

## РАСЧЕТ НА ИЗГИБ КОСОЗАЩЕМЛЕННОЙ КОНСОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Ю. П. Петров

Задача об изгибе прямоугольной консольной пластины постоянной толщины решалась многими отечественными [4], [6], [7] и зарубежными [11] учеными.

Значительно меньше уделено внимания прямоугольной консольной пластине переменной жесткости [3], [5] и почти совсем не разработан вопрос об изгибе косозащемленной консольной пластины как постоянной [1], так и переменной [10] толщины.

В настоящей работе рассматривается изгиб упругой косозащемленной пластины, толщина которой линейно изменяется только в направлении оси  $x$  (рис. 1). Решение ведется дискретным методом. Основная цель работы — изложение методики расчета.

В общем виде дискретный метод расчета на изгиб упругих прямоугольных пластин с толщиной (или жесткостью), изменяющейся только в одном направлении, сжато изложен нами в [8]. Системы дифференциальных уравнений дискретного метода, приведенные в [8], были получены с помощью соотношений из [9]. Возможно использование этих соотношений и при решении данной задачи. Однако при этом системы дифференциальных уравнений получаются громоздкими, что влечет за собой усложнение их интегрирования.

Решение значительно упрощается, если воспользоваться для получения систем дифференциальных уравнений дискретного метода «скользящей» интерполяцией [2] полиномом 2-ой степени для функции прогибов  $w(x, y)$  и функции приведенных моментов  $m(x, y)$ .

### § 1. Постановка задачи

Дифференциальное уравнение, описывающее прогибы изогнутой поверхности пластины, толщина которой изменяется в направлении осей  $x$  и  $y$ , имеет вид:

$$\Delta(D\Delta w) - (1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = q(x, y), \quad (1.1)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ,  $w(x, y)$  — функция прогибов пластины,  $q(x, y)$  —

внешняя нагрузка на пластину,  $D(x, y)$  — цилиндрическая жесткость пластины,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

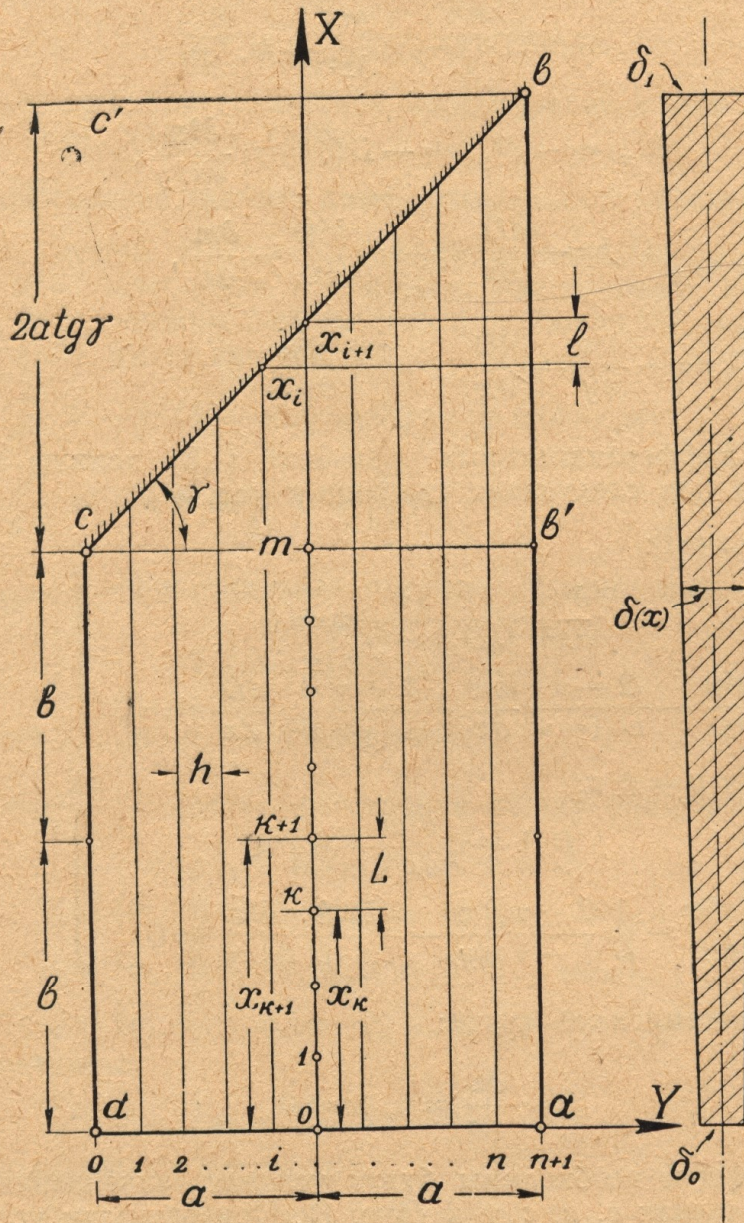
Рассмотрим косозащемленную консольную пластину (рис. 1), толщина которой симметрична относительно срединной плоскости и изменяется линейно только в направлении оси  $x$ . Предположим, что и внешняя нагрузка на пластину есть функция только переменной  $x$ .



Для такой пластины дифференциальное уравнение (1.1) приобретает вид:

$$\Delta(D\Delta w) - (1 - \nu) \frac{d^2 D}{dx^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q(x), \quad (1.2)$$

где  $D = D_0(1 + \rho x)^2$ ,  $D_0 = E\delta_0/12(1 - \nu^2)$ ,  $\rho = \frac{\delta_1 - \delta_0}{\delta_0} \frac{1}{2b + 2a \operatorname{tg} \gamma}$ ,  
 $\delta_0$  и  $\delta_1$  — начальная и конечная толщины пластины,  $\gamma$  — угол ее защемления.



Запишем уравнение (1.2) в виде системы двух дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Delta m - \mu(x) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= q(x) \\ D\Delta w &= m \end{aligned} \right\}, \quad (1.3)$$



где  $\nu(x) = (1 - \nu) \frac{a^2 D}{dx^2}$ ,  $m = -\frac{M_x + M_y}{1 - \nu}$  — функция приведенных моментов пластины, а  $M_x$  и  $M_y$  — изгибающие моменты в сечениях пластины, параллельных осям  $y$  и  $x$ , соответственно.

Элементы напряженного состояния пластины, посредством функции  $m(x, y)$ , записываются следующим образом:

$$M_x = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu m, \quad (1.4)$$

$$M_y = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - m, \quad (1.5)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (1.6)$$

$$Q_x = -\frac{dD}{dx} (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial m}{\partial x}, \quad (1.7)$$

и

$$Q_y = -\frac{\partial m}{\partial y} - \frac{dD}{dx} (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (1.8)$$

Система дифференциальных уравнений (1.3) должна быть проинтегрирована при следующих граничных условиях.

