

## Узагальнення моделі Фолькерсена на випадок осьової симетрії

*Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського  
«Харківський авіаційний інститут»*

Тонкостінні конструкції можуть містити дефекти у вигляді отворів і тріщин, які є дефектами матеріалу, з якого виготовлено конструкцію, або виникають у процесі експлуатації внаслідок, наприклад, механічних пошкоджень. Наявність отворів у пластині спричиняє концентрацію напружень на межі отворів, що призводить, у кінцевому підсумку, до передчасного виходу елемента конструкції з ладу. Ремонт локальних пошкоджень сучасних авіаційних конструкцій може проводитися з допомогою накладок, які приклеюються до основної конструкції. Накладка бере на себе частину навантаження, розвантажуючи пошкоджену ділянку. Такий спосіб ремонту забезпечує герметичність та аеродинамічну ефективність конструкції. Розрахунок напруженого стану таких клеєних конструкцій проводиться зазвичай з допомогою методу скінченних елементів. Класичні моделі напруженого стану з'єднань унапуск є одновимірними, тобто розглядається зміння напруженого стану лише вздовж однієї координати, причому розглядаються з'єднання прямокутної форми. Метою цієї роботи є створення математичної моделі напруженого стану кругових вісесиметричних клейових з'єднань і побудова відповідного аналітичного розв'язку задачі. Передбачається, що вигину пластин немає, деформації пластин є рівномірними по товщині. Клейовий шар працює тільки на зсув. Основна пластина і накладка вважаються ізотропними. Розв'язок будується в полярних координатах. Напружений стан з'єднання залежить тільки від радіальної координати, тобто є одновимірним. Розв'язок отримано в аналітичній формі. Ця математична модель являє собою узагальнення класичної моделі клейового з'єднання Фолькерсена на кругову або кільцеву область і розглядається вперше. Крайові умови задовольняються точно. Виконання крайових умов, а також умов сполучення приводить до системи лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів отриманих розв'язків. Розв'язано модельну задачу й проведено порівняння числових результатів з результатами розрахунків, виконаних за методом скінченних елементів. Показано, що запропонована модель має достатню для інженерних задач точність і може бути використана для розв'язання задач проектування конструкцій аерокосмічної техніки.

**Ключові слова:** клейове з'єднання; вісесиметрична модель; аналітичний розв'язок; кругла пластина.

### Вступ

Проблемі локального ремонту композитних і металевих конструкцій аерокосмічної техніки приділяється значна увага [1–4]. При цьому розглядаються зазвичай два типи порушення цілісності основної панелі або пластини – у вигляді круглого отвору або у вигляді тріщини. У більшості робіт, що стосуються дослідження напруженого стану з'єднань пластин з накладками, розрахунки проводяться з допомогою методу скінченних елементів [5–8]. Існують й аналітичні методи розрахунку напруженого стану пластин з отворами, підкріплених накладками [9–11], де закріплення накладки з основною пластиною розглядається вздовж лінії, у той час як у реальній конструкції закріплення накладки часто проводиться по площі накладки. Пластину з наклеєною круглою накладкою на ділянці склеювання можна розглядати як тришарову пластину з м'яким з'єднувальним шаром. Для побудови розв'язку необхідно

використовувати моделі тришарових пластин, що набули застосування при вивченні напруженого стану клейових з'єднань [12]. У відомих аналітичних розв'язках задачі про підсилювальну накладку і з'єднання унапуск розглядають прямокутну геометрію пластин, що з'єднуються, а також рівномірний розподіл напружень по ширині з'єднання [13–15]. Існує також кілька різних наближених двовимірних моделей і відповідних методів розв'язання задач про напружений стан клейового з'єднання [16–22], де розглядається прямокутна накладка. Зазначені підходи не дають змоги отримати аналітичний розв'язок задачі про з'єднання пластини з круглим отвором та круглої накладки. Осьова симетрія такої конструкції потребує застосування полярної системи координат, завдяки чому задачу можна звести до одновимірної, оскільки напруження не залежать від кутової координати.

Одновимірні моделі з'єднань унапуск застосовуються не тільки для розрахунку склеєних балок, але й для розрахунку вісесиметричного напруженого стану з'єднань коаксіальних труб [23–25]. У цьому випадку осьова симетрія фактично забезпечує рівномірний розподіл напружень по коловій координаті. Однак задача про вісесиметричне напружене з'єднання пластини з круглою накладкою розв'язується вперше.

Метою цієї роботи є побудова аналітичного розв'язку й дослідження напруженого стану клейового з'єднання внапуск круглої пластини з круглим отвором і коаксіальної круглої накладки.

