МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

Державний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
"Харківський авіаційний інститут"

О.М. Старов

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. СТАТИКА

Конспект лекцій

Харків "ХАІ" 1999

УДК 531.2

Теоретична механіка. Статика / О.М. Старов. - Консп.лекцій. - Харків: Держ. аерокосмічний ун-т "Харк. авіац. ін-т", 1999. - 46 с.

Викладено питання статики. Наведено необхідну кількість прикладів і задач, які мають практичне значення. Конспект містить традиційні матеріали зі статики.

Для студентів вищих навчальних закладів денної та заочної форм навчання. Може бути корисним для аспірантів та інженерно-технічних працівників.

Іл. 45. Бібліогр.: 7 назв

Рецензенти: канд. техн. наук, доц. В.М. Зефіров,
канд. фіз.-мат. наук О.О. Гончаренко

ВСТУП

Теоретична механіка - одна з основних наук про природу та навколишній світ. Основною метою курсу теоретичної механіки у програмі інженерної підготовки студентів вузу є вміння описувати мовою математики механічного руху, рівноваги та інші явища і процеси. Записати рівняння руху або рівноваги, встановити основні закономірності та дати їм належне тлумачення - ось та кваліфікація, яку повинна надати майбутньому інженерові авіації теоретична механіка.

Виходячи з характеру задач, які розв"язує теоретична механіка, її поділяють на три розділи: статику, кінематику та динаміку. У цьому курсі ми будемо розглядати тільки перший розділ - статику.

Статика вивчає необхідні та достатні умови рівноваги матеріальних об"єктів під дією прикладених сил.

Лекція І

Тема "ПРЕДМЕТ І ЗАДАЧІ СТАТИКИ"

Статика - це розділ теоретичної механіки, який вивчає перетворення системи сил та умови рівноваги під дією сил відносно визначеної системи координат. Виходячи з цього статика розглядає дві основні задачі:

1. Складання або розкладання сил і зведення системи сил, що діють на тіло, до найпростішого вигляду.

2. Визначення необхідних і достатніх умов рівноваги тіл під дією прикладених до них сил.

Статика досліджує різні закономірності ідеалізованих об"єктів: матеріальної точки, системи матеріальних точок та абсолютно твердого тіла. Матеріальна точка та абсолютно тверде тіло являють собою деякі абстрактні моделі фізичних тіл. Це вносить значні спрощення при розгляді рівнянь рівноваги.

Матеріальна точка - це фізичне тіло певної маси, розмірами якого можна знехтувати.

Система матеріальних точок - це така сукупність точок, в якій положення і рух кожної окремої точки залежить від положення і руху інших точок системи.

Абсолютно тверде тіло - це тіло, в якому відстані між будь-якими двома його точками залишаються незмінними.

Матеріальна точка й абсолютно тверде тіло називаються вільними, якщо вони можуть займати будь-яке положення у просторі.

Лекція 2

Тема "СИЛИ ТА СИСТЕМИ СИЛ"

У статиці основним об"єктом дослідження є сила. Сила - це міра механічної взаємодії між тілами, яка визначає інтенсивність і напрямки цієї взаємодії. Сила - величина векторна, і тому вона характеризується модулем, напрямком та точкою прикладання або лінією дії (рис. 2.1).

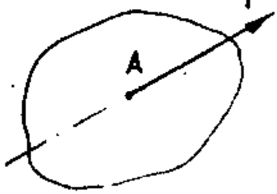

Рис. 2.1

У системі СІ вона вимірюється у ньютонах. Коли на одне тіло діє кілька сил, то їх сукупність називається системою сил. Ці системи залежно від їх взаємної орієнтації поділяються на такі:

1. Паралельні сили - лінії дії яких паралельні.

2. Збіжні сили - лінії дії яких перетинаються в одній точці.

3. Довільну систему сил, тобто сили, що можуть займати будь-яке положення у просторі.

Крім того, сили поділяються на активні і реакції в"язей, зосереджені та розподілені, внутрішні та зовнішні, а залежно від їх просторової орієнтації - на плоскі та просторові.

Зосередженою силою називається сила, яка прикладена до об"єкта в одній будь-якій точці.

Розподіленими силами називаються сили, що діють на всі точки поверхні або об"єму тіла. Однак у теоретичній механіці всі розподілені сили замінюються зосередженими, прикладеними у центрі ваги.

Дві системи сил називають еквівалентними, якщо одну систему сил, які діють на вільне тіло, можна замінити іншою, не змінюючи її спокою або руху:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n) \backsim (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n). \qquad (2.1)$$

Коли система сил еквівалентна одній силі, то ця сила має назву рівнодіючої:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n) \backsim \vec{R}. \qquad (2.2)$$

Так, повна аеродинамічна сила, яка діє на крило літака, є рівнодіючою підйомної сили $\vec{Y}$ та сил лобового опору $\vec{Q}$ (рис. 2.2).

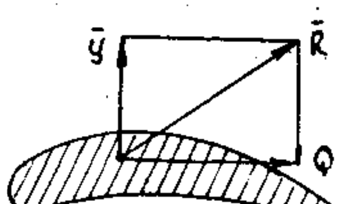

Рис. 2.2

Зрівноваженою називається така система сил, додавання якої до вільного твердого тіла чи її віднимання не змінює стану спокою або руху цього тіла. Зрівноважена система сил еквівалентна нулю.

Під рівновагою тіла розуміють стан спокою цього тіла відносно інших тіл, які відіграють роль системи відліку.