На грани  $x=0$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{D} \frac{\nu}{1 - \nu} m &= 0 \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{2 - \nu}{D(1 - \nu)} \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{2 - \nu}{1 - \nu} \frac{1}{D^2} \frac{dD}{dx} m &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.9)$$

На гранях  $y = \pm a$ :

$$\left. \begin{aligned} D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - m &= 0 \\ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{1}{D} \frac{2 - \nu}{1 - \nu} \frac{\partial m}{\partial y} - \frac{dD}{dx} \frac{2}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.10)$$

На косоугольной грани:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w = 0. \quad (1.11)$$

В дальнейшем необходимы будут условия закрепления пластины в ее угловых точках  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  (рис. 1). Приведем эти условия только для точек  $a$  и  $b$  (для точек  $c$  и  $d$  они аналогичны).

В точке  $b$ :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w = 0. \quad (1.12)$$

В точке  $a$ :

$$M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_{xy} = 0, \quad Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0, \quad Q_y - \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = 0,$$



что равносильно условиям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{2-\nu}{D_0(1-\nu)} \frac{\partial m}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \quad (1.14)$$

и

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{2-\nu}{D_0(1-\nu)} \frac{\partial m}{\partial y} = 0, \quad (1.15)$$

которые получаются при совместном рассмотрении в точке  $a$  условий: (1.4), (1.5), (1.6), (1.7) и (1.8).

### § 2. Основная система дифференциальных уравнений

Основная система матричных дифференциальных уравнений дискретного метода, полученная с помощью «скользящей» интерполяции функций  $w$  и  $m$  полиномом 2-ой степени и приближенно аппроксимирующая систему (1.3), имеет вид (см. [8]):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} V - \alpha^2 (V - \mu U) &= BQ - \frac{1}{h^2} B(\psi - \mu \varphi) \\ \frac{d^2}{dx^2} U - \alpha^2 U &= \frac{1}{D} V - \frac{1}{h^2} B\varphi \end{aligned} \right\}, \quad (2.1)$$

где  $-\alpha^2 = \frac{1}{h^2} \lambda$ ,  $\lambda$  — диагональная матрица с элементами

$$\lambda_i = -2 \left( 1 + \cos \frac{\pi i}{n+1} \right)$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $n$  — число прямых);

$h = \frac{2a}{n+1} = \text{const}$  — расстояние между прямыми;

$$\psi = \psi_0 + \psi_{n+1}, \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_{n+1},$$

$$\psi_0 = (m_0, 0, \dots, 0), \quad \psi_{n+1} = (0, 0, \dots, m_{n+1}),$$

$$\varphi_0 = (w_0, 0, \dots, 0), \quad \varphi_{n+1} = (0, 0, \dots, w_{n+1}),$$

$$Q = (q_1, q_2, \dots, q_n) = (q, q, \dots, q),$$

— столбцевые матрицы;

$$V = (V_1, V_2, \dots, V_n) \text{ и } U = (U_1, U_2, \dots, U_n)$$

связаны со столбцевыми матрицами

$$M = (m_1, m_2, \dots, m_n) \text{ и } W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$$

ортонормированным преобразованием с матрицей  $B$ :

$$V = BM, \quad U = BW.$$

Элементы  $B$  вычисляются по формуле:

$$b_{is} = (-1)^{i+s} \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{\pi is}{n+1}$$

( $i, s = 1, 2, \dots, n$ ;  $n$  — число прямых).



Система (2.1), кроме неизвестных функций  $U_i$  и  $V_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), содержит еще и четыре неизвестных „контурных“ функции:  $w_0(x)$ ,  $w_{n+1}(x)$ ,  $m_0(x)$  и  $m_{n+1}(x)$ , из которых независимыми будут только  $w_0(x)$  и  $w_{n+1}(x)$ , так как из первого граничного условия системы (1.10) вытекает:

$$m_0 = D(1 - \nu) \frac{d^2 w_0}{dx^2} \quad (2.2)$$

и, соответственно,

$$m_{n+1} = D(1 - \nu) \frac{d^2 w_{n+1}}{dx^2}. \quad (2.3)$$

С учетом (2.2), (2.3), а также выражений для  $D$  и  $\nu$ , система (2.1) преобразуется к виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} V - \alpha^2 V &= BQ + D_0(1 - \nu) 6\rho^2(1 + \rho x) \alpha^2 U - \\ &- D_0 B_1 h^{-2} (1 - \nu) F w_0 - D_0 B_n h^{-2} F w_{n+1} (1 - \nu) \\ \frac{d^2}{dx^2} U - \alpha^2 U &= \frac{1}{D_0(1 + \rho x)^3} V - B_1 h^{-2} w_0 - B_n h^{-2} w_{n+1} \end{aligned} \right\}, \quad (2.4)$$

где оператор  $F = (1 + \rho x)^3 \frac{d^2}{dx^2} - 6\rho^2(1 + \rho x)$ , а  $B_1$  и  $B_n$  — первый и последний столбцы матрицы  $B$ .

### § 3. Интегрирование системы (2.4).

Система (2.4) является системой с переменными коэффициентами. Поэтому возможно только ее приближенное интегрирование.

Для того чтобы проинтегрировать систему (2.4) поступаем следующим образом.

1. Представим «контурные» функции  $w_0$  и  $w_{n+1}$  степенными полиномами:

$$w_0 \cong \tilde{w}_0 = \sum_{k=0}^k d_k^{(0)} x^k \quad (3.1)$$

и

$$w_{n+1} \cong \tilde{w}_{n+1} = \sum_{k=0}^{+1} d_k^{(n+1)} x^k \quad (3.2)$$

с неизвестными коэффициентами  $d_k^{(0)}$  и  $d_k^{(n+1)}$ . Для определенности примем  $k=6$ . Подчинив полиномы (3.1) и (3.2) условиям закрепления пластины в угловых точках  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ , получим:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_0 &= d_0^{(0)} (1 - 6z^5 + 5z^6) + d_1^{(0)} x (1 - 5z^4 + 4z^5) + \\ &+ d_4^{(0)} x^4 (1 - 2z + z^2) = \sum_{r=1}^2 d_r f_r(x), \end{aligned} \quad (3.3)$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{n+1} &= d_0^{(n+1)} (1 - 7\bar{z}^6 + 6\bar{z}^7) + d_1^{(n+1)} x (1 - 6\bar{z}^5 + 5\bar{z}^6) + \\ &+ d_4^{(n+1)} x^4 (1 - 3\bar{z}^2 + 2\bar{z}^3) + d_5^{(n+1)} x^5 (1 - 2\bar{z} + \bar{z}^2) = \\ &= \sum_{r=0}^3 \bar{d}_r \bar{f}_r(x), \end{aligned} \quad (3.4)$$



где  $z = \frac{x}{b_0}$ ,  $\bar{z} = \frac{x}{b_1}$ ,  $b_0 = 2b$ ,  $b_1 = 2b + 2a \operatorname{tg} \gamma$ .

2. Функцию  $\frac{1}{(1 + \rho x)^3}$  интерполируем степенным полиномом

$$\frac{1}{(1 + \rho x)^3} \cong \sum_{k=0}^6 c_k x^k, \quad (3.5)$$

где  $c_k$  являются известными коэффициентами.

3. Разбиваем интервал интегрирования  $(0, 2b)$  на  $m$  участков равной длины  $L = 2b/m$ , а интервал  $(0, 2b + 2a \operatorname{tg} \gamma)$  на  $n + 1$  участок длиной  $l = \frac{2a \operatorname{tg} \gamma}{n + 1}$  ( $n$  — число прямых).

