

РАСЧЕТ НАГРУЗОЧНОЙ СПОСОБНОСТИ ВОЛНОВОЙ ПЕРЕДАЧИ  
С ГИДРОСТАТИЧЕСКИМ ГЕНЕРАТОРОМ ВОЛН

Волновая зубчатая передача (ВЗП) с гидростатическим генератором волн (ГСГ) в связи с ее высокой нагрузочной способностью и быстроходностью является весьма перспективной для приводов авиационно-космической техники. В данной статье изложена математическая модель такой передачи.

Приняты следующие допущения: генератор волн – идеально жесткий и гладкий кулачок, форма профиля которого образована по известному закону; справедливы линейная теория деформирования гибкого колеса и гипотеза неискривляемости образующей; смазка – несжимаемая ньютоновская жидкость; режим течения – изотермический и ламинарный; теплоемкость и плотность смазки считаются постоянными; справедлива плоская картина зацепления.

Расчетная схема гибкого колеса показана на рис. 1. Это тонкая цилиндрическая оболочка, связанная с одной стороны с пластиной, а с другой – с кольцевым стержнем, моделирующим зубчатый венец [1]. Проводим расчет конструкции, считая торцевую пластину жесткой в своей плоскости, но не препятствующей осевому перемещению точек оболочки. Не будем также учитывать жесткости кольцевого бруса при изгибе по направлению нормали к его плоскости и при кручении. Расчет оболочки выполняем на основе полубезмоментной теории и используем гипотезу неискривляемости образующей.

Такая расчетная схема позволяет перейти от пространственной задачи к решению упругой линии кольца. Это уравнение будет справедливо для сечения 1-1:

$$EI_{\text{сист}} \left( \frac{d^5 \bar{W}}{d\varphi^5} + 2 \frac{d^3 \bar{W}}{d\varphi^3} + \frac{d\bar{W}}{d\varphi} \right) = R^4 \left( \bar{q}_i + \frac{d\bar{q}_r}{d\varphi} \right). \quad (1)$$

Для остальных сечений по условию прямолинейности образующей

$$W = F(\varphi) X/L, \quad (2)$$

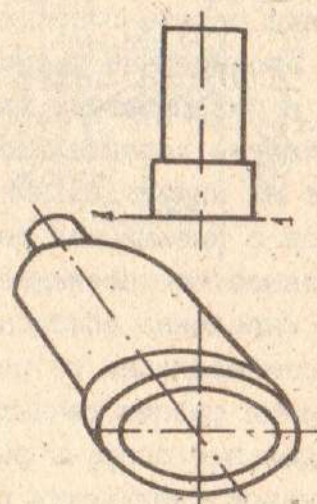


Рис. 1

где  $W$  - деформация гибкого колеса;  $E$  - модуль упругости материала кольца;  $I_{\text{сист}}$  - суммарный момент инерции сечения кольца и оболочки;  $R$  - радиус кривизны кольца;  $\bar{q}_t$  и  $\bar{q}_r$  - суммарные касательная и радиальная нагрузки, действующие на гибкое колесо.

$I_{\text{сист}}$  определяем так:

$$I_{\text{сист}} = I_{\text{кольца}} + I_{\text{обол}}; \quad I_{\text{обол}} = S^3 L_{\text{экв}} / 12 (1 - \mu^2);$$

$$L_{\text{экв}} = \frac{L}{2\lambda} (\text{sh}(2\lambda) - \sin(2\lambda)) / (\text{ch}(2\lambda) - \cos(2\lambda)); \quad (3)$$

$$\lambda = \frac{L}{R} \left( \frac{S}{R} \right)^{1/2} (3/(1 - \mu^2))^{1/4},$$

где  $L$  - длина цилиндрической оболочки;  $S$  - толщина оболочки.

$I_{\text{сист}}$  можно также найти экспериментально. Если оболочку нагрузить двумя радиальными противоположно направленными силами, то форма деформирования будет описываться следующим уравнением [3]:

$$\bar{W} = 2PR^3 \cos(2\varphi) / (9\pi EI_{\text{сист}}). \quad (4)$$

Зная приложенную силу  $P$  и замеряя перемещение точек приложения силы, можно вычислить  $I_{\text{сист}}$ .