Якщо систему відліку можна вважати нерухомою, то рівновага тіла у цій системі називається абсолютною.

Лекція 3

Тема "АКСІОМИ СТАТИКИ"

В основу статики покладено декілька очевидних істин, які називаються аксіомами і відображають властивості сил, що діють на тіло (рис. 3.1).

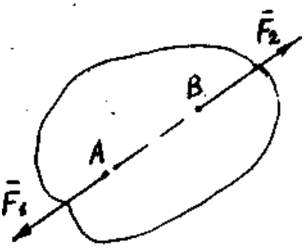

Рис. 3.1

Аксіома 1 (про дві сили).
Дві сили, що діють на тверде тіло, зрівноважуються тільки тоді, коли вони рівні за модулем, протилежні за напрямком і діють вздовж однієї прямої.

Аксіома 2 (про ковзний вектор).
Дія даної системи сил на тверде тіло не зміниться, якщо до неї додати або від неї відкинути систему сил, еквівалентну нулю.

Висновок. Не змінюючи дії даної сили на тверде тіло, точку, де прикладена ця сила, можна перенести вздовж її лінії дії в яку-завгодно точку, що належить тілу.

Доказ. Дійсно, на основі аксіом 1 і 2 це твердження легко довести. Хай сила $\bar{F}$ прикладена у точці A (рис. 3.2,а). Зігд-

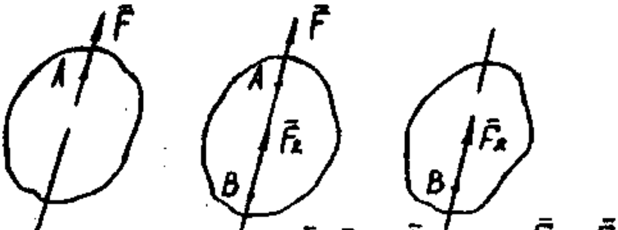

Рис. 3.2

а в с

но з аксіомою 2 можна у довільній точці B, взятій на лінії дії сили $\vec{F}$, прикласти зрівноважену систему сил, щоб виконувалось співвідношення $\vec{F} = \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ (рис. 3.2,в). Тоді відповідно до аксіоми 1 сили $\vec{F}$ і $\vec{F}_1$ будуть взаємно зрівноважені та їх можна відкинути. У результаті залишається сила $\vec{F}_2$, еквівалентна $\vec{F}$ (рис. 3.2,с). Таким чином, для твердих тіл сила є вектором ковзним.

<u>Аксіома 3</u> (про паралелограм сил).

Рівнодіюча двох сил, що перетинаються, дорівнює діагоналі паралелограма, побудованого на цих силах як на сторонах (рис. 3.3).

Таким чином, рівнодіюча двох сил дорівнюватиме

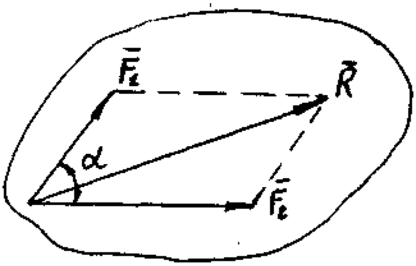

Рис. 3.3

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \tag{3.1}$$

Модуль рівнодіючої обчислюють за допомогою теореми косинусів:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}. \tag{3.2}$$

Напрямок рівнодіючої знаходять через теорему синусів.

<u>Аксіома 4</u> (про дію та протидію).

Сили, з якими діють одне на одне тіла, завжди рівні за модулем і спрямовані по одній прямій у протилежні боки (рис. 3.4). Але треба запам"ятати, що сили $\vec{F}_a$ та $\vec{F}_b$ не утворюють зрівноважену систему сил, тому що вони прикладені до різних тіл.

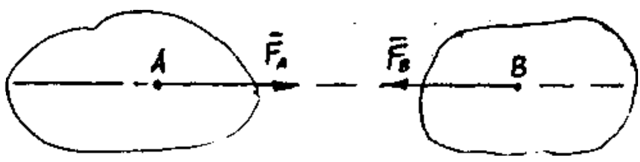

Рис. 3.4

<u>Аксіома 5</u> (про затвердіння).

Якщо тіло, що деформується, перебуває у рівновазі, то його рівновага не порушується, коли воно затвердіє.

<u>Аксіома 6</u> (про звільнення від в"язей).

Механічний стан твердого тіла не зміниться, якщо відкинути в"язи і замінити їх дію реакціями.

<u>Аксіома 7</u> (про накладання нових в"язей).

Рівновага твердого тіла не порушиться, якщо накласти на нього нові в"язи.

Л е к ц і я 4

Тема "ОСНОВНІ ТИПИ В"ЯЗЕЙ ТА ЇХ РЕАКЦІЇ"

При розв"язанні задач про рівновагу невільних тіл широко застосовується аксіома про звільнення від в"язей. В"язь - це обмеження, накладене на рух точок матеріальної системи. Відкидаючи в"язь, її дію замінюють силою, яка називається реакцією в"язі, тобто протидією в"язі на дію даного тіла. Таким чином, треба знати характер дії тієї чи іншої в"язі та напрямок її реакції.

Роль в"язей (опор) на практиці виконують різні тіла та конструкції, основними з яких є:

I. Ідеально гладенька поверхня, яка обмежує рух тіла лише у напрямку, перпендикулярному до поверхні, і дозволяє рухатись у всіх інших напрямках. Реакцією гладенької поверхні є одна сила $\bar{N}$, спрямована перпендикулярно до цієї поверхні або до дотичної у точці контакту тіла з поверхнею (рис. 4.I).