### 1. Постановка задачі

Розглянемо клейове з'єднання двох круглих пластин однакової товщини (рис. 1). Основна пластина навантажена симетричним двохосьовим розтягом. Радіус отвору в основній пластині  $R_1$ , радіус накладки  $R_2$ . Основна пластина має товщину  $\delta_1$ , накладка має товщину  $\delta_2$ . Основу й накладку виконано з ізотропних матеріалів, модулі пружності яких  $E_1$  і  $E_2$ , коефіцієнти Пуассона  $\mu_1$  і  $\mu_2$ . Пластинки сполучено з допомогою з'єднувального шару, товщина якого  $\delta_0$ , а модуль зсуву  $G_0$ .

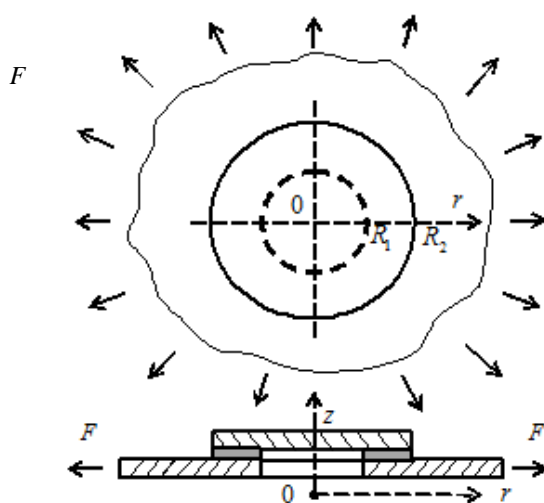


Рис. 1. Схема клейового з'єднання пластини з накладкою  
Зазначимо, що на практиці найчастіше ремонт проводиться з допомогою

того ж самого листового матеріалу, з якого зроблено основну конструкцію, тобто товщина і властивості накладки збігаються з товщиною і властивостями основи. Крім того, для зменшення вигину конструкції ремонт може здійснюватися з допомогою двох однакових накладок, що приклеюються до основи з двох сторін. У цьому випадку використовуються накладки з товщиною у два рази меншою від товщини основи, і внаслідок симетрії задачу можна звести до задачі, що розв'язується в цій роботі. Завдяки симетрії з'єднання у такому випадку згинальні моменти в з'єднанні також є мінімальними і не впливають на напружено-деформований стан (НДС) конструкції.

Унаслідок осової симетрії тангенціальні зусилля в несних шарах  $Q_1$  і  $Q_2$  не залежать від кутової координати, дотичних зусиль у несних шарах немає. Нижній індекс «1» відповідає основній пластині, а індекс «2» – круглій накладці в межах області склеювання  $x \in [R_1; R_2]$ .

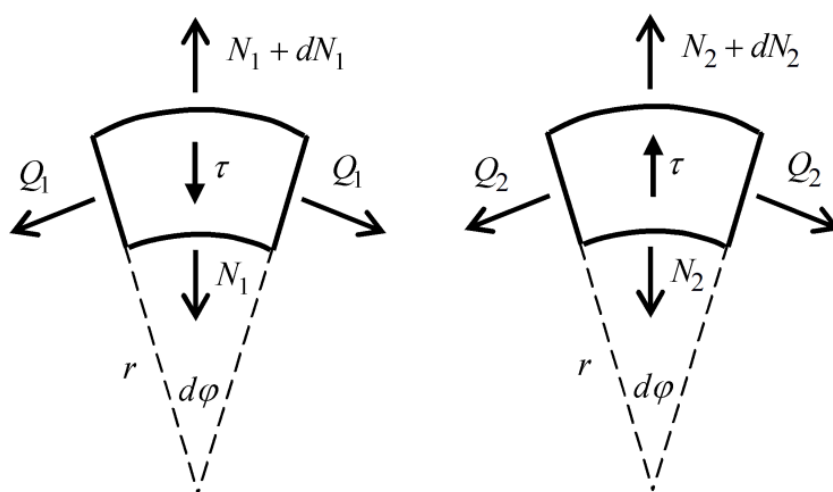


Рис. 2. Рівновага диференціальних елементів з'єднання

Задавши напрямок дотичних напружень у клейовому шарі, запишемо рівняння рівноваги елементів несних шарів у такому вигляді:

$$\frac{N_1 - Q_1}{r} + \frac{dN_1}{dr} - \tau = 0, \quad \frac{N_2 - Q_2}{r} + \frac{dN_2}{dr} + \tau = 0, \quad (1)$$

де  $N_k, Q_k$  – радіальні й тангенціальні зусилля в несному шарі  $k, k = 1, 2$ ;

$\tau$  – дотичні напруження в клейовому шарі в радіальному напрямку.

Покладемо, що напруження в клеї є пропорційними різниці переміщень прилеглих до клейового шару сторін обох пластин:

$$\tau = P(u_1 - u_2), \quad (2)$$

де  $P$  – жорсткість клейового шару на зсув  $P = G_0 / \delta_0$ ;

$u_k$  – радіальні переміщення шарів,  $k = 1, 2$ .

