При вынужденных моногармонических колебаниях, и нагрузке вида $q^*(t,x,y)=e^{\lambda t}q(x,y)$, подстановкой $w^*(t,x,y)=e^{\lambda t}w(x,y)$ задача сводится к прежней с известным, вообще комплексным значением λ. Расчет вектора состояния, т.е. перемещений, сил, моментов и напряжений в произвольной точке области, выполняется обычным путем на основании известных формул.

УДК 539.3

П.Д. Доценко – д-р техн. наук, О.В. Дзюбенко

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММ РАСЧЕТА СВОБОДНЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Многие несущие конструкции ЛА, которые можно классифицировать как пространственные тонкостенные конструкции (ТК), в процессе эксплуатации подвергаются интенсивному воздействию переменных нагрузок, передающихся как непосредственно, так и через газовоздушную среду. Расчеты динамических параметров таких конструкций позволяют на стадии проектирования оценить динамическую прочность, находить оптимальные варианты ТК, что способствует сокращению времени и затрат на их доводку. Построение алгоритмов и программ таких расчетов представляет трудоемкую и нетривиальную задачу.

Рассматриваются пространственные ТК, состоящие из двумерных тонкостенных конструкций, расположенных в трех взаимоперпендикулярных плоскостях и жестко соединенных между собой. Каждая двумерная ТК представляет собой анизотропную многослойную пластину, подкрепленную ребрами жесткости, имеющую участки с различной жесткостью, вырезы и включения (сконцентрированные массы, демпфирующие элементы).

Решаются задачи собственных и вынужденных колебаний пространственной ТК. Для решения задач используется метод конечных элементов (МКЭ) в классической постановке. Используется полученное из принципа виртуальной работы матричное уравнение движения.

Одним из основных моментов алгоритмизации решения задач собственных и вынужденных колебаний пространственной ТК является формирование глобальных матриц жесткости, масс и демпфирования. Построенный алгоритм имеет следующие особенности:

симметричные и ленточные глобальные матрицы, строятся в виде верхней полуленты, чем достигается значительная экономия машинной памяти;

используются разные системы нумерации узловых неизвестных для плоской и пространственной конструкции, что позволяет представлять входные данные в системах нумерации плоских конструкций, тем самым упрощается подготовка данных;

в местах стыковки плоских ТК проводится автоматический контроль общих для пересекающихся плоскостей узловых неизвестных, что позволяет использовать разные конечные элементы для плоскостей.

Для решения задачи собственных колебаний необходимо разрешить полную проблему собственных значений, т.е. найти числа 1 (собственные числа) и векторы {q} (собственные векторы), удовлетворяющие матричному уравнению ([K]-1[M]){q}=0. При построении алгоритма поиска собственных значений используется метод деления спектра, базирующийся на следствии теоремы Сильвестра об инерции. Эта теорема устанавливает инвариантность числа отрицательных собственных значений при конгруэнтных преобразованиях любой матрицы, допускающей треугольное разложение при условии положительной определенности матрицы [M]. Методом квадратного корня матрица [K]-1[M] разлагается на произведение нижней треугольной, сопряженной к ней верхней треугольной и диагональной матриц, причем диагональные элементы верхней и нижней треугольных матриц строго положительные, а элементы диагональной матрицы есть 1 и -1. Количество отрицательных элементов диагональной матрицы будет соответствовать количеству собственных значений исходной матрицы, каждое из которых меньше или равно некоторому числу. Подбором этого числа с последующим треугольным разложением определяется верхняя и нижняя граница собственных значений, подлежащих определению, на действительной оси. Последующая локализация собственных значений на интервале размещения производятся методом половинного деления и простым или удвоенным методом секущих. Для вычисления собственных векторов при известных собственных значениях используется обобщенный метод обратных итераций со сдвигом. При этом свободно выбирается стартовый вектор, например единичный. На каждой операции необходимо решить систему линейных уравнений с последующим нормированием. Последовательность полученных векторов сходится к собственному вектору со скоростью геометрической прогрессии.

По описанному алгоритму построена программа решения полной проблемы собственных значений для пары действительных симметричных положительно определенных ленточных матриц. Используется компактная форма хранения матриц. Программа находит все или несколько собственных значений.

Для пространственной ТК построен алгоритм решения задачи вынужденных колебаний под действием нагрузки: периодической, гормонической, заданной в виде произвольной функции времени. Нагрузки могут быть приложены непосредственно к конструкции либо заданы кинематически, от подвижных опор.

Задача вынужденных колебаний для гармонической нагрузки решается способом разложения по собственным формам колебаний. С использованием взаимной ортогональности собственных векторов после превращений основное матричное уравнение движения ТК распадается на ряд независимых уравнений движения системы с 1 ст.св., коэффициенты которых определяются через вычисленные собственные векторы ТК. Такие уравнения решаются для всех указанных видов внешней нагрузки.

Нагрузки, которые описываются периодической функцией времени, разлагаются в ряд Фурье, для каждой компоненты ряда применяется алгоритм решения задачи вынужденных колебаний при гармонической нагрузке, в результате чего получаются спектральные характеристики.

Для нагрузок, заданных в виде произвольной функции времени, задача решаются также способом разложения по собственным формам колебаний с использованием интеграла Дюамеля. Решение задачи в этом случае получается в виде функции перемещения от времени в заданной точке.

Для нагрузок, возникающих от гармонического движения опор, рассмотрено два случая: заданы перемещения и скорости и заданы ускорения подвижных опор. В первом случае нагрузка от подвижной опоры сводится к эквивалентным усилиям, приложенным к соседним с опорой узлам. Во втором случае, когда все опоры подвижны, усилия имеют вид вектора инерционных сил, приложенных в узлах. Когда задано ускорение некоторых опор, а другие остаются неподвижными, ищется решение задачи относительно некоторой поверхности, последняя находится решением задачи статики. Таким образом, алгоритм решения задачи с подвижными опорами сводится к алгоритму решения задачи с гармонической нагрузкой.

По описанным алгоритмам построены и отлажены программные модули: обработки входных данных, формирования глобальных матриц и узловых векторов эквивалентных внешних усилий, формирования нагрузки от подвижных опор, решения задачи вынужденных колебаний.