4. В пределах каждого из участков функции  $V_i$  и  $U_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), находящиеся в правых частях системы (2.4) и имеющие переменные коэффициенты, линейно аппроксимируем. Например, на участке  $(k, k + 1)$  принимаем:

$$U_i^{(k, k+1)} = U_i^{(k)} + \frac{\bar{x}}{L} (U_i^{(k+1)} - U_i^{(k)}), \quad (3.6)$$

$$V_i^{(k, k+1)} = V_i^{(k)} + \frac{\bar{x}}{L} (V_i^{(k+1)} - V_i^{(k)}), \quad (3.7)$$

где  $U^{(k)}$ ,  $U^{(k+1)}$  и т. д. — значения функций  $U_i$  и  $V_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) в начальной и конечной точках участка  $(k, k + 1)$ , т. е. при  $x = x_k$  и  $x = x_{k+1}$ ;  $\bar{x} = x - x_k$  — переменная на участке  $(k, k + 1)$ .

5. При интегрировании системы (2.4) на участке  $(k, k + 1)$  начало координат переносится в начальную точку  $x = x_k$  ( $k = 0, 1, \dots, m - 1$ ).

6. Решение на каждом из участков отыскивается с помощью нормальных фундаментальных функций.

Учтя (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) и (3.7), на первом участке  $(0, 1)$  получим систему:

$$\left. \begin{aligned} V_i'' - \alpha_i^2 V_i &= q(x) \beta_i + D_0 6\rho^2 (1 - \nu) \alpha_i^2 \left[ U_i^{(0)} \left( 1 + \rho x - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{x}{L} - \frac{\rho x^2}{L} \right) + U_i^{(1)} \left( \frac{x}{L} + \frac{\rho x^2}{L} \right) \right] - \\ &\quad - D_0 \sum_{r=0}^2 d_r \vartheta_r^{(1)}(x) - D_0 \sum_{r=0}^3 \bar{d}_r \bar{\vartheta}_r^{(i)}(x) \\ U_i'' - \alpha_i^2 U_i &= \frac{1}{D_0} V_i^{(0)} \sum_{k=0}^6 c_k \left( x^k - \frac{x^{k+1}}{L} \right) + \frac{1}{D_0} V_i^{(1)} \sum_{k=0}^6 c_k \frac{x^{k+1}}{L} - \\ &\quad - b_{i1} h^{-2} \sum_{r=0}^2 d_r f_r(x) - b_{i2} h^{-2} \sum_{r=0}^3 \bar{d}_r \bar{f}_r(x) \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$

где

$$v_r^{(i)}(x) = b_{i1} h^{-2} (1 - \nu) [f_r''(x) - 6\rho^2 (1 + \rho x) f_r(x)],$$

$$\bar{v}_r^{(i)}(x) = b_{i2} h^{-2} (1 - \nu) [\bar{f}_r''(x) - 6\rho^2 (1 + \rho x) \bar{f}_r(x)], \quad \beta_i = \sum_{j=1}^n b_{ij}.$$



В дальнейших выражениях индекс  $i$  нами условно опущен. Положим, что внешняя нагрузка на пластину постоянная и равномерно распределенная. Тогда решение системы (3.8) будет:

$$\left. \begin{aligned} V^{(0,1)} \cong \tilde{V}^{(0,1)} &= A_1^{(0,1)} \operatorname{ch} \alpha x + A_2^{(0,1)} \frac{1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha x + \frac{q\beta}{\alpha^2} [\alpha\varphi_0] + \\ &+ D_0 K_1^{(0,1)} U^{(0)} + D_0 K_2^{(0,1)} U^{(1)} - D_0 \sum_{r=0}^2 d_r \Theta_r^{(0,1)} - D_0 \sum_{r=0}^2 \bar{d}_r \bar{\Theta}_r^{(0,1)} \\ U^{(0,1)} \cong \tilde{U}^{(0,1)} &= B_1^{(0,1)} \operatorname{ch} \alpha x + B_2^{(0,1)} \frac{1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha x + \frac{1}{D_0} R_1^{(0,1)} V^{(0)} + \\ &+ \frac{1}{D_0} R_2^{(0,1)} V^{(1)} - b_1 h^{-2} \alpha^{-2} \sum_{r=0}^2 d_r \Phi_r^{(0,1)} - b_n h^{-2} \alpha^{-2} \sum_{r=0}^3 \bar{d}_r \bar{\Phi}_r^{(0,1)} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

где

$$K_1^{(0,1)} = 6\rho^2 (1-\nu) \alpha \int_0^x \left( 1 + \rho t - \frac{t}{L} - \frac{\rho t^2}{L} \right) \operatorname{sh} \alpha (x-t) dt;$$

$$K_2^{(0,1)} = 6\rho^2 (1-\nu) \alpha \int_0^x \left( \frac{t}{L} - \frac{\rho t^2}{L} \right) \operatorname{sh} \alpha (x-t) dt;$$

$$R_1^{(0,1)} = \frac{1}{\alpha} \int_0^x \left[ \sum_{k=0}^6 c_k \left( t^k - \frac{t^{k+1}}{L} \right) \right] \operatorname{sh} \alpha (x-t) dt;$$

$$R_2^{(0,1)} = \frac{1}{\alpha} \int_0^x \left[ \sum_{k=0}^6 c_k \frac{t^{k+1}}{L} \right] \operatorname{sh} \alpha (x-t) dt;$$

$$\Theta_r^{(0,1)} = \frac{1}{\alpha} \int_0^x \theta_r(t) \operatorname{sh} \alpha (x-t) dt; \quad \bar{\Theta}_r^{(0,1)} = \frac{1}{\alpha} \int_0^x \bar{\theta}_r(t) \operatorname{sh} \alpha (x-t) dt;$$

$$\Phi_r^{(0,1)} = \alpha \int_0^x f_r(t) \operatorname{sh} \alpha (x-t) dt; \quad \bar{\Phi}_r^{(0,1)} = \alpha \int_0^x \bar{f}_r(t) \operatorname{sh} \alpha (x-t) dt;$$

$$\alpha\varphi_0 = \operatorname{ch} \alpha x - 1; \quad \alpha\varphi_1 = \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\alpha} - x; \quad \alpha\varphi_k = \frac{k(k-1)\alpha\varphi_{k-2}}{\alpha^2} - x^k.$$

Две из четырех постоянных интегрирования определяются из граничных условий (1.9). Для этого последние записываем в дискретном виде, а затем переходим от функций  $w_i$  и  $m_i$  к функциям  $U_i$  и  $V_i$  по формулам:

$$w_i = \sum_{s=1}^n b_{is} U_s, \quad m_i = \sum_{s=1}^n b_{is} V_s \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

В результате получается система независимых дискретных граничных условий:

$$\left. \begin{aligned} U'' + \frac{1}{D} \frac{\nu}{1-\nu} V \Big|_{x=0} &= 0 \\ V_i'' - \frac{2-\nu}{D(1-\nu)} V_i' + \frac{2-\nu}{1-\nu} \frac{1}{D^2} \frac{dD}{dx} V \Big|_{x=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$



Из условий (3.10) найдем:

$$D_0 \alpha^2 B_1^{(0,1)} = -A_1^{(0,1)} \left( c_0 + \frac{\nu}{1-\nu} \right) + D_0 b_1 h^{-2} d_0 + D_0 b_n h^{-2} \bar{d}_b,$$

$$D_0 \alpha^2 B_2^{(0,1)} = -\frac{c_0}{L} V^{(1)} - A_1^{(0,1)} \left( c_1 - \frac{c_0}{L} + 3\rho^2 \frac{2-\nu}{1-\nu} \right) + \\ + A_2^{(0,1)} \frac{2-\nu}{1-\nu} + D_0 (b_1 h^{-2} d_1 + b_n h^{-2} \bar{d}_1),$$

так как при  $x=0$ :  $U^{(0)} = B_1^{(0,1)}$ ,  $V^{(0)} = A_1^{(0,1)}$ .