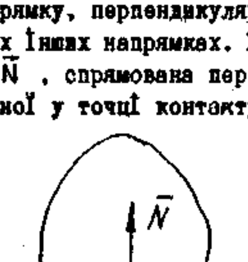

Рис. 4.1

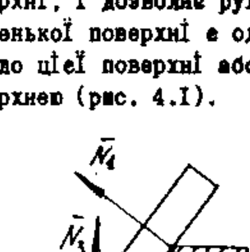

Рис. 4.2

2. Ребро (кут, вістря), коли реакція перпендикулярна до тіла або до дотичної до нього в точці контакту (рис. 4.2).

3. Рухомий шарнір або коток. У техніці за опору на ідеально гладеньку поверхню править опора на котках (рис. 4.3). Реакція котка спрямована перпендикулярно до поверхні, по якій котиться коток.

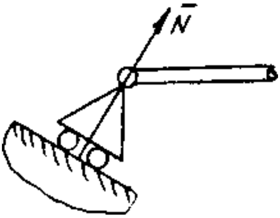

Рис. 4.3

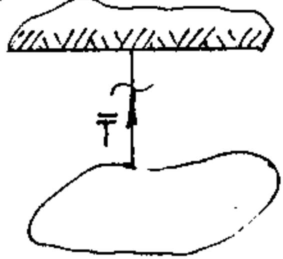

Рис. 4.4

4. Нитка (шнур, трос, ланцюг, пас), яка утримує тіло лише в напрямку свого натягу (рис. 4.4).

5. Циліндричний шарнір або підшипник (рис. 4.5).

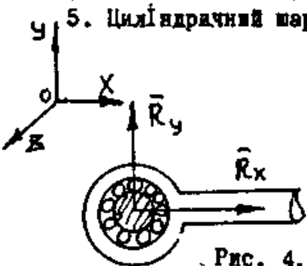

Рис. 4.5

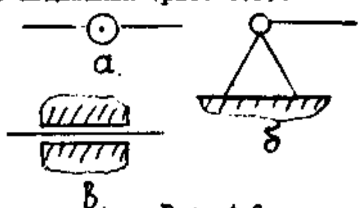

Рис. 4.6

Шарнір протидіє переміщенню стержня у напрямку осей OX і OY, але стержень може обертатись навколо осі OZ. Тому реакція циліндричного шарніра має дві складові $\vec{R}_x$ і $\vec{R}_y$, які лежать у площині, перпендикулярній до його осі. Модуль реакції визначають за формулою

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}. \tag{4.1}$$

Напрямок реакції знаходять через напрямні косинуси:

$$\cos(\widehat{R;i}) = \frac{R_x}{R},$$
$$\cos(\widehat{R;j}) = \frac{R_y}{R}. \tag{4.2}$$

Схематично циліндричний шарнір зображують у вигляді, показаному на рис. 4.6.

6. Ідеальний стержень, який є невагомим із шарнірами на кінцях, протидіє лише у напрямку своєї осі (рис. 4.7) або напрямку, що з"єднує шарніри на кінцях стержня у випадку криволінійного стержня (рис. 4.8), тобто має одну реакцію $\bar{R}$.

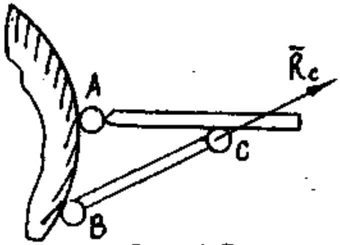

Рис. 4.7

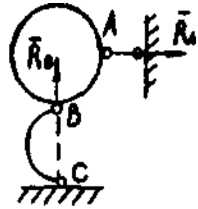

Рис. 4.8

7. Сферичний шарнір і підп"ятник, які дозволяють тілу вільно обертатись навколо осей Ox , Oy , Oz , але перешкоджають рухатись поступально у всіх трьох напрямках простору (рис. 4.9, 4.10).

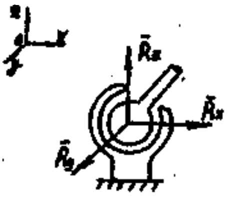

Рис. 4.9

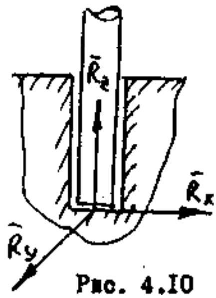

Рис. 4.10

Ці в"язі обмежують три ступені вільності тіла і мають три складові реакції $\bar{R}_x$, $\bar{R}_y$, $\bar{R}_z$. Повна реакція визначається за формулою

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \tag{4.3}$$

а її напрямок - через напрямні косинуси

$$\cos(\widehat{\bar{R};\bar{i}}) = \frac{R_x}{R},\ \cos(\widehat{\bar{R};\bar{j}}) = \frac{R_y}{R},\ \cos(\widehat{\bar{R};\bar{K}}) = \frac{R_z}{R}. \tag{4.4}$$

8. Нерухоме защемлення балки або консолі (у площині), яке виключає будь-яке переміщення балки у площині (як поступальне,

так і обертальне). Реакція нерухомого защемлення має дві взаємно перпендикулярні складові $\vec{R}_x$, $\vec{R}_y$ і момент защемлення M_A (рис. 4.11).