Для решения уравнения упругой линии кольца применим метод разложения заданных сил в ряд Фурье [3]. Предположим, что на кольцо действуют несколько взаимно уравновешенных радиальных и касательных сил (рис. 2). На рисунке для примера показаны одна радиальная и одна касательная силы. Записав уравнения равновесия кольца, разложив каждую из заданных сил в ряд Фурье и выполнив преобразования, получим общее решение уравнения (1):

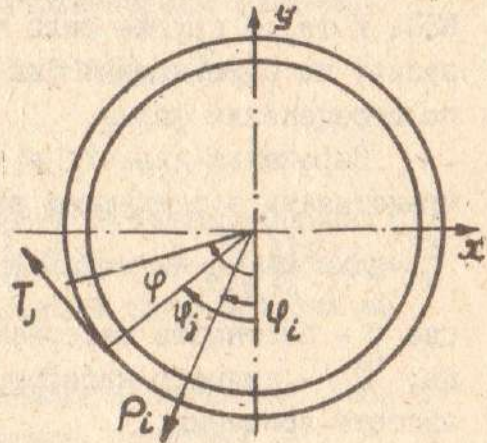


Рис. 2

$$W = B \cos(\varphi) + C \sin(\varphi) +$$

$$+ \sum_{j=1}^m \frac{T_j r^3}{\pi E J_x} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin k(\varphi - \varphi_j)}{k(k^2 - 1)^2} + \sum_{i=1}^n \frac{P_i r^3}{\pi E J_x} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos k(\varphi - \varphi_i)}{(k^2 - 1)^2}, \quad (5)$$

где  $n$  и  $m$  - число радиальных и касательных сил.

Смещения точек кольца в окружном направлении связаны с радиальными перемещениями зависимостью

$$V = - \int W d\varphi + A, \quad (6)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  - постоянные, которые зависят от перемещений коль-

ца как жесткого целого (три степени свободы).

После подстановки под знак интеграла выражения (5) и интегрирования получим выражение для определения смещения точек кольца в окружном направлении:

$$V = A - B \sin(\varphi) + C \cos(\varphi) + \sum_{j=1}^m \frac{T_j r^3}{\pi E J_x} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos k(\varphi - \varphi_j)}{k(k^2 - 1)^2} - \sum_{i=1}^n \frac{P_i r^3}{\pi E J_x} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin k(\varphi - \varphi_i)}{k(k^2 - 1)^2}. \quad (7)$$

В физической модели ВЗП на гибкое колесо действуют силы гидродинамического давления  $P$ , силы гидродинамического трения  $N_{\text{тр}}$ , силы от зацепления  $F$  (нормальные и касательные к профилю зуба), и силы инерции  $f$ , обусловленные перемещениями точек гибкой оболочки. Не зная достаточно точно хотя бы одного из силовых факторов, нельзя решить задачу по определению нагрузочной способности ВЗП. И те, и другие силы зависят от формы гибкого колеса. Поэтому задачу по определению сил нельзя рассматривать отдельно от задачи по определению формы.

Выражения для  $f_r$  и  $f_t$  применительно к нашей оболочке можно представить в следующем виде:

$$f_r = \rho t \omega^2 \int \left( \frac{d^2}{d\varphi^2} (w + D_n/2) \right) dL, \quad f_t = -\rho t \omega^2 \int \left( \frac{d}{d\varphi} (w + D_n/2) \right) dL, \quad (8)$$

где  $\rho$  - плотность материала колеса;  $t$  - приведенная толщина кольца;  $D_n$  - диаметр недеформированного гибкого колеса,  $\omega$  - угловая частота вращения.

Силу гидродинамического трения определим с помощью выражения

$$N_{\text{тр}} = \int_0^L \tau dz, \quad (9)$$

где  $\tau$  - касательные напряжения в смазочной пленке, которые рассчитываются по формуле

$$\tau = R \mu \omega / h + (h / (2R)) \partial p / \partial \varphi, \quad (10)$$

где  $\mu$  - динамическая вязкость смазки,  $h$  - радиальный зазор между трущимися поверхностями.

Так как форма гибкого колеса в передаче с ГСГ все же отличается от расчетной, то для определения сил в зацеплении нельзя использовать методики, базирующиеся на опытных данных по ВЗП с подшипниками качения. В работе применен метод определения сил в зацеплении по возможным перемещениям зубьев [4]:

$$F_n = (J_n - \delta_{\varphi n} - \delta_{F_n}) / \lambda, \quad (11)$$

где  $\lambda$  - коэффициент суммарной податливости системы;  $J_n$  - зазор (с плюсом) или натяг (с минусом);  $\delta_{F_n}$  - контактные перемещения зубьев;  $\delta_{\varphi n}$  - уменьшение зазора за счет закрутки гибкого колеса от момента вращения  $T_1$ ; при этом

$$\delta_{F_n} \approx 1.55 (F_n / E^2 d_1 \sin \alpha)^{1/3}; \quad \delta_{\varphi n} \approx 2L T_1 / (\pi d_1^2 h_0 G), \quad (12)$$

где  $d_1$  и  $h_0$  - диаметр и толщина гибкого колеса;  $G$  - модуль упругости материала при сдвиге.