Таким образом, на участке  $(0-1)$  окончательное решение системы (3.8) получается в виде:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{V}^{(0,1)} &= A_1^{(0,1)} \operatorname{ch} \alpha x + A_2^{(0,1)} \frac{1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha x + \frac{q\beta}{\alpha^2} [\alpha \varphi_0] + \\ &+ D_0 \left( K_1^{(0,1)} B_1^{(0,1)} + K_2^{(0,1)} U^{(1)} - \sum_{r=0}^2 d_r \Theta_r^{(0,1)} - \sum_{r=0}^3 \bar{d}_r \bar{\Theta}_r^{(0,1)} \right) \\ \tilde{U}^{(0,1)} &= A_1^{(0,1)} \Psi_1^{(0,1)} + A_2^{(0,1)} \Psi_2^{(0,1)} - V^{(1)} \frac{c_0}{D_0 L \alpha^2} \frac{1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha x - \\ &- b_1 h^{-2} \alpha^{-2} \left[ d_0 \operatorname{ch} \alpha x + d_1 \frac{1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha x - \sum_{r=0}^2 d_r \Phi_r^{(0,1)} \right] - \\ &- b_n h^{-2} \alpha^{-2} \left[ \bar{d}_0 \operatorname{ch} \alpha x + \bar{d}_1 \frac{1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha x - \sum_{r=0}^3 \bar{d}_r \bar{\Phi}_r^{(0,1)} \right] \end{aligned} \right\}, \quad (3.11)$$

где

$$\Psi_1^{(0,1)} = -\frac{1}{D_0 \alpha^2} \left[ \left( c_0 + \frac{\nu}{1-\nu} \right) \operatorname{ch} \alpha x + \left( c_1 - \frac{c_0}{L} + 3\rho^2 \frac{2-\nu}{1-\nu} \right) \frac{1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha x \right],$$

$$\Psi_2^{(0,1)} = \frac{1}{D_0 \alpha^2} \frac{2-\nu}{1-\nu} \frac{1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha x.$$

В решения  $\tilde{U}^{(0,1)}$  и  $\tilde{V}^{(0,1)}$ , кроме постоянных интегрирования  $A_1^{(0,1)}$  и  $A_2^{(0,1)}$ , входят еще и неизвестные:  $U^{(1)}$  и  $V^{(1)}$ . Чтобы определить их воспользуемся условиями:

$$\left. \begin{aligned} V^{(1)} &= \tilde{V}^{(0,1)} \Big|_{x=L} \\ U^{(1)} &= \tilde{U}^{(0,1)} \Big|_{x=L} \end{aligned} \right\}. \quad (3.12)$$

Подставляя в (3.12) решение (3.11) получим алгебраическую систему с двумя неизвестными, решая которую и найдем  $U^{(1)}$  и  $V^{(1)}$ . После этого вычисляем производные:

$$\frac{dV^{(1)}}{dx} = \frac{d\tilde{V}^{(0,1)}}{dx} \Big|_{x=L}, \quad \frac{dU^{(1)}}{dx} = \frac{d\tilde{U}^{(0,1)}}{dx} \Big|_{x=L},$$

а начало координат переносим в следующую точку  $x = x_1$ .



На участке (1.2) процесс интегрирования повторяется и в дальнейшем становится единообразным. Поэтому рассуждения, приведенные ниже, относим к участку  $(k, k+1)$ .

Система дифференциальных уравнений на участке  $(k, k+1)$ :

$$\left. \begin{aligned} V'' - \alpha^2 V &= q\beta + D_0 \alpha^2 6\rho^2 (1-\nu) \left\{ U^{(k)} \left[ 1 + \rho \bar{x} \left( 1 - \frac{x_k}{L} - \frac{1}{\rho L} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\rho \bar{x}^2}{L} + \rho x_k \right] + U^{(k+1)} \left[ \frac{\bar{x}}{L} (1 + \rho x_k) + \frac{\rho \bar{x}^2}{L} \right] \right\} - \\ &\quad - D_0 \sum_{r=0}^2 d_r \vartheta_r(\bar{x}, x_k) - D_0 \sum_{r=0}^3 \bar{d}_r \bar{\vartheta}_r(\bar{x}, x_k) \\ U'' - \alpha^2 U &= \frac{1}{D_0} V^{(k)} \sum_{r=0}^6 \bar{c}_r \left( \bar{x}^r - \frac{1}{L} \bar{x}^{r+1} \right) + \frac{1}{D_0} V^{(k+1)} \sum_{r=0}^6 \bar{c}_r \frac{\bar{x}^{r+1}}{L} - \\ &\quad - b_1 h^{-2} \sum_{r=0}^2 d_r f_r(\bar{x}, x_k) - b_n h^{-2} \sum_{r=0}^3 \bar{d}_r \bar{f}_r(\bar{x}, x_k) \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

де

$$\begin{aligned} \vartheta_1(\bar{x}, x_k) &= \vartheta_r(x) \Big|_{x=\bar{x}+x_k}, & \bar{\vartheta}_1(\bar{x}, x_k) &= \bar{\vartheta}_r(x) \Big|_{x=\bar{x}+x_k}, \\ f_r(\bar{x}, x_k) &= f_r(x) \Big|_{x=\bar{x}+x_k}, & \bar{f}_r(\bar{x}, x_k) &= \bar{f}_r(x) \Big|_{x=\bar{x}+x_k}, \end{aligned}$$

а коэффициенты  $\bar{c}_r$  ( $r=0, 1, \dots, 6$ ) определяются формулой

$$\bar{c}_r = \frac{d^{(r)}}{dx_k^{(r)}} \sum_{r=0}^6 \frac{1}{r!} c_r x_k^r \quad (0! = 1).$$