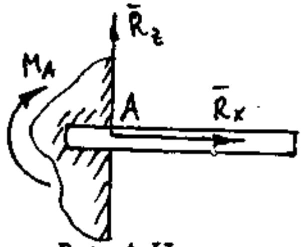

Рис. 4.11

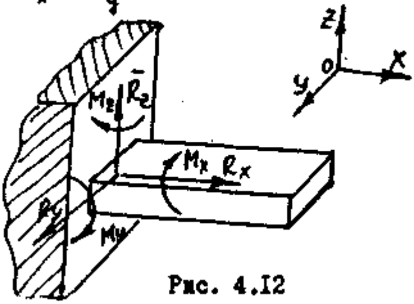

Рис. 4.12

9. Нерухоме защемлення балки у просторі (рис. 4.12), що виключає всяке переміщення балки у просторі та має три складові реакції $\vec{R}_x$, $\vec{R}_y$, $\vec{R}_z$ і три складові момента защемлення M_x, M_y, M_z, модулі та напрямок яких визначається вищенаведеними формулами.

Лекція 5

Тема "СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ"

Однією із задач статики є перетворення систем сил, внаслідок чого дана система сил замінюється іншою системою або силою, еквівалентною даній. Розглянемо у цьому плані збіжну просторову систему сил (рис. 5.1). З аксіоми про рівнодіючу двох сил, лінії дії яких перетинаються, ми зробили очевидний висновок, що коли маємо систему з декількох збіжних сил, то їх рівнодіюча знаходиться за правилом векторного додавання і являє собою замикаючий бік силового многокутника.

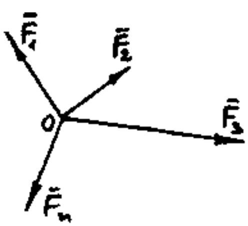

Рис. 5.1

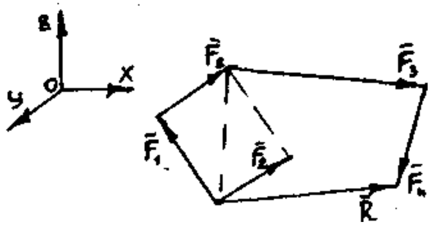

Рис. 5.2

Рівнодіюча $\vec{R}$ для n збіжних сил (рис. 5.2) дорівнює

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k, \qquad (5.I)$$

де $k = 1, 2, \ldots, n$, де n - кількість сил системи.

Отже, збіжна система сил зводиться до однієї сили - рівнодіючої $\vec{R}$, яка дорівнює векторній сумі всіх сил системи.

Для аналітичного розв"язання цієї задачі застосовується метод проекцій, який базується на відомій з векторної алгебри теоремі про проекції рівнодіючої на вісь. Ця теорема читається так: проекція рівнодіючої системи збіжних сил на будь-яку вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій складових сил на ту ж саму вісь.

Розкладемо вектор рівнодіючої $\vec{R}$ на компоненти по декартових осях координат:

$$\vec{R} = \vec{i} \cdot R_x + \vec{j} \cdot R_y + \vec{k} \cdot R_z, \qquad (5.2)$$

де $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ - одиничні орти координатних осей;

R_x, R_y, R_z - проекції вектора R на координатні осі.

У проекціях на декартові осі координат вираз (5.I) набуває вигляду:

$$\begin{cases} R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \ldots + F_{nx} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx}; \\ R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \ldots + F_{ny} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky}; \\ R_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \ldots + F_{nz} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kz}, \end{cases} \qquad (5.3)$$

де $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{kz}$ - суми проекцій всіх сил на координатні осі.

Для аналітичного визначення модуля рівнодіючої R та її напрямку маємо такі формули:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{kz}\right)^2}; \qquad (5.4)$$

$$\cos(\widehat{\bar{R};\bar{i}}) = \frac{R_x}{R}, \ \cos(\widehat{\bar{R};\bar{j}}) = \frac{R_y}{R}, \ \cos(\widehat{\bar{R};\bar{k}}) = \frac{R_z}{R}. \tag{5.5}$$

<u>Приклад</u>.

У криволінійному польоті з набиранням висоти (рис. 5.3) на літак діють чотири сили: $\bar{G}$ – вага літака; $\bar{Y}$ – підйомна сила; $\bar{Q}$ – сила лобового опору; $\bar{P}$ – сила тяги двигуна.

Положення сил показано на рис. 5.3,а.

Рівнодіюча $\bar{R}$ являє собою замикаючий бік силового багатокутника ABCDE (рис. 5.3,б).

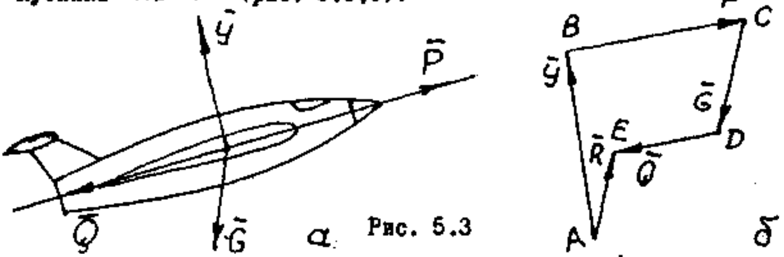

Рис. 5.3

Другою задачею статики є з'ясування необхідних умов, які повинна задовольняти система сил, щоб тіло перебувало у стані рівноваги. Визначимо ці умови для збіжної системи сил.

