомого поля перемещений

$$U = [N]\{\delta\} \tag{9}$$

где $[N]$ – матрица функций формы,рассматриваемых как функции координат;

$\{\delta\}$ – вектор узловых перемещений КЭ.

Сформулируем систему уравнений для определения вектора узловых смещений ансамбляКЭ,используя метод Галеркина.Для этого подставим аппроксимацию(9) в уравнения (1),(2) и (7) и проинтегрируем полученные выражения по объему с весовыми функциями,в качестве которых используем ранее введенные функции формы.После выполнения известных преобразований получим для каждого упругого КЭ матричное уравнение

$$[K_e]\{\delta_e\} + [M_e]\{\ddot{\delta}_e\} + \{F_e\} = \{R_e\}, \tag{10}$$

где e – нижний индекс,номер КЭ;

$[K_e]$– матрица жесткости и матрица масс КЭ;

$\{F_e\}$– вектор узловых внешних сил КЭ;

$\{R_e\}$– вектор узловых реактивных сил со стороны ансамбля КЭ.

Для каждого вязко-упругого демпфера и КЭ с условиями на границе контакта (7) получим матричное уравнение вида

$$[K_e]\{\delta_e\} + [M_e]\{\ddot{\delta}_e\} + [C_e]\{\dot{\delta}_e\} + \{F_e\} = \{R_e\}, \tag{11}$$

где $[C_e]$– матрица демпфирования.

Рассмотрим подмножество КЭ,входящих в соединение, каждый из которых принадлежит отдельному конструктивному элементу. Используя процедуру конденсации степеней свободы узлов,лежащих на границе раздела деталей,образуем из них суперэлемент с узлами,расположенными лишь в теле конструктивных элементов.Внутренние степени свободы ,соответствующие ранее введеным относительным перемещениям и их скоростям исключены из множества неизвестных.Определяющее уравнение суперэлемента имеет канонический вид

$$[K_{se}]\{\delta_{se}\} + [C_{se}]\{\dot{\delta}_{se}\} + [M_{se}]\{\ddot{\delta}_{se}\} + \{F_{se}\} = \{R_{se}\}, \tag{12}$$

где $\{\delta_{se}\},\{\dot{\delta}_{se}\},\{\ddot{\delta}_{se}\}$ -узловые перемещения суперэлемента,их скорости и ускорения ;

$[K_{se}],[C_{se}],[M_{se}],\{F_{se}\},\{R_{se}\}$ - матрицы жесткости,демпфирования и масс,векторы узловых внешних и реактивных сил суперэлемента.

Отметим ,что при отсутствии приложения внешних сил к тем фрагментам конструктивных элементов,которые входят в суперэлемент,соответствующий вектор внешних узловых нагрузок также равен нулю.

Уравнение (12) наряду с уравнениями для отдельных КЭ (10) и (11) объединяются с использованием обычной процедуры в ситему уравнений ансамбля КЭ

$$[K]\{\delta\}+[C]\{\dot{\delta}\}+[M]\{\ddot{\delta}\}+\{F\}=0, \qquad (13)$$

где $\{\delta\},\{\dot{\delta}\},\{\ddot{\delta}\}$ - векторы узловых перемещений ансамбля КЭ,их скоростей и ускорений ;

$[K],[C],[M],[F]$ - матрицы жесткости ,демпфирования и масс ансамбля КЭ,а так же вектор узловых нагрузок ансамбля КЭ.

Уравнение (13) решается совместно с начальными условиями (8).

При сделанных предположениях относительно механизма взаимодействия конструктивных элементов в узле связи и функций,отражающих эту связь ,следует возможность моделирования узла в рамках конечноэлементного подхода ,и эта модель узла должна иметь традиционную структуру конечного элемента в динамике.При таком подходе к формулировке и решению задачи динамики конструкции проблема состоит в определении матриц жесткости,демпфирования и масс, а также вектора узловых нагрузок суперэлемента, образованного на месте узла с трением.

Описанные процедуры и вывод о возможности существования специального суперэлемента-модели узла с трением в динамике без ограничений применимы к случаю,когда НДС конструкции описано не в терминах тензоров напряжений и деформаций,а в терминах векторов обобщенных усилий и обобщенных деформаций, принятых в моделях НДС пластин и стержней.Другими словами описанный подход позволяет применить конечноэлементную модель для расчета колебаний конструкции технологической пушки, включающей элементы типа пластин,для которых используется одноименная модель НДС, элементы типа колонн,для которых используются модели НДС стержней, и узлы связи , для которых используются специальные конечные элементы (с трением).

Использование выше приема конденсации узловых степеней свободы было основано на предположении существования функции состояния,а поскольку вид функций неизвестен ,реально этот прием определения коэффициентов матриц жесткости,демпфирования и масс неприменим.К тому же его использование не желательно потому,что он неизбежно внес бы дополнительное возмущение в решение из-за известных погрешностей дискретизации [9] на границе.