Решение системы (3.13):

$$\left. \begin{aligned} \tilde{V}^{(k, k+1)} &= A_1^{(k, k+1)} \operatorname{ch} \alpha \bar{x} + A_2^{(k, k+1)} \frac{1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha \bar{x} + \frac{q\beta}{\alpha^2} [\alpha \varphi(\bar{x})] + \\ &\quad + D_0 K_1^{(k, k+1)}(\bar{x}) U^{(k)} + D_0 K_2^{(k, k+1)}(\bar{x}) U^{(k+1)} - \\ &\quad - D_0 \sum_{r=0}^2 d_r \vartheta_r^{(k, k+1)}(\bar{x}) - D_0 \sum_{r=0}^3 \bar{d}_r \bar{\vartheta}_r^{(k, k+1)}(\bar{x}) \\ \tilde{U}^{(k, k+1)} &= B_1^{(k, k+1)} \operatorname{ch} \alpha \bar{x} + B_2^{(k, k+1)} \frac{1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha \bar{x} + \\ &\quad + \frac{1}{D_0} R_1^{(k, k+1)}(\bar{x}) V^{(k)} + \frac{1}{D_0} R_2^{(k, k+1)}(\bar{x}) V^{(k+1)} - \\ &\quad - b_1 h^{-2} \alpha^{-2} \sum_{r=0}^2 p_r \Phi_r^{(k, k+1)}(\bar{x}) - b_n h^{-2} \alpha^{-2} \sum_{r=0}^3 \bar{d}_r \bar{\Phi}^{(k, k+1)}(\bar{x}) \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

где

$$\Phi_1^{(k, k+1)}(\bar{x}) = \alpha \int_0^{\bar{x}} f_r(t, x_k) \operatorname{sh} \alpha (\bar{x} - t) dt,$$



$$\bar{\Phi}_r^{(k, k+1)}(\bar{x}) = \alpha \int_0^{\bar{x}} \bar{f}_r(t, x_k) \operatorname{sh} \alpha(\bar{x} - t) dt,$$

$$K_1^{(k, k+1)}(\bar{x}) = 6\rho^2(1-\nu)\alpha \int_0^{\bar{x}} \left[ 1 + \rho t \left( 1 - \frac{x_k}{L} - \frac{1}{\rho L} \right) - \frac{\rho}{L} t^2 + \rho x_k \right] \operatorname{sh} \alpha(\bar{x} - t) dt,$$

$$K_2^{(k, k+1)}(\bar{x}) = 6\rho^2(1-\nu)\alpha \int_0^{\bar{x}} \left[ \frac{t}{L} (1 + \rho x_k) - \frac{\rho}{L} t^2 \right] \operatorname{sh} \alpha(\bar{x} - t) dt,$$

$$\Theta_r^{(k, k+1)}(\bar{x}) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\bar{x}} \bar{\vartheta}_r(t, x_k) \operatorname{sh} \alpha(\bar{x} - t) dt,$$

$$\Theta_{(r^k, k+1)}(\bar{x}) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\bar{x}} \bar{\vartheta}_r(t, x_k) \operatorname{sh} \alpha(\bar{x} - t) dt,$$

$$R_1^{(k, k+1)}(\bar{x}) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\bar{x}} \left[ \sum_{r=0}^6 \bar{c}_r \left( t^r - \frac{1}{L} t^{r+1} \right) \right] \operatorname{sh} \alpha(\bar{x} - t) dt,$$

$$R_2^{(k, k+1)}(\bar{x}) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\bar{x}} \left[ \sum_{r=0}^6 \bar{c}_r \frac{1}{L} t^{r+1} \right] \operatorname{sh} \alpha(\bar{x} - t) dt,$$

$$\alpha \varphi_0(\bar{x}) = \alpha \varphi_0(x), \quad \alpha \varphi_1(\bar{x}) = \alpha \varphi_1(x), \quad \alpha \varphi_r(\bar{x}) = \alpha \varphi_r(x).$$

Постоянные интегрирования в решении (3.14) легко определяются по результатам интегрирования на предыдущем участке  $(k-1, k)$ :

$$A_1^{(k, k+1)} = V^{(k)}, \quad A_2^{(k, k+1)} = \frac{d}{dx} \left[ \bar{V}^{(k-1, k)}(\bar{x}) \right]_{\bar{x}=L},$$

$$B_1^{(k, k+1)} = U^{(k)}, \quad B_2^{(k, k+1)} = \frac{d}{dx} \left[ \bar{U}^{(k-1, k)}(\bar{x}) \right]_{\bar{x}=L}.$$

Значения  $V^{(k+1)}$  и  $U^{(k+1)}$  в конце участка  $(k, k+1)$  определяются так же, как и на участке  $(0, 1)$ .

Интегрирование системы (2.4) в интервале  $(2b, 2b + 2a \operatorname{tg} \gamma)$  ведется с шагом  $l$ .

#### § 4. Определение постоянных интегрирования и коэффициентов степенных полиномов

В результате интегрирования системы (2.4) получаются значения функций  $U_i, V_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) и их первых производных в ряде точек  $x=x_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots, m$ ) и  $x=x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), которые будут выражены через: а) внешнюю нагрузку на пластину; б) постоянные интегрирования первого участка  $A_{1i}^{(0, 1)}$  и  $A_{2i}^{(0, 1)}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ); в) коэффициенты степенных полиномов  $d_r$  ( $r=0, 1, 2$ ) и  $\bar{d}_r$  ( $r=0, 1, 2, 3$ ). Условия для определения постоянных интегрирования  $A_{1i}^{(0, 1)}$  и  $A_{2i}^{(0, 1)}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) вытекают из граничных условий (1.11) на косозащем-



лённой грани пластины. Записанные в дискретной форме, они имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^n b_{is} U'_s |_{x=x_i} = 0 \\ \sum_{s=1}^n b_{is} U_s |_{x=x_i} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ )

Подставив в (4.1) значения  $U'_s |_{x=x_i}$  и  $U_s |_{x=x_i}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), которые получаются при интегрировании системы (2.4) в интервале  $(0, 2b + 2a \operatorname{tg} \gamma)$ , приходим к системе алгебраических уравнений порядка  $2n$  с  $2n+7$  неизвестными. Недостающие 7 алгебраических уравнений получим, подчиняя решение системы (2.4) второму граничному условию системы (1.10) и условиям опирания пластины в ее угловых точках  $a$  и  $d$ , которые остались невыполненными. Второе граничное условие системы (1.10), поскольку число неизвестных коэффициентов  $\bar{d}_r$  и  $\bar{d}_r$  конечное, должно быть выполнено дискретно, т. е. в ряде точек на параллельных гранях пластины. В данном случае необходимо взять две точки на грани  $y=-a$  ( $x_0=0, x_1=b$ ) и три точки на грани  $y=a$  ( $x_0=0, x_1=b, x_2=2b$ ), рис. 1. Проще всего расстояние между точками на гранях  $y=-a$  и  $y=a$  брать постоянным.