Рівняння фізичного закону для пластин мають вигляд

$$N_k = B_k (\varepsilon_{k,r} + \mu_k \varepsilon_{k,\varphi}), \quad Q_k = B_k (\varepsilon_{k,\varphi} + \mu_k \varepsilon_{k,r}), \quad (3)$$

де  $B_k = \frac{\delta_k E_k}{1 - \mu_k^2}$  – мембранна жорсткість пластин;

$\varepsilon_{k,r}$  і  $\varepsilon_{k,\varphi}$  – радіальні й тангенціальні деформації шару  $k$ .

Кінематичні співвідношення теорії пружності мають вигляд

$$\varepsilon_{k,r} = \frac{du_k}{dr}, \varepsilon_{k,\varphi} = \frac{u_k}{r}. \quad (4)$$

## 2. Побудова розв'язку

З використанням (4) і (2), рівняння (1) можна подати в такому вигляді:

$$\frac{\tau}{B_1} + \frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_1}{dr} - \frac{u_1}{r^2} = 0, \quad -\frac{\tau}{B_2} + \frac{d^2 u_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_2}{dr} - \frac{u_2}{r^2} = 0. \quad (5)$$

Диференціюючи (2) і використовуючи наведені вище рівняння, отримуємо рівняння

$$\frac{d^2 \tau}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tau}{dr} - \left( \frac{P}{B_1} + \frac{P}{B_2} + \frac{1}{r^2} \right) \tau = 0. \quad (6)$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\tau(r) = C_1 I_1(\lambda r) + C_2 K_1(\lambda r). \quad (7)$$

Можна зазначити, що в задачі про напружений стан клейового з'єднання пластин прямокутної форми дотичні напруження в клеї описуються лінійною комбінацією експоненціальних функцій [12, 15, 17]. У простій постановці задачі в так званій моделі Фолькерсена [12] дотичні напруження в клеї можна подати у вигляді суперпозиції гіперболічних синуса й косинуса. У розглянутій вісесиметричній задачі про круглу накладку аналогом цих гіперболічних і експоненціальних функцій є необмежені й неперіодичні модифіковані функції Бесселя.

Підставивши дотичні напруження (7) у рівняння (5) і розв'язавши отримані лінійні диференціальні неоднорідні рівняння Ейлера з використанням співвідношення (2), знаходимо

$$u_k(r) = (-1)^k C_1 \frac{I_1(\lambda r)}{\lambda^2 B_k} + (-1)^k C_2 \frac{K_1(\lambda r)}{\lambda^2 B_k} + C_3 r + \frac{C_4}{r}, \quad k=1,2, \quad (8)$$

де  $I_1(\lambda r)$ ,  $K_1(\lambda r)$  – модифіковані функції Бесселя першого й другого роду.

## 3. Переміщення за межами області склеювання і крайові умови

Переміщення у внутрішній ( $r < R_1$ ) і зовнішній ( $r > R_2$ ) областях, тобто за межами області склеювання, описуються відомими рівняннями деформації круглих пластинок

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0.$$

Позначимо радіальні переміщення накладки у внутрішній частині з'єднання  $u_3$ , а радіальні переміщення основної пластини за межами з'єднання

$u_4$ . Наведені вище рівняння Ейлера мають такі розв'язки:

$$u_3(r) = c_1 r + \frac{c_2}{r}, \quad u_4(r) = c_3 r + \frac{c_4}{r}. \quad (9)$$

Переміщення (8) і (9), а також співвідношення (4) і (3) дають можливість знайти зусилля в основній пластині й накладці як в області склеювання, так і за її межами.

Сталі  $C_1, \dots, C_4$  і  $c_1, \dots, c_4$  знаходимо з крайових умов і умов сполучення переміщень і зусиль на межах областей.

Покладемо, що основна пластина має радіус  $R_3$ . Запишемо крайові умови на зовнішній межі основної пластини:

$$N_4(R_3) = F.$$

Умови на межі області склеювання і основної пластини мають вигляд

$$u_1(R_2) = u_4(R_2); \quad N_1(R_2) = N_4(R_2); \quad N_2(R_2) = 0.$$

Умови на межі області склеювання й отвору мають вигляд

$$u_2(R_1) = u_3(R_1); \quad N_2(R_1) = N_3(R_1); \quad N_1(R_1) = 0.$$

Ще одну сталу знаходимо з умов рівності нулю поздовжніх переміщень накладки на початку координат ( $r = 0$ ):

$$c_2 = 0.$$

Отримаємо систему з семи лінійних рівнянь відносно семи невідомих сталих  $C_1, C_2, C_3, C_4, c_1, c_3, c_4$ :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B},$$