5.1. <u>Векторна умова рівноваги</u>

Якщо при побудові силового багатокутника виявиться, що кінець вектора останньої n-ї сили збігається з початком вектора першої сили, тобто силовий багатокутник буде замкнутим, то рівнодіюча такої системи сил дорівнює нулю. У цьому випадку дія збіжної системи сил на тіло еквівалентна нулю, і ми можемо записати

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k = 0. \tag{5.6}$$

Таким чином, геометричною (або векторною умовою рівноваги збіжної системи сил є умова рівності нулю її рівнодіючої. Це правило формулюється так: для рівноваги збіжної системи сил необхідно і достатньо, щоб силовий багатокутник був замкнутим.

<u>Приклад</u>.

Прикладом взаємно зрівноваженої збіжної системи сил може

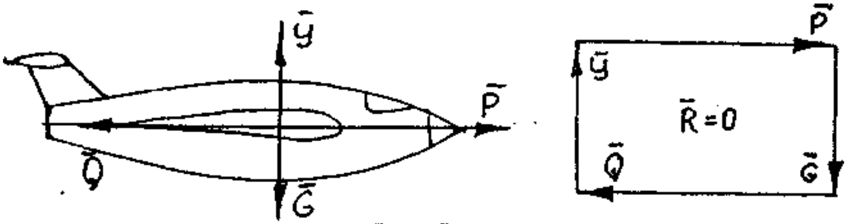

Рис. 5.4

бути система сил, прикладена до літака у горизонтальному сталому польоті (рис. 5.4,а). У цьому разі підйомна сила $\bar{Y}$ дорівнює вазі літака $\bar{G}$ і спрямована у протилежний бік, а сила тяги $\bar{P}$ двигуна дорівнює силі опору $\bar{Q}$ і спрямована у протилежний відносно неї напрямок. Отже, рівнодіюча цих сил дорівнює нулю (рис. 5.4,б).

5.2. Аналітичні умови рівноваги

Проекції виразу (5.6) на декартові осі координат дають нам аналітичні умови рівноваги збіжної просторової системи сил:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{xk} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{yk} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{zk} = 0. \tag{5.7}$$

Вони читаються так: для рівноваги збіжної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій всіх сил на осі декартової системи координат дорівнювала нулю.

Якщо сили збіжної системи сил діють в одній площині, то для рівноваги збіжної системи сил необхідна рівність нулю проекцій всіх сил на дві координатні осі:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{xk} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{yk} = 0. \tag{5.8}$$

Умови (5.7) і (5.8) називаються аналітичними умовами рівноваги збіжної системи сил і застосовуються при розв"язуванні задач статики для визначення невідомих сил і реакцій в"язей.

Лекція 6

Тема "ТЕОРЕМА ПРО ТРИ СИЛИ"

Якщо вільне тверде тіло знаходиться у рівновазі під дією трьох непаралельних сил, що лежать в одній площині, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці. Цей висновок неважко одержати з першої та третьої аксіом статики (рис. 6.1). Перенесемо дві сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ вздовж їх лінії дії в точку перетину O і складемо їх відповідно до третьої аксіоми, а потім зрівноважимо, згідно з першою аксіомою, одержану рівнодійну третьою силою $\vec{F}_3$:

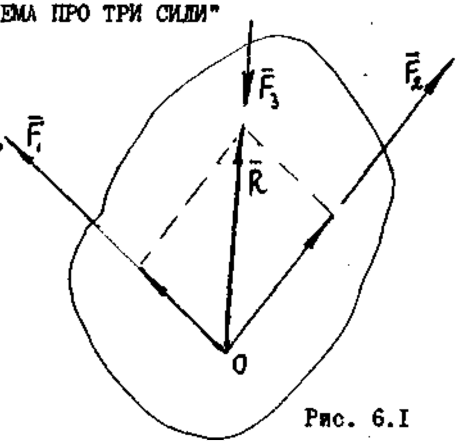

Рис. 6.1

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad \vec{F}_3 = -\vec{R}. \tag{6.1}$$

Приклад.

Нехай балка AD вагою $\vec{G}$, закріплена на нерухомому циліндричному шарнірі A, спирається в точці B на нерухому гладеньку опору (рис. 6.2). Визначити напрямок модуля реакцій опор. Реакція $\vec{N}$ нерухомої опори має напрямок, перпендикулярний до балки AD. Реакцію нерухомого циліндричного шарніра A позначимо $\vec{R}_A$. Оскільки три сили $\vec{N}$, $\vec{R}_A$, $\vec{G}$ взаємно зрівноважені, то лінії їх дії перетнуться в одній точці O.

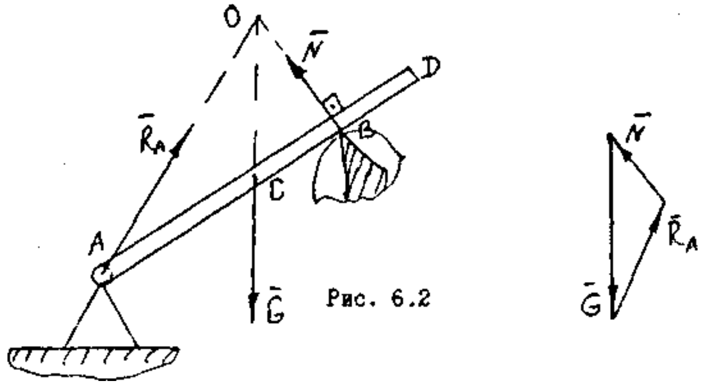

Рис. 6.2

Лекція 7

Тема "МОМЕНТ СИЛИ ВІДНОСНО ТОЧКИ"

Сила характеризується модулем, напрямком та точкою прикладання або лінією дії.