Воспользовавшись для производных

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}, \quad \frac{\partial m}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

односторонними формулами численного дифференцирования и опуская несложные выкладки, аналогичные приведенным в [8], получим семь недостающих условий для полного решения поставленной задачи:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^n U_s \left( \sum_{r=1}^{t-1} b_{sr} f_r \right) - h^2 \sum_{s=1}^n \left\{ \frac{2-\nu}{D(1-\nu)} V_s + \frac{dD}{dx} \frac{2}{D} U'_s \right\} \left( \sum_{r=1}^{t-1} b_{rs} p_r \right) + \\ + f_0 w_0 - h^2 p_0 \left( \frac{2-\nu}{D(1-\nu)} m_0 + \frac{dD}{dx} \frac{2}{D} w'_0 \right) \Big|_{x=x_j} = 0 \quad (j=0, 1) \\ \sum_{s=1}^n U_s \left( \sum_{r=1}^{t-1} b_{n+1-r,s} f_r \right) - h^2 \sum_{s=1}^n \left\{ \frac{2-\nu}{D(1-\nu)} V_s + \right. \\ \left. + \frac{dD}{dx} \frac{2}{D} U'_s \right\} \left( \sum_{r=1}^{t-1} b_{n+1-r,s} p_r \right) + f_{t-1} w_{n+1} - \\ - h^2 p_{t-1} \left( \frac{2-\nu}{D(1-\nu)} m_{n+1} + \frac{dD}{dx} \frac{2}{D} w'_{n+1} \right) \Big|_{x=x_j} = 0 \quad (j=0, 1, 2) \\ p_0 w'_0 + \sum_{s=1}^n U'_s \left( \sum_{r=1}^{t-1} b_{rs} p_r \right) \Big|_{x=0} = 0 \\ p_{t-1} w'_{n+1} + \sum_{s=1}^n U'_s \left( \sum_{r=1}^{t-1} b_{n+1-r,s} p_r \right) \Big|_{x=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$



где  $f_r$  и  $p_r$  ( $r=0, 1, 2, \dots, t-1$ ) — коэффициенты в односторонних конечно-разностных формулах для третьей и первой производных по переменной  $y$ , соответственно;  $t$  — число членов в формуле численного дифференцирования (например, при использовании семичленных формул  $t=7$ ).

Решая совместно или последовательно алгебраические системы (1.4) и (4.2), определим все неизвестные:  $A_{1i}^{(0,1)}, A_{2i}^{(0,1)}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ),  $d_r$  ( $r=0, 1, 2$ ) и  $\bar{d}_r$  ( $r=0, 1, 2, 3$ ), что и решает поставленную задачу.

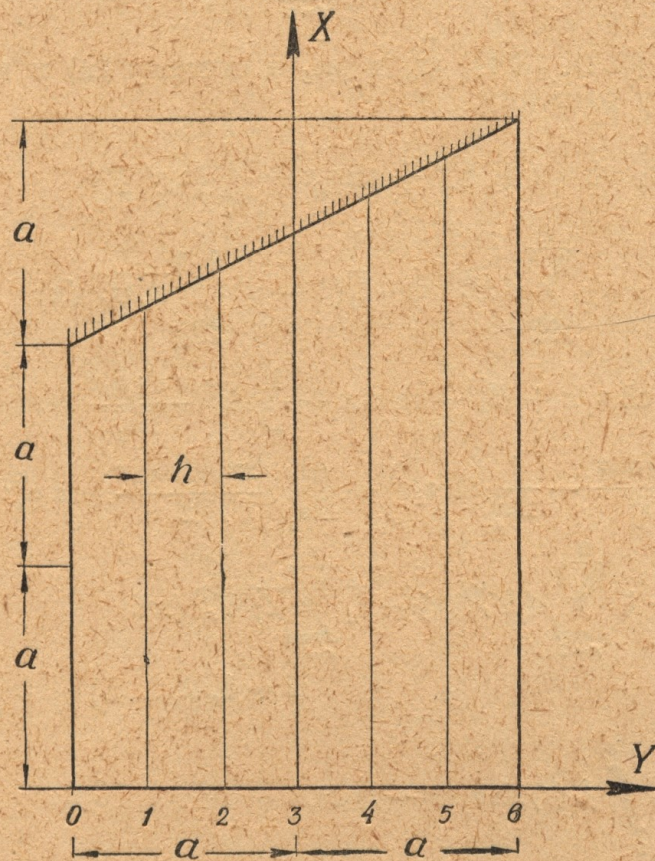


Рис. 2.

В заключение отметим, что шаг интегрирования в интервале  $(0, 2b)$  следует назначать так, чтобы координаты точек  $x_j$  ( $j=1, 2, \dots, j$ ) на параллельных гранях пластины, в которых удовлетворяется второе из граничных условий (1.10), совпадали с некоторыми из координат  $x_{k+1}$  ( $k=0, 1, 2, \dots, m-1$ ; координаты конечных точек участков интегрирования). Тогда при составлении соответствующей системы алгебраических уравнений не потребуется дополнительного вычисления значений функций  $U_i, V_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) и их первых производных при  $x=x_j$  ( $j=1, 2, \dots, j$ ). Они будут получаться при интегрировании.

Пример. Изгиб косозащемленной консольной пластины постоянной толщины, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой  $q = \text{const}$  (рис. 2).

Для расчета принимаем:  $h=a/3, n=5, b_0=2a, b_1=3a, \nu=0,3$ .

В данном случае  $\mu=0$ . Поэтому основная система дифференциальных уравнений дискретного метода имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} V_i'' - \alpha_i^2 V_i &= q\beta_i - b_{11}h^{-2}m_0 - b_{15}h^{-2}m_6 \\ U_i'' - \alpha_i^2 U_i &= \frac{1}{D} V_i - b_{11}h^{-2}\omega_0 - b_{15}h^{-2}\omega_6 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$(i=1, 2, \dots, 5)$



«Контурные» функции  $\omega_0$  и  $\omega_6$  принимаем в виде полиномов (3.3) и (3.4). Тогда

$$\tilde{m}_0 = D(1 - \nu) \sum_{r=0}^2 d_r f_r''(x),$$

$$\tilde{m}_6 = D(1 - \nu) \sum_{r=0}^3 \bar{d}_r \bar{f}_r''(x).$$

Подставляя (3.3), (3.4),  $\tilde{m}_0$  и  $\tilde{m}_6$  в систему (а) и интегрируя ее, получим систему решений:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{V}_i &= A_1^{(i)} \operatorname{ch} \alpha_i x + A_2^{(i)} \frac{1}{\alpha_i} \operatorname{sh} \alpha_i x + \frac{q\beta_i}{\alpha_i^2} [\alpha_i \varphi_0^{(i)}] - \\ &- \xi_i (1 - \nu) \sum_{r=0}^2 d_r \Theta_r^{(i)}(x) - \bar{\xi}_i (1 - \nu) \sum_{r=0}^3 \bar{d}_r \bar{\Theta}_r^{(i)}(x) \\ \tilde{U}_i &= B_1^{(i)} \operatorname{ch} \alpha_i x + B_2^{(i)} \frac{1}{\alpha_i} \operatorname{sh} \alpha_i x + \frac{1}{D} A_1^{(i)} \frac{x \operatorname{sh} \alpha_i x}{2\alpha_i} + \\ &+ \frac{1}{D} A_2^{(i)} \left( \frac{x \operatorname{ch} \alpha_i x}{2\alpha_i^2} - \frac{1}{2\alpha_i^3} \operatorname{sh} \alpha_i x \right) + \frac{q\beta_i}{D\alpha_i^4} \left( \frac{x\alpha_i \operatorname{sh} \alpha_i x}{2} - \alpha_i \varphi_0^{(i)} \right) - \\ &- \xi_i \sum_{r=0}^2 d_r \Psi_r^{(i)}(x) - \bar{\xi}_i \sum_{r=0}^3 \bar{d}_r \bar{\Psi}_r^{(i)}(x) \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