В формуле (11) неизвестными являются как зазор, так и податливость системы, поэтому данную задачу решаем путем последовательных приближений. Задаваясь формой гибкого колеса, определяем силы, действующие от генератора, и возможные зазоры в зацеплении. Задаваясь податливостью, определяем силы в зацеплении. Все найденные силы подставляем в уравнение статического равновесия системы:

$$T_1 = \sum_1^m \left( (F_{tm} + f_{tm}) \rho_m \cos \mu_m + (F_{rm} + f_{rm}) \rho_m \sin \mu_m + F_{Fm} \right) - \sum_1^k \left( (N_{mp} \rho_k \cos \mu_k + P \rho_k \sin \mu_k) - T_{Pk} \right), \quad (13)$$

где  $\rho_m$  и  $\rho_k$  - радиусы срединной поверхности зубчатого венца;  $\mu_m$  и  $\mu_k$  - углы между нормалью к срединной поверхности и радиусом;  $T_{Fm}$  и  $T_{Pk}$  - моменты, возникающие в результате переноса сил на срединную поверхность зубчатого венца.

Сравниваем полученный статический момент с заданным. Если равенство не выполняется, изменяем податливость системы.

Задача по определению сил, действующих от генератора волн на гибкое колесо, сводится к определению функции распределения давления в масляном слое. С учетом принятых допущений процесс движения жидкости в подшипнике описывается уравнением Рейнольдса в следующей форме [2]:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} \right) + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = \bar{\Omega} \frac{d\bar{h}}{d\varphi}; \quad (14)$$

$$\bar{\Omega} = \frac{6\mu R\omega}{P_0 (\delta d)^2}; \quad \bar{h} = \frac{h}{\delta d}; \quad \bar{z} = \frac{z}{L}; \quad \bar{p} = \frac{p}{P_0}; \quad \lambda = \frac{R}{l},$$

где  $\varphi$  и  $z$  - координаты;  $P_0$  - давление в питающей магистрали;  $\delta d$  - срединный радиальный зазор в сопряжении генератора волн и гибкого колеса;  $l$  - ширина поверхности скольжения генератора.



Это уравнение решаем с применением конечно-разностной схемы методом простых итераций, считая функцию зазора известной. Для определения граничных условий уравнения Рейнольдса необходимо знать давления в питающих камерах. Для поддержания формы деформирования гибкого колеса в зоне большой оси генератора волн располагаются несколько (минимум 3) питающих камер с жиклерным дросселированием на входе. Применение нескольких питающих камер и жиклерного дросселирования необходимо, так как векторы сил в зацеплении и гидродинамических сил изменяют свое направление с изменением оборотов и нагрузки на передачу. Для определения граничных условий уравнения Рейнольдса необходимо решать уравнения балансов расхода жидкости по всем питающим камерам:

$$Q_{\text{ж}} = Q_{\text{щ}}; \quad Q_{\text{щ}} = \sum q_{\varphi} + \sum q_z; \quad (15)$$

$$q_{\varphi} = -\frac{h^3}{12\mu R} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \frac{Uh}{2}; \quad q_z = \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial z},$$

где  $Q$  и  $q$  - расходы смазки;  $U$  - окружная скорость.

Для случая жиклерного дросселирования

$$Q_{\text{др}} = \psi F_{\text{др}} \sqrt{\frac{2P_0(P_0 - P_k)}{\rho}}. \quad (16)$$

Здесь  $\psi$  - коэффициент расхода;  $F_{\text{др}}$  - площадь сечения дросселя;  $P_k$  - давление в питающей камере,  $\rho$  - плотность смазки.

Приведенная выше математическая модель волновой передачи с гидростатическим генератором волн легла в основу программы, реализованной на языке FORTRAN 77.

#### Список литературы

1. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. - М: Машиностроение, 1977. - 487 с.
2. Богданов О.И., Дьяченко С.К. Расчет опор скольжения. - Киев: Техніка, 1966. - 242 с.
3. Бояршинов С.В. Основы строительной механики машин. - М: Машиностроение, 1973. - 455 с.
4. Шувалов С.А. Расчет сил, действующих на звенья волновой передачи // Вестник машиностроения, 1979. № 10. С. 5 - 9.