де

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{3,4} & f_{4,4}(R_3) \\ -f_{1,1}(R_2) & f_{2,1}(R_2) & f_{3,1} & f_{4,1}(R_2) & 0 & -f_{3,4} & -f_{4,4}(R_2) \\ -f_{1,1}(R_1) & f_{2,1}(R_1) & f_{3,1} & f_{4,1}(R_1) & 0 & 0 & 0 \\ f_{1,2}(R_2) & -f_{2,2}(R_2) & f_{3,2} & f_{4,2}(R_2) & 0 & 0 & 0 \\ f_{1,2}(R_1) & -f_{2,2}(R_1) & f_{3,2} & f_{4,2}(R_1) & f_{3,3} & 0 & 0 \\ -g_{1,1}(R_2) & -g_{2,1}(R_2) & R_2 & R_2^{-2} & 0 & -R_2 & -R_2^{-2} \\ g_{1,2}(R_1) & g_{2,2}(R_1) & R_1 & R_1^{-2} & R_1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{C} = (C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ c_1 \ c_3 \ c_4)^T; \quad \mathbf{B} = (F \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T;$$

$$g_{1,k}(r) = \frac{I_1(\lambda r)}{\lambda^2 B_k}; \quad g_{2,k}(r) = \frac{K_1(\lambda r)}{\lambda^2 B_k}; \quad f_{1,k}(r) = \frac{r\lambda I_0(\lambda r) - I_1(\lambda r)(1 - \mu_k)}{\lambda^2 r};$$

$$f_{2,k}(r) = \frac{r\lambda K_0(\lambda r) + K_1(\lambda r)(1 - \mu_k)}{\lambda^2 r}; \quad f_{3,k} = B_k(1 + \mu_k); \quad f_{4,k}(r) = -\frac{B_k(1 - \mu_k)}{r^2}.$$

### 3. Модельна задача

Розглянемо модельну задачу. Задаючи геометрію області, покладемо, що основна пластина має дуже великий радіус  $R_3$ .

Параметри задачі:  $R_1 = 30 \text{ мм}$ ,  $R_2 = 50 \text{ мм}$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 3 \text{ мм}$ ,  $\delta_0 = 0,1 \text{ мм}$ ,  $E = 70 \text{ ГПа}$  (алюмінієвий сплав),  $\mu = 0,28$ ,  $E_0 = 0,8 \text{ ГПа}$ ,  $G_0 = 0,3125 \text{ ГПа}$ . Погонні розтяжні зусилля  $F$  прикладені по периметру основної пластини, зовнішній радіус якої будемо вважати нескінченно великим ( $R_3 = \infty$ ). Для верифікації було створено скінченно-елементну модель у системі COMSOL Multiphysics.

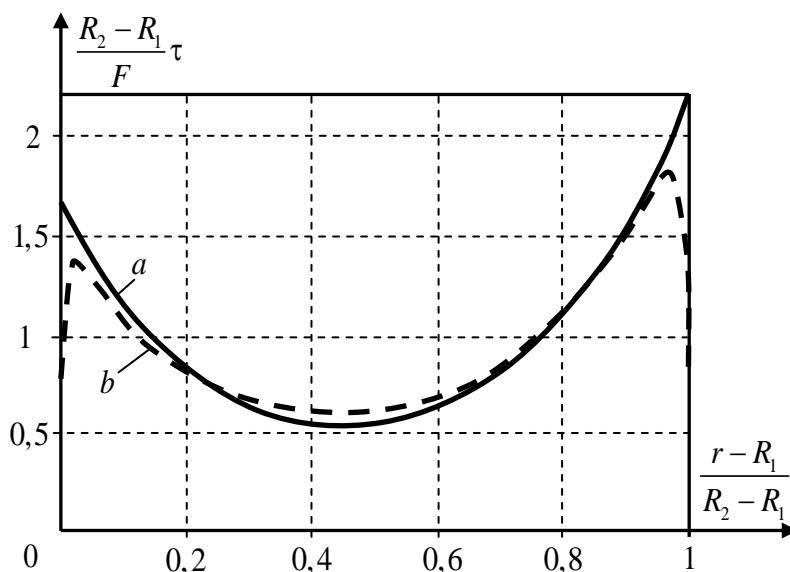


Рис. 3. Дотичні напруження в клеї

На рис. 3 показано графіки дотичних напружень у клейовому шарі, розрахованих за запропонованою моделлю (а), а також з допомогою методу скінченних елементів (b). Напруження на графіках наведено в безрозмірній формі.