$(i = 1, 2, \dots, 5)$

где

$$\Theta_r^{(i)}(x) = \alpha_i \int_0^x f_r'(t) \operatorname{sh} \alpha_i (x-t) dt,$$

$$\bar{\Theta}_r^{(i)}(x) = \alpha_i \int_0^x \bar{f}_r'(t) \operatorname{sh} \alpha_i (x-t) dt,$$

$$\xi_i = \frac{9b_{i1}}{a^2\alpha_i^2}, \quad \bar{\xi}_i = \frac{9q_{i5}}{a^2\alpha_i^2}, \quad \alpha_i \varphi_0^{(i)} = \operatorname{ch} \alpha_i x - 1,$$

$$\Psi_r^{(i)}(x) = \frac{1}{\alpha_i} \int_0^x \Theta_r^{(i)}(t) \operatorname{sh} \alpha_i (x-t) dt + \alpha_i \int_0^x f_r(t) \operatorname{sh} \alpha_i (x-t) dt,$$

$$\bar{\Psi}_r^{(i)}(x) = \frac{1}{\alpha_i} \int_0^x \bar{\Theta}_r^{(i)}(t) \operatorname{sh} \alpha_i (x-t) dt + \alpha_i \int_0^x \bar{f}_r(t) \operatorname{sh} \alpha_i (x-t) dt.$$

Из граничных условий на грани  $x=0$  находим постоянные интегрирования:

$$\left. \begin{aligned} B_1^{(i)} &= -x_i A_1^{(i)} + \xi_i d_0 + \bar{\xi}_i \bar{d}_0 \\ B_2^{(i)} &= x_i A_2^{(i)} + \xi_i d_1 + \bar{\xi}_i \bar{d}_1 \end{aligned} \right\}, \quad (i = 1, 2, \dots, 5)$$

где  $x_i = 1/\alpha_i^2(1 - \nu)$ .



Тогда, учтя выражения для  $B_1^{(i)}$  и  $B_2^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), получим:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_i = & \frac{1}{D} A_1^{(i)} \Phi_1^{(i)} + \frac{1}{D} A_2^{(i)} \Phi_2^{(i)} + \frac{q}{D} \Phi_0^{(i)} - \xi_i \left( -d_0 \operatorname{ch} \alpha_i x - d_1 \frac{1}{\alpha_i} \operatorname{sh} \alpha_i x + \right. \\ & \left. + \sum_{r=0}^2 d_r \Psi_r^{(i)}(x) \right) - \bar{\xi}_i \left( -\bar{d}_0 \operatorname{ch} \alpha_i x - \bar{d}_1 \frac{1}{\alpha_i} \operatorname{sh} \alpha_i x + \sum_{r=0}^3 \bar{d}_r \bar{\Psi}_r^{(i)}(x) \right), \quad (\text{в}) \\ & (i = 1, 2, \dots, 5) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(i)} &= -x_i \operatorname{ch} \alpha_i x + \frac{x \operatorname{sh} \alpha_i x}{2\alpha_i}, \\ \Phi_2^{(i)} &= \frac{1}{\alpha_i^2} \left( \frac{x \operatorname{ch} \alpha_i x}{2} + \frac{1+\nu}{2(1-\nu)} \frac{1}{\alpha_i} \operatorname{sh} \alpha_i x \right). \end{aligned}$$

Для определения постоянных интегрирования  $A_1^{(i)}$ ,  $A_2^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) и коэффициентов  $d_r$  ( $r = 0, 1, 2$ ),  $\bar{d}_r$  ( $r = 0, 1, 2, 3$ ) использовали следующие условия:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^n b_{is} U'_s |_{x=x_i} = 0 \\ \sum_{s=1}^n b_{is} U_s |_{x=x_i} = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (\text{г})$$

( $i = 1, 2, \dots, 5$ )

и

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^5 \Delta_s U_s + a^2(2-\nu) \sum_{s=1}^5 \delta_s U'_s - 165,375 w_0 - 50,625 w_6 - \\ - a^2(2-\nu)(7,35 w_0'' + 0,5 w_6'') |_{x=x_j} = 0 \quad (j = 0, 1) \\ \sum_{s=1}^5 \bar{\Delta}_s U_s + a^2(2-\nu) \sum_{s=1}^5 \bar{\delta}_s U'_s - 165,375 w_6 - 50,625 w_0 - \\ - a^2(2-\nu)(7,35 w_6'' + 0,5 w_0'') |_{x=x_j} = 0 \quad (j = 0, 1, 2) \\ \sum_{s=1}^5 \delta_s (x_s A^{(s)} + d_1 \xi_s + \bar{d}_1 \bar{\xi}_s) - 7,35 d_1 - 0,5 \bar{d}_1 = 0 \\ \sum_{s=1}^5 \bar{\delta}_s (x_s A_2^{(s)} + d_1 \xi_s + \bar{d}_1 \bar{\xi}_s) - 7,35 \bar{d}_1 - 0,5 d_1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{д})$$

Условия (г) получаются из граничных условий на косозащемленной грани пластины. Первое (для грани  $y = -a$ ) и второе (для грани



$y=a$ ) уравнения системы (д) получаются при рассмотрении граничного условия

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} = 0;$$

а третье (для точки  $x=0, y=-a$ ) и четвертое (для точки  $x=0, y=a$ ) — из условия

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

в угловых точках пластины:  $y=-a, x=0$  и  $y=a, x=0$ . Преобразование этих граничных условий с помощью односторонних конечноразностных формул численного дифференцирования для третьей и первой производных по переменной  $y$  и приводят к системе условий (д).

Коэффициенты  $\Delta_s, \delta_s$  (для третьей и первой производных по  $y$ , соответственно) и  $\bar{\Delta}_s, \bar{\delta}_s$  вычисляются по формулам:

$$\Delta_s = \sum_{k=1}^5 f_k b_{ks}, \quad \bar{\Delta}_s = \sum_{k=1}^5 f_k b_{6-k,s},$$

$$\delta_s = \sum_{k=1}^5 t_k b_{ks}, \quad \bar{\delta}_s = \sum_{k=1}^5 t_k b_{6-k,s},$$

где

$$f_1 = 232, \quad f_2 = -461, \quad f_3 = 496, \quad f_4 = -307, \quad f_5 = 104,$$

$$t_1 = 360, \quad t_2 = -450, \quad t_3 = 400, \quad t_4 = -225, \quad t_5 = 72.$$

Первое условие системы (д) должно быть выполнено в точках  $x=0$  и  $y=b$ , а второе — в точках:  $x=0, y=b$  и  $y=2b$ .