Всі ці три параметри можуть бути об"єднані в одному розумінні - момент сили. Якщо закріпити тіло в одній точці O та прикласти до нього силу $\vec{F}$, лінія дії якої не проходитиме через цю точку, то тіло обертатиметься навколо цієї точки (рис. 7.1).

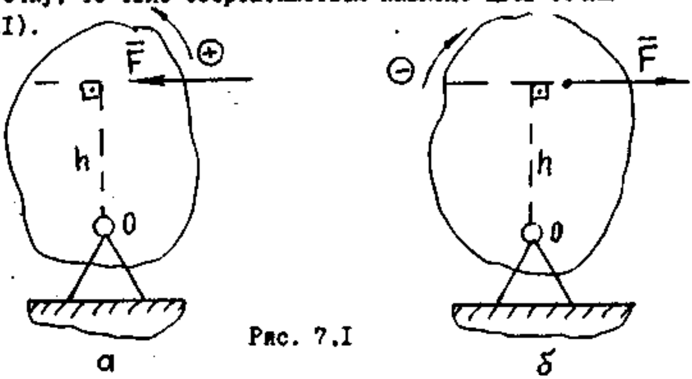

Рис. 7.1

Обертальний ефект сили залежить:

1. Від модуля сили $\vec{F}$ і плеча h. Плечем сили називається перпендикуляр, опущений із точки O на лінію дії сили.

2. Від положення площини обертання, яка проходить через точку O та вектор $\vec{F}$.

3. Від напрямку повороту.

Моментом сили $\vec{F}$ відносно точки O називається добуток модуля даної сили на плече h:

$$M_0(\vec{F}) = \pm F \cdot h. \qquad (7.1)$$

Знак момента сили відносно точки визначається напрямком обертання тіла навколо точки O: при повороті проти годинникової стрілки - знак "плюс", за годинниковою стрілкою - знак "мінус" (див. рис. 7.1).

Л е к ц і я 8

Тема "МОМЕНТ СИЛИ ВІДНОСНО ЦЕНТРА ЯК ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК"

Момент сили відносно точки має величину, напрямок та площину дії.

Якщо система сил довільна і просторова, то для характеристики обертальної дії всіх сил на тіло потрібно враховувати всі три параметри. Це легко зробити, якщо визначити момент сили відносно точки як векторний добуток радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного із центра O до точки прикладання сили, і сили $\vec{F}$ (рис. 8.1).

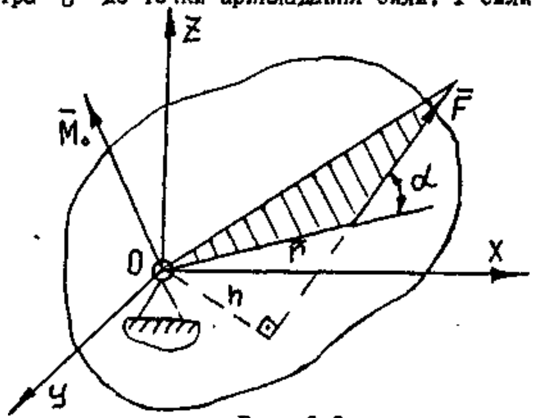

Рис. 8.1

Вектор момента сили відносно точки O перпендикулярний до площини, в якій лежать дана точка і сила, і спрямований у той бік, звідки обертання тіла під дією сили відбувається проти годинникової стрілки. Запишемо вираз для момента сили $\vec{F}$ відносно точки O :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} . \tag{8.1}$$

Модуль цього векторного добутку

$$M_O(\vec{F}) = r \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot h, \tag{8.2}$$

де $r \cdot \sin(\alpha) = h$ – плече сили;

α – кут між векторами $\vec{r}$ і $\vec{F}$.

Отже, ми одержали таке ж визначення модуля момента сили відносно точки, як і у формулі (7.1), і цим довели правомірність векторного запису момента сили відносно точки.

Таким чином, вектор момента сили відносно точки дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного з даної точки до точки прикладання сили, на вектор сили $\vec{F}$. Напрямок вектора момента сили визначається за правилом векторного добутку, тобто він перпендикулярний до площини, в якій лежать точка і сила, і спрямований у той бік, звідки поворот першого вектора $\vec{r}$ до другого вектора $\vec{F}$ здійснюється проти годинникової стрілки найкоротшим шляхом.

Вектор момента сили відносно точки $\bar{M}_o$ можемо розкласти на компоненти по декартових осях координат:

$$\vec{M}_0 = \vec{i}\cdot M_x + \vec{j}\cdot M_y + \vec{k}\cdot M_z, \tag{8.3}$$

де M_x, M_y, M_z – проекції момента $\bar{M}$ на координатні осі (момента сили $\vec{F}$ відносно осей).

Формула (8.I) дозволяє визначати момент $\bar{M}_o$ аналітично, розкривши визначник:

$$\vec{M}_0 = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}, \tag{8.4}$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – одиничні орти; x, y, z – координати точки прикладання сили; F_x, F_y, F_z – проекції сили на осі координат.