Обчислення показали, що напруження, розраховані з допомогою запропонованої моделі й з допомогою скінченно-елементного моделювання, збігаються майже у всій області склеювання. Відмінності спостерігаються лише в невеликих областях біля країв клейового шва, причому довжина цієї області – порядку товщини клейового шару. Виявлені відмінності не перевищують кількох відсотків, і на графіках результати практично збігаються. При цьому запропонований у роботі підхід дає дещо завищені результати, що є прийнятним для задач проектування. Описані невеликі відмінності між результатами можна пояснити тим, що зовнішній край клейового шва має вільну від навантаження межу, унаслідок чого дотичні напруження на краю клейового шару мають дорівнювати нулю, що не може відобразити запропонована модель. Ця особливість моделювання напруженого стану клею залежностями (4) добре відома [12].

Для ілюстрації того, як накладка розвантажує отвір, розглянемо графіки відношень радіальних і тангенціальних зусиль в основній пластині. На рис. 4 радіальні й тангенціальні зусилля показано в безрозмірній формі в деякому околі отвору. Очевидно, що на нескінченності маємо рівномірний напружений

стан  $N_4 = Q_4 = F$ . Відношення радіальних зусиль до  $F$  позначено на графіку літерою «а», а відношення тангенціальних зусиль до  $F$  літерою «б».

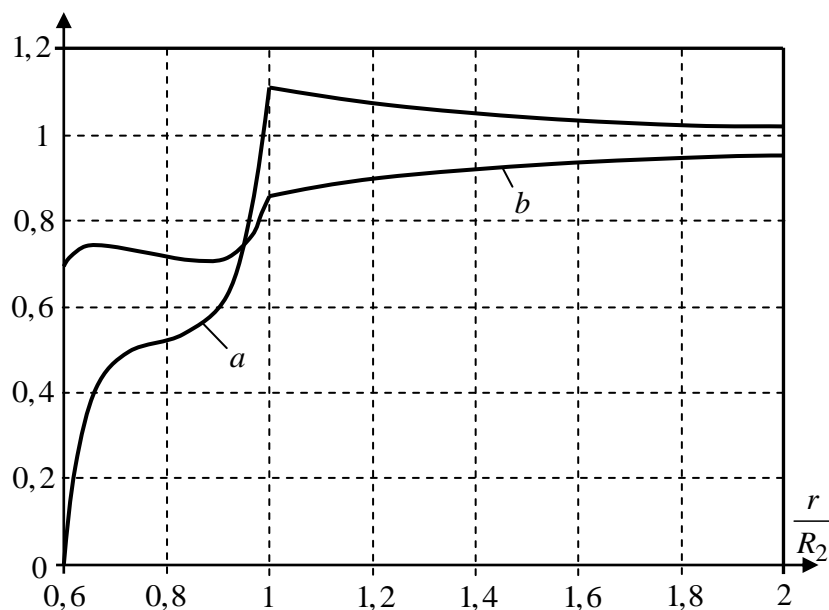


Рис. 4. Напруження в основній пластині в околі отвору:

$$a - \frac{N}{F}; \quad b - \frac{Q}{F}$$

Злам на графіках відповідає межі накладки. У випадку відсутності накладки на межі отвору нормальні зусилля були б нульовими, а тангенціальні дорівнювали б  $2F$ . У цьому випадку маємо лише незначне збільшення радіальних зусиль до  $1,1F$ . Тобто, як і слід було очікувати, накладка істотно розвантажує отвір. Розрахунки показують, що в накладці над отвором  $Q_3 = N_3 < 0,9F$ .

### Висновки

Запропоновано математичну модель вісесиметричного напруженого стану пластини, що має круглий отвір, який унапуск закрито приклеєною коаксіальною круглою накладкою. Задачу зведено до лінійного диференціального рівняння відносно дотичних напружень у клейовому шарі. Це рівняння має аналітичний розв'язок у функціях Бесселя.

Особливістю задачі є те, що на відміну від з'єднань балок при однонапрявленому навантаженні не всі зусилля з основної пластини передаються на накладку через клейовий шар. Накладка дещо розвантажує отвір, знижуючи тангенціальні напруження в основній пластині в околі отвору.

### Список літератури

1. Tomblin J. S., Salah L., Welch J. M., Borgman M. D. Bonded Repair of Aircraft Composite Sandwich Structures // Report DOT/FAA/AR-03/74, 2004.
2. Baker A. A., Rose L. R. F., Jones R. Advances in the Bonded Composite Repair of Metallic Aircraft Structures. Vol. 1. Elsevier: Oxford, 2002. 575 p.