Ниже разработана расчетно-экспериментальная процедура определения коэффициентов матриц жесткости,демпфирования и масс с использованием физической модели узла связи. Она основана на возможности вычисления коэффициентов матриц ,исходя из значений параметров НДС,измеренных экспериментально.В статическом случае определяющее уравнение (12)приводится к простейшему виду

$$[K]\{\delta\}+\{F\}=0, \qquad (14)$$

Создавая достаточное количество независимых НДС в узле можно вычислить значения соответствующих коэффициентов матрицы жесткости суперэлемента. Затем, создавая достаточное количество НДС с постоянными скоростями перемещений, полагая известными значения коэффициентов матрицы жесткости, а также учитывая вид определяющего уравнения в этом случае

$$[K]\{\delta\}+[C]\{\dot{\delta}\}+\{F\}=0, \qquad (15)$$

определим значения коэффициентов матрицы демпфирования. Наконец, регистрируя в общем случае ускорения и полагая известными значения матриц жесткости и демпфирования, определим значения коэффициентов матрицы масс.

При определении коэффициентов учитывается симметрия матриц жесткости, демпфирования и масс.

Доказательство пригодности такой математической структуры уравнения состояния связи, равно как и определение значения коэффициентов соответствующих матриц превосходит возможности дедуктивного подхода, но может быть выполнено экспериментально-инструментальными методами на физической модели и натурном изделии.

При физическом моделировании узла соединения плиты и колонны решаются следующие основные задачи :

- построение математической модели механического поведения элементов физической модели на основе алгоритмов идентификации, отобранных при проведении вычислительных экспериментов;
- исследование влияния на параметры построенной математической модели масштабного фактора и усилия затяжки резьбового соединения;
- корректировка алгоритмов идентификации.

Физическое моделирование узла соединения плиты и колонны проводится на специальной экспериментальной установке. В состав экспериментальной установки входят собственно физическая модель, узлы ее крепления и нагружения. В качестве физической модели используется конструкция Г-образного соединения тонкой прямоугольной пластинки и прямолинейнрго стержня круглого поперечного сечения. Их соединение выполняется подобно реальному.

При выполнении физического моделирования исследуемого узла соединения необходимо реализовать в его деталях такое НДС, характеристики которого, с одной стороны, могут быть легко восстановлены по результатам измерений. С другой стороны, они легко могут быть рассчитаны на основе математических моделей НДС соответственно стержня и пластинки с учетом граничных и начальных условий, имевших место при испытании физической модели.

Основная цель экспериментальных исследований реального узла соединения плиты и колонны - получение данных, необходимых для идентификации параметров математической модели связи плиты и колонны, которая используется для построения расчетной модели НДС конструкции пресс-пушки.

Общая схема натурных экспериментов совпадает с аналогичной схемой физического моделирования.

При реализации расчетно-экспериментального подхода, разработанного для определения параметров математической модели узла соединения плиты и колонны, сформулированы основные принципы методики обработки результатов экспериментов.

1.Все процедуры обработки подразделяются на две группы:процедуры обработки экспериментальных данных физического моделирования;процедуры обработки данных натурных экспериментов.

2.Обработка экспериментальных данных основывается на методах теории вероятностей и математической статистики.

3.Экспериментальные данные формируются из результатов статических и динамических измерений.

4.Результат измерения рассматривается как случайный дискретный временной ряд.

5.При обработке экспериментальных данных учитываются погрешности их получения.

6.Весь процесс обработки разбивается на первичную обработку и полную. При первичной обработке определяются "истинные" отсчеты измеренных величин по показаниям соответствующих датчиков. Полная обработка выполняется для подготовки данных, которые будут использованы при идентификации.

Все процедуры обработки реализуются в соответствующем программном обеспечении.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Мацукин Ю.Г.,Вороной А.И. Расчет лафетов пресс-пушек на динамические нагрузки / Импульсная обработка металлов давлением.- Харьков:Вища школа,1977, вып.5
2. Мельник А.П. Разработка процессов взрывной штамповки и оборудования для получения крупногабаритных деталей метанием передающей среды.Диссертация канд.техн. наук. - Харьков, 1989. -220 с.
3. Гранин В.Ю. Разработка методик расчета и конструирования универсальных прессов для гидровзрывной штамповки. Диссертация канд.техн.наук. - Харьков, 1983, 225с.
4. Доннелл Л.Г. Балки,пластины,оболочки.-М.: Наука, 1982. -568 с.
5. Смирнов М.Д.,Приданов И.Д. Исследование распределения напряжений в резьбовой паре"болт-гайка" из различных материалов / Межвузовский сборник печатных трудов. Куйбышевский архитектурно-строительный институт.-1990,N13.-с.130-134.
6. Тимошенко С.П.,Гудьер Дж.Теория упругости.-М.: Наука, 1975.- 576 с.
7. Bohlen S. Zur Berechnung und Messung mechanischer Schwingungen in Structuren mit nichtlinearen Fugestellenverhalten.//Forstchr.Ber.VDI,R-1987.-N 91.-s.154.
8. Дюво Г.,Лионс Ж. Неравенства в механике и физике.-М.:Мир,1982.-324с.
9. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике.-М.: Мир, 1975. -544 с.