Із визначника (8.4) для проекцій момента сили маємо такі вирази:

$$M_x = y\cdot F_z - z\cdot F_y,\quad M_y = z\cdot F_x - xF_z,$$
$$M_z = x\cdot F_y - y\cdot F_x. \tag{8.5}$$

Модуль момента сили відносно точки O та його напрямок знаходимо за співвідношеннями:

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}\ ; \tag{8.6}$$

$$\cos(\widehat{\bar{M}_0;\bar{i}}) = \frac{M_x}{M},\quad \cos(\widehat{\bar{M}_0;\bar{j}}) = \frac{M_y}{M_o},$$
$$\cos(\widehat{\bar{M}_0;\bar{k}}) = \frac{M_z}{M_o}. \tag{8.7}$$

Проекції M_x, M_y, M_z являють собою моменти сили відносно координатних осей Ox, Oy, Oz. Вміння визначати моменти сил відносно координатних осей є необхідним для складання рівнянь рівноваги при розв"язуванні задач на просторові системи сил. Однак користуватись формулами (8.5) досить незручно, і тому розглянемо набагато простіший спосіб визначення момента сили відносно осі.

Лекція 9

Тема "МОМЕНТ СИЛИ ВІДНОСНО ОСІ"

Якщо момент сили відносно деякого центра O викликає обертальний рух тіла навколо цього центра, то момент сили відносно осі викликає, зрозуміло, обертання тіла навколо даної осі. При цьому задача визначення плеча сили відносно осі дещо складніша, ніж визначення плеча сили відносно точки (рис. 9.1).

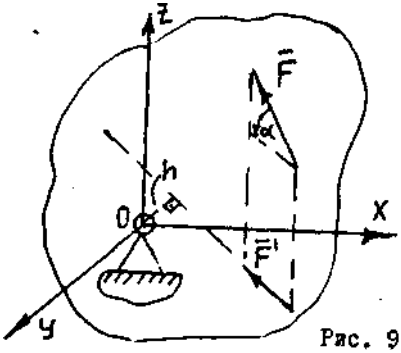

Рис. 9.1

Щоб знайти плече сили $\vec{F}$ відносно осі Oz, спроектуємо силу $\vec{F}$ на площину Oxy, перпендикулярну до осі Oz, а саму вісь Oz також спроектуємо на цю ж площину. В результаті одержимо проекцію сили $\vec{F}'$ і точку O. Далі з точки O опускаємо перпендикуляр на лінію дії проекції сили $\vec{F}'$. Це й буде шукане нами плече сили відносно осі.

Модуль момента сили відносно осі обчислимо як добуток модуля проекції сили $\vec{F}'$ на плече h:

$$M_z(\vec{F}) = F' \cdot h = F \cdot h \cdot \cos\alpha .$$

Знак момента визначається, як і раніше, залежно від напрямку повороту тіла навколо осі під дією даної сили. Якщо дивитися з кінця осі, то видно, що обертання здійснюється проти годинникової стрілки - знак "плюс", якщо навпаки - знак "мінус". Таким чином, момент сили відносно осі дорівнює добутку проекції сили на площину, перпендикулярну до даної осі, на плече. Плечем є перпендикуляр, опущений з точки перетину осі площиною на лінію дії проекції сили.

Момент сили відносно осі дорівнює нулю, коли вісь і сила лежать в одній площині.

Лекція 10

Тема "ЗВЕДЕННЯ СИСТЕМИ ДВОХ ПАРАЛЕЛЬНИХ СИЛ ДО РІВНОДІЮЧОЇ"

Дві паралельні сили можна розглядати як граничний випадок двох збіжних сил, коли точка перетину віддалена у безконечність. Залежно від просторової орієнтації системи паралельних сил поділяють на плоскі та просторові.

10.1. Складання паралельних сил, які спрямовані в один бік

Розглянемо систему двох паралельних сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, прикладених у точках A і B твердого тіла (рис. 10.1) і спрямованих в один бік. Для визначення рівнодіючої цих сил і точки її прикладання зробимо так: прикладемо у точках A і B дві сили $\vec{Q}_1$ і $\vec{Q}_2$, рівні за величиною і протилежні за напрямком. Склавши попарно сили $\vec{F}_1$ і $\vec{Q}_1$ та $\vec{F}_2$ і $\vec{Q}_2$, одержимо їх рівнодіючі

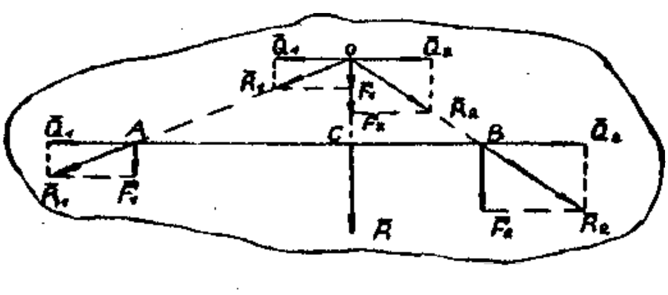

Рис. 10.1

$\vec{R}_1$ і $\vec{R}_2$, лінії дії яких перетинаються у точці O.

Скориставшись властивістю сили як ковзного вектора, перенесемо сили $\vec{R}_1$ і $\vec{R}_2$ в точку O, а потім розкладемо їх на дві попередні складові $\vec{F}_1$ і $\vec{Q}_1$ та $\vec{F}_2$ і $\vec{Q}_2$. Отже, прикладені в точці O сили $\vec{Q}_1$ і $\vec{Q}_2$ взаємно зрівноважуються, а спрямовані в один бік сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ матимуть рівнодійну, модуль якої дорівнює сумі модулів цих сил:

$$R = F_1 + F_2 \tag{10.1}$$

Лінія дії рівнодійної R перетинає відрізок AB у точці C, яка ділить цей відрізок на частини, обернено пропорційні модулям сил:

$$\frac{AC}{F_1} = \frac{CB}{F_2} = \frac{AB}{R} \tag{10.2}$$

Таким чином, рівнодійна двох паралельних сил, спрямованих в один бік, за модулем дорівнює сумі модулів цих сил, спрямована у той же бік, що й сили, і ділить відстань між точками прикладання сил на відрізки, обернено пропорційні силам.