3. Федотов А. А., Ципенко А. В. Аналитическая модель клеевого ремонта поврежденной обшивки летательного аппарата с учетом деградации свойств материала // Научный вестник МГТУ ГА. 2016. № 19(6). С. 118–126.
4. Bakuckas J. G., Chadha R., Swindell P., Fleming M., Lin J. Z., Ihn J. B., Freisthler M. Bonded Repairs of Composite Panels Representative of Wing Structure // Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2019. P. 565–580. doi: 10.1007/978-3-030-21503-3\_45.
5. Okafor A., Singh N., Enemuoh U. E., Rao S. V. Design, analysis and performance of adhesively bonded composite patch repair of cracked aluminum aircraft panels // Composite Structures. 2005. Vol. 71. P. 258–270. doi: 10.1016/j.compstruct.2005.02.023.
6. Tsouvalis N. G., Mirisiotis L. S., Dimou D. N. Experimental and numerical study of the fatigue behaviour of composite patch reinforced cracked steel plates // International Journal of Fatigue. 2009, Vol. 31. P. 1613–1627. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2009.04.006.
7. Sabelkin V., Mall S., Hansen M. A., Vandawaker R. M., Derriso M. Investigation into cracked aluminum plate repaired with bonded composite patch // Composite Structures. 2007. Vol. 79. P. 55–66. doi:10.1016/j.compstruct.2005.11.028.
8. Федотов А. А., Ципенко А. В., Лебедев А. И. Численное моделирование клеевого ремонтного соединения // Научный Вестник МГТУ ГА. 2018. Т. 21. - № 3, С. 125–138. doi: 10.26467/2079-0619-2018-21-3-125-138.
9. Zemlyanova A. Yu., Sil'vestrov V. V. The problem of the reinforcement of a plate with a cutout by a two-dimensional patch // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2007. Vol. 71. P. 40–51. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2007.03.012.
10. Сильвестров В. В., Землянова А. Ю. Ремонт пластины с круговым вырезом посредством заплатки // Прикладная механика и техническая физика. 2004. Т. 45. № 4. С. 176–183.
11. Zemlyanova A. Y. Reinforcement of a plate weakened by multiple holes with several patches for different types of plate-patch attachment // Mathematics and Mechanics of Solids. 2016. Vol. 21. № 3. P. 281–294. doi: 10.1177/1081286513519812.
12. da Silva L. F. M., das Neves P. J. C., Adams R. D., Spelt J. K. Analytical models of adhesively bonded joints. Part I: Literature survey // Int. J. Adhes. Adhesiv. 2009. Vol. 29. P. 319–330. doi: 10.1016/j.ijadhadh.2008.06.005.
13. Zhang X., Wu J., Fan Z., Yang S., Huang F., & Wang A. Cohesive shear stress and strength prediction of composite patch bonded to metal reinforcement // International Journal of Adhesion and Adhesives: 2019. Vol. 90. P. 144–153. doi:10.1016/j.ijadhadh.2019.02.008.
14. Kurenov S. S., Koshevoi A. G., Polyakov A. G. Through-Thickness Stress Distribution in the Adhesive Joint for the Multilayer Composite Material // Russian Aeronautics (Iz. VUZ). 2015. V. 58. № 2. P. 145–151. doi: 10.3103/S1068799815020026.
15. Lee J., Cho M., Kim H. S. Bending analysis of a laminated composite patch considering the free-edge effect using a stress-based equivalent single-layer composite model // International Journal of Mechanical Sciences. 2011. Vol. 53. Iss. 8. P. 606–616. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2011.05.007.
16. Rapp P. Mechanics of adhesive joints as a plane problem of the theory of elasticity. Part II: Displacement formulation for orthotropic adherends // Archives of



Civil and Mechanical Engineering. 2015. Vol. 15. I. 2, P. 603–619. doi: 10.1016/j.acme.2014.06.004.

17. Kurennov S. S. An Approximate Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Analytical Solution // Mechanics of Composite Materials. 2014. Vol. 50. № 1, P. 105–114. doi: 10.1007/s11029-014-9397-z.

18. Kurennov S. S. Determining Stresses in an Adhesive Joint with a Longitudinal Unadhered Region Using a Simplified Two-Dimensional Theory // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2019. Vol. 60(4). P. 740–747. doi: 10.1134/s0021894419040199.

19. Kurennov S. S. A Simplified Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Nonuniform Load // Mechanics of Composite Materials. 2015. Vol. 51. P. 479–488. DOI: 10.1007/s11029-015-9519-2.

20. Kurennov S. S., Barakhov K. P. Napriazhennoe sostoianie dvukhsloinoi priamougol'noi plastinki pri sdvige. Uproshchennaia dvumernaia model // PNRPU Mechanics Bulletin. 2019, № 3. P. 166–174. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.16.

21. Kim H. S., Cho M., Lee J., Deheeger A., Grédiac M., Mathias J.-D. Three dimensional stress analysis of a composite patch using stress functions // International Journal of Mechanical Sciences. 2010. Vol. 52(12). P. 1646–1659. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2010.08.006.

22. Kessentini R., Klinkova O., Tawfiq I., Haddar M. Transient hygro-thermo-mechanical stresses analysis in multi-layers bonded structure with coupled bidirectional model // International Journal of Mechanical Sciences. 2019. Vol. 150. P. 188–201. doi:10.1016/j.ijmecsci.2018.10.004.