После подстановки в системы условий (г) и (д) функций (в) получим алгебраическую систему 17-го порядка, решая которую и найдем постоянные интегрирования  $A_1^{(i)}, A_2^{(i)}$  ( $i=1, 2, \dots, 5$ ) и коэффициенты  $d_r$  ( $r=0, 1, 2$ ),  $\bar{d}_r$  ( $r=0, 1, 2, 3$ ). Ниже приводим их значения:

$$A_1^{(1)} = -0,239030022 \cdot 10^{-2} qa^2, \quad A_2^{(1)} = -0,899496306 \cdot 10^{-2} qa$$

$$A_1^{(2)} = -0,568721256 \cdot 10^{-2} \text{ „}, \quad A_2^{(2)} = -0,382003944 \cdot 10^{-1} \text{ „}$$

$$A_1^{(3)} = -0,111991268 \cdot 10^{-1} \text{ „}, \quad A_2^{(3)} = -0,290883982 \cdot 10^{-1} \text{ „}$$

$$A_1^{(4)} = -0,337534862 \cdot 10^{-1} \text{ „}, \quad A_2^{(4)} = -0,104391898, \text{ „}$$

$$A_1^{(5)} = -0,876049174 \cdot 10^{-1} \text{ „}, \quad A_2^{(5)} = 0,286338886 \cdot 10^{-1} \text{ „}$$

$$d_0 = 3,51634430 qa^4/D, \quad \bar{d}_0 = 4,86932342 qa^4/D,$$

$$d_1 = -2,35275430 qa^3/D, \quad \bar{d}_1 = -2,45679364 qa^3/D,$$

$$d_2 = 0,0826694242, q/D, \quad \bar{d}_2 = -0,265960380 q/D,$$

$$\bar{d}_3 = 0,357692416 q/aD.$$

Располагая известными теперь функциями  $\tilde{U}_i$  и  $\tilde{V}_i$  ( $i=1, 2, \dots, 5$ ) можем найти и функции

$$w_i = \sum_{s=1}^5 b_{is} \tilde{U}_s, \quad m_i = \sum_{s=1}^5 b_{is} \tilde{V}_s \quad (i=1, 2, \dots, 5),$$



а. следовательно, и любую из компонент напряженно-деформированного состояния изогнутой пластины.

Вычисление прогибов пластины сведено в табл. 1, по данным которой построены графики рис. 3.

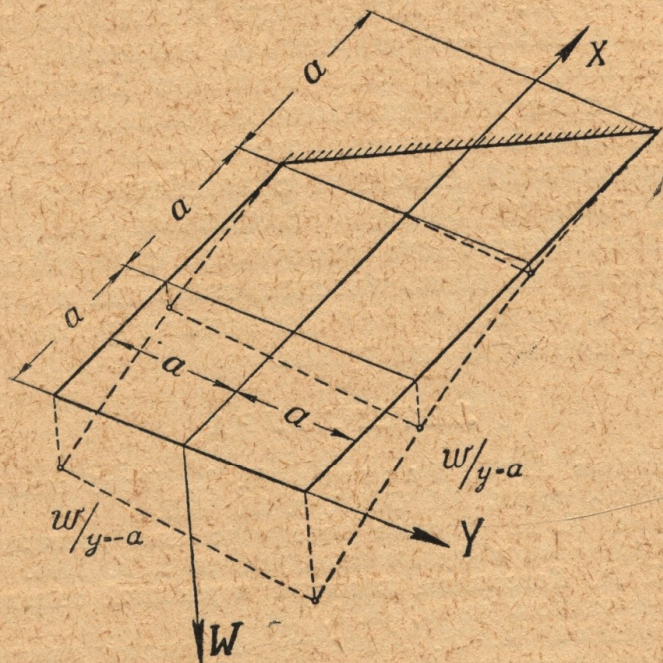


Рис. 3.

Интересным является тот факт, что распределение прогибов в сечениях пластины  $x=0$  и  $x=a$  приближенно может считаться линейным.

Прогибы  $w$  в  $qa^4/D$

Таблица 1

	$y=-a$	$y=-\frac{2}{3}a$	$y=-\frac{1}{3}a$	$y=0$	$y=\frac{1}{3}a$	$y=\frac{2}{3}a$	$y=a$
$x=0$	3,5163	3,7545	3,9907	4,2223	4,4467	4,6622	4,8693
$x=a$	1,2408	1,4746	1,6910	1,8940	2,0804	2,2448	2,3849
$x=2a$	0	0,0423	0,0746	0,2425	0,3636	0,4777	0,5673

Вычисление коэффициентов алгебраических уравнений и ее решение было выполнено на электронной цифровой вычислительной машине УРАЛ-1.

### ВЫВОДЫ

Дискретный метод позволяет получить практическое решение для такой сложной задачи, какой является задача об изгибе консольной косоугольной пластины с толщиной, изменяющейся линейно в направлении ее параллельных граней. Решение подчиняется определенному алгоритму.

Интегрирование системы дифференциальных уравнений и вычисление коэффициентов системы алгебраических уравнений является простым и единообразным. Поэтому все решение задачи может быть



эффективно осуществлено на электронной цифровой вычислительной машине с помощью несложной программы.

Приведенные выше, а также ряд других вычислений, выполненных на ЭЦВМ УРАЛ-1, показали, что удовлетворительная точность решения по дискретному методу может быть достигнута при следующих данных: а) число прямых — 5; б) степень полиномов (3.1) и (3.2) — 6 и 7, соответственно; в) шаг интегрирования  $L=b/2$ .

Частными случаями вышеизложенного являются: 1) изгиб косо-защемленной консольной пластины постоянной толщины; 2) изгиб прямоугольной консольной пластины с линейным изменением толщины и постоянной толщины; 3) изгиб консольных пластин с иным изменением толщины или жесткости (например, с линейным изменением жесткости); 4) расчет на изгиб пластин, имеющих в плане форму, показанную на рис. 1, но с другими граничными условиями на гранях  $y=\pm a$ ,  $x=0$ , а также на косо́й грани.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Я., Назаров Н. И. Изгиб скошенной консольной пластины, Инженерный сборник, АН СССР, т. 25, 1959.
2. Винокуров Л. П. Прямые методы решения пространственных и контактных задач для массивов и фундаментов, Изд-во ХГУ, 1956.
3. Варвак П. М. Консольные пластины переменной толщины, Труды Киевского автомобильно-дорожного ин-та, сб. 4, 1960.
4. Елпатьевский А. Н. К расчету консольных пластин вариационным методом В. З. Бласова. Инженерный сборник, АН СССР, т. 28, 1960.
5. Кантор Б. Я. Изгиб пластины переменной толщины, которая имеет форму кругового прямоугольника и закреплена по меньшей дуговой кромке, ж. «Прикладная механика», АН УССР, вып. 4, т. 6, 1960.
6. Кушкуль В. М. Об изгибе консольных пластин, ограниченных кусочно-гладкими кривыми. Изв. АН СССР, отд. техн. наук, 1958, № 10.
7. Пугач Е. П. Изгиб плиты-консоли, Сб. Ленингр. ин-та инженеров ж.-д. транспорта, вып. 164, 1959.
8. Петров Ю. П. Расчет на изгиб пластин с линейным изменением толщины дискретным методом, Тр. Харьковск. авиац. ин-та, вып. 18, 1961.
9. Слободянский М. Г. Способ интегрирования уравнений в частных производных и его применение к задачам теории упругости, ПММ, т. 3, вып. 1, 1939.
10. Fung G. C. Bending of the elastic plates of variable thickness. J. Aeronaut Sci., 1953, 20, № 7, 455—468.
11. Nash W. A. Several Approximate Analysis of the Bending of a Rectangular Cantiliver Plate by Uniform Normal Load. Journal of Applied Mechanics, March, 1952.