23. Lubkin J. L., Reissner E. Stress distribution and design data for adhesive lap joints between circular tubes // Trans. ASME. 1956. № 78. P. 1213–1221.

24. Selahi E. Elasticity solution of adhesive tubular joints in laminated composites with axial symmetry // Archive of Mechanical Engineering. 2018. Vol. LXV, № 3. P. 441–456. doi: 10.24425/124491.

25. Kurennov S. S., Barakhov K. P., Poliakov A. G. Stressed State of the Axisymmetric Adhesive Joint of Two Cylindrical Shells under Axial Tension // Materials Science Forum. 2019, Vol. 968. P. 519–527. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.968.519.

Надійшла до редакції 12.12.2020, розглянута на редколегії 12.12.2020

## References

1. Tomblin J. S., Salah L., Welch J. M., Borgman M. D. Bonded Repair of Aircraft Composite Sandwich Structures // Report DOT/FAA/AR-03/74. 2004.

2. Baker A. A., Rose L. R. F., Jones R. Advances in the Bonded Composite Repair of Metallic Aircraft Structures. Vol. 1. Elsevier: Oxford, 2002. 575 p.

3. Fedotov A. A., Cipenko A. V. Analiticheskaya model' kleevogo remonta povrezhdenij obshivki letatel'nogo apparata s uchetom degradacii svojstv materiala // Nauchnyj vestnik MGTU GA. 2016. № 19(6), S. 118–126.

4. Bakuckas J. G., Chadha R., Swindell P., Fleming M., Lin J. Z., Ihn J. B., Freisthler M. Bonded Repairs of Composite Panels Representative of Wing Structure // Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2019. P. 565–580. doi: 10.1007/978-3-030-21503-3\_45.

5. Okafor A., Singh N., Enemuoh U. E., Rao S. V. Design, analysis and performance of adhesively bonded composite patch repair of cracked aluminum

aircraft panels // *Composite Structures*. 2005. Vol. 71. P. 258–270. doi: 10.1016/j.compstruct.2005.02.023.

6. Tsouvalis N. G., Mirisiotis L. S., Dimou D. N. Experimental and numerical study of the fatigue behaviour of composite patch reinforced cracked steel plates // *International Journal of Fatigue*. 2009, Vol. 31. P. 1613–1627. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2009.04.006.

7. Sabelkin V., Mall S., Hansen M. A., Vandawaker R. M., Derriso M. Investigation into cracked aluminum plate repaired with bonded composite patch // *Composite Structures*. 2007. Vol. 79. P. 55–66. doi:10.1016/j.compstruct.2005.11.028.

8. Fedotov A. A., Cipenko A. V., Lebedev A. I. Chislennoe modelirovanie kleevogo remontnogo soedineniya // *Nauchnyj Vestnik MGTU GA*. 2018. T. 21. № 3, S. 125–138. doi: 10.26467/2079-0619-2018-21-3-125-138.

9. Zemlyanova A. Yu., Sil'vestrov V. V. The problem of the reinforcement of a plate with a cutout by a two-dimensional patch // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2007. Vol. 71. P. 40–51. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2007.03.012.

10. Sil'vestrov V. V., Zemlyanova A. Yu. Remont plastiny s krugovym vyrezom posredstvom zaplatki // *Prikladnaya mexanika i texnicheskaya fizika*. 2004. T. 45. № 4. S. 176–183.

11. Zemlyanova A. Y. Reinforcement of a plate weakened by multiple holes with several patches for different types of plate-patch attachment // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2016. Vol. 21. № 3. P. 281–294. doi: 10.1177/1081286513519812.

12. da Silva L. F. M., das Neves P. J. C., Adams R. D., Spelt J. K. Analytical models of adhesively bonded joints. Part I: Literature survey // *Int. J. Adhes. Adhesiv*. 2009. Vol. 29. P. 319–330. doi: 10.1016/j.ijadhadh.2008.06.005.

13. Zhang X., Wu J., Fan Z., Yang S., Huang F., & Wang A. Cohesive shear stress and strength prediction of composite patch bonded to metal reinforcement // *International Journal of Adhesion and Adhesives*: 2019. Vol. 90. P. 144–153. doi:10.1016/j.ijadhadh.2019.02.008.

14. Kurenov S. S. Koshevoi A. G., Polyakov A. G. Through-Thickness Stress Distribution in the Adhesive Joint for the Multilayer Composite Material // *Russian Aeronautics (Iz. VUZ)*. 2015. V. 58. № 2. P. 145–151. doi: 10.3103/S1068799815020026.

15. Lee J., Cho M., Kim H. S. Bending analysis of a laminated composite patch considering the free-edge effect using a stress-based equivalent single-layer composite model // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2011. Vol. 53. Iss. 8. P. 606–616. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2011.05.007.

16. Rapp P. Mechanics of adhesive joints as a plane problem of the theory of elasticity. Part II: Displacement formulation for orthotropic adherends // *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2015. Vol. 15. I. 2, P. 603–619. doi: 10.1016/j.acme.2014.06.004.

17. Kurenov S. S. An Approximate Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Analytical Solution // *Mechanics of Composite Materials*. 2014. Vol. 50. № 1, P. 105–114. doi: 10.1007/s11029-014-9397-z.

18. Kurenov S. S. Determining Stresses in an Adhesive Joint with a Longitudinal Unadhered Region Using a Simplified Two-Dimensional Theory // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2019. Vol. 60(4). P. 740–747. doi: 10.1134/s0021894419040199.

19. Kurennov S. S. A Simplified Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Nonuniform Load // *Mechanics of Composite Materials*. 2015. Vol. 51. P. 479–488. DOI: 10.1007/s11029-015-9519-2.

20. Kurennov S. S., Barakhov K. P. Napriazhennoe sostoianie dvukhsloinoi priamougol'noi plastinki pri sdvige. Uproshchennaia dvumernaia model // *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2019, № 3. P. 166–174. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.16.

21. Kim H. S., Cho M., Lee J., Deheeger A., Grédiac M., Mathias J.-D. Three dimensional stress analysis of a composite patch using stress functions // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2010. Vol. 52(12). P. 1646–1659. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2010.08.006.

22. Kessentini R., Klinkova O., Tawfiq I., Haddar M. Transient hygro-thermo-mechanical stresses analysis in multi-layers bonded structure with coupled bidirectional model // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2019. Vol. 150. P. 188–201. doi:10.1016/j.ijmecsci.2018.10.004.

23. Lubkin J. L., Reissner E. Stress distribution and design data for adhesive lap joints between circular tubes // *Trans. ASME*. 1956. № 78. P. 1213–1221.

24. Selahi E. Elasticity solution of adhesive tubular joints in laminated composites with axial symmetry // *Archive of Mechanical Engineering*. 2018. Vol. LXV, № 3. P. 441–456. doi: 10.24425/124491.

25. Kurennov S. S., Barakhov K. P., Poliakov A. G. Stressed State of the Axisymmetric Adhesive Joint of Two Cylindrical Shells under Axial Tension // *Materials Science Forum*. 2019, Vol. 968. P. 519–527. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.968.519.

## **Generalization of the Volkersen model in the case of axial symmetry**

Thin-walled structures may contain defects as cracks and holes that are leftovers of the material the construction, is made of or they occur during the operation as a result of, for example, mechanical damage. The presence of holes in the plate causes a concentration of stresses at the boundary of the holes and ultimately leads to premature failure of the structural element. Repair of local damage of modern aircraft structures can be made by creating overlays that are glued to the main structure. The overlay takes on part of the load, unloading the damaged area. This method of repair provides tightness and aerodynamic efficiency to the structure. The calculation of the stress state of such glued structures is usually performed by using the finite element method. The classic models of the stress state of overlapped joints are one-dimensional. That is, the change of the stress state along only one coordinate is considered. At the same time, the connections of a rectangular form are also considered. The purpose of this work is to create a mathematical model of the stress state of circular axisymmetric adhesive joints and to build an appropriate analytical solution to the problem. It is assumed that the bending of the plates is absent; the deformation of the plates is even by thickness. The adhesive layer works only on the shift. The main plate and the overlay are considered isotropic. The solution is built on polar coordinates. The stress state of the connection depends only on the radial coordinate, i.e. one-dimensional. The solution is obtained in analytical form. This mathematical model is a generalization of the classical model of the adhesive connection of Volkersen to a circular or annular region and is considered for the first time. Boundary conditions are met exactly. The satisfaction of marginal conditions, as well as boundary conditions, leads to a system of linear equations with respect to the unknown coefficients of the obtained solutions. The model problem is solved and the numerical results are compared with the results of calculations performed by using the finite element method. It is shown that the proposed model has sufficient accuracy for engineering problems and can be used to solve problems of the design of aerospace structures.

**Keywords:** adhesive bonding; axisymmetric model; analytical solution; round plate.

**Відомості про авторів:**

**Барахов Костянтин Петрович** – старший викладач кафедри вищої математики та системного аналізу, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків, Україна; kрbarakhov@gmail.com; ORCID: 0000-0003-1714-7917

**About the Authors:**

**Barakhov Kostiantyn Petrovich** – senior lecturer Of Higher Mathematics and System Analysis Chair, National Aerospace University “Kharkiv Aviation Institute”, Kharkiv, Ukraine; kрbarakhov@gmail.com; ORCID: 0000-0003-1714-7917