10.2. Складання паралельних сил, спрямованих у протилежні боки

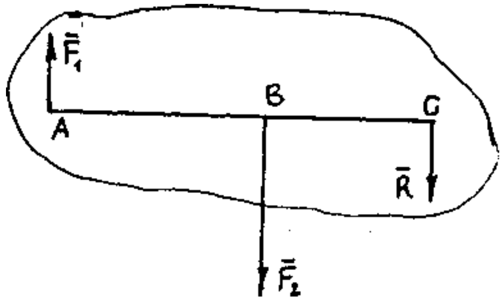

Рис. 10.2

Для визначення рівнодійної двох паралельних сил, спрямованих у протилежні боки (рис. 10.2), скористаємось попереднім заходом. Звідси матимемо, що модуль їх рівнодійної дорівнює різниці модулів складових сил:

$$R = F_2 - F_1, \qquad (10.3)$$

якщо $F_2 > F_1$.

Лінія дії одержаної рівнодіючої сили $\vec{R}$ перетинає продовження відрізка AB у точці C, а відстані точок A і B від точки C обернено пропорційні модулям сил:

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{CB}{F_1} = \frac{AB}{R}. \qquad (10.4)$$

Таким чином, рівнодіюча двох паралельних сил, спрямованих у різні боки, за модулем дорівнює різниці модулів цих сил, спрямована в бік більшої сили та ділить відстань між точками прикладання даних сил зовнішнім чином на частини, обернено пропорційні модулям сил.

10.3. Система двох рівних паралельних сил, спрямованих у різні боки. Пара сил

Розглянемо випадок визначення рівнодіючої двох паралельних сил, рівних за модулем і спрямованих у різні боки (так званої пари сил):

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2, \quad \vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2. \qquad (10.5)$$

Повторивши всю процедуру попереднього випадку визначення рівнодіючої паралельних сил, ми переконаємося в тому, що одержані сили R_1 і R_2 також рівні та паралельні між собою, лінії їх дії не перетинаються, а модуль рівнодіючої пари сил дорівнює нулю:

$$R = F_1 - F_2 = 0. \qquad (10.6)$$

Однак дія пари сил на тіло - ненульова і викликає обертальний рух. Мірою обертальної дії пари сил служить момент пари, величина якого дорівнює добутку модуля однієї із сил пари на плече:

$$M(\vec{F}_1; \vec{F}_2) = F_1 \cdot h = F_2 \cdot h. \qquad (10.7)$$

Плечем називається найкоротша відстань (перпендикуляр) між лініями дії сил пари $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ (рис. 10.3).

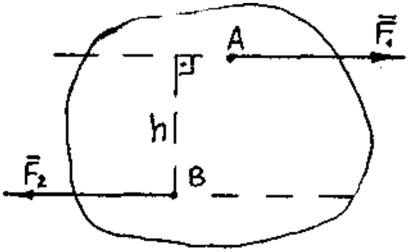

Рис. 10.3

Напрямок обертання, створеного парою сил, визначає знак момента пари: якщо пара сил обертає тіло проти годинникової стрілки - момент позитивний, якщо навпаки - негативний. Отже, момент пари сил має величину, напрямок і площину дії, а тому є векторною величиною.

Площина N , де діє пара сил, називається площиною дії пари (рис. 10.4).

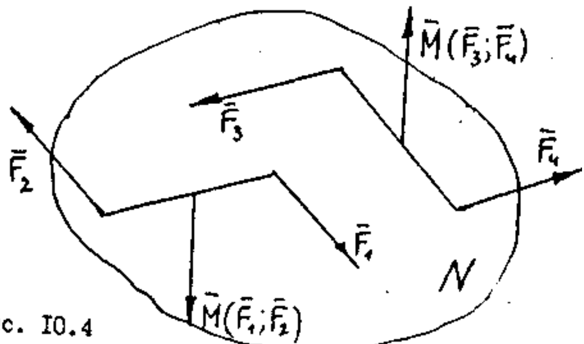

Рис. 10.4

Вектор момента пари сил перпендикулярний до площини, в якій лежить, і спрямований у той бік, звідки обертання тіла, що здійснюється парою, відбувається проти руху годинникової стрілки. На рис. 10.4 показано дві пари сил, які діють в одній площині та мають протилежно спрямовані вектори моментів.

Визначимо, чому дорівнюватиме момент пари сил, і виявимо його властивості.

Нехай O - довільна точка простору (рис. 10.5), а $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ - сили, що утворюють пару, яка прикладена в точках A і

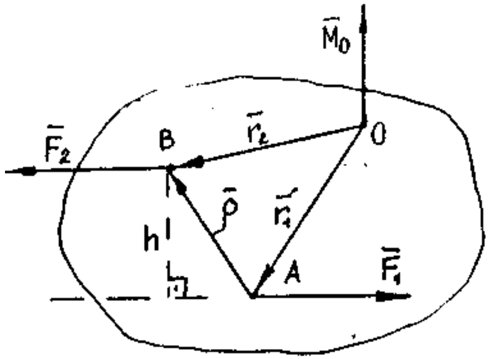

Рис. 10.5

6 . З визначення момента сили відносно точки (8.1) маємо:

$$\bar{M}(\bar{F}_1) + \bar{M}(\bar{F}_2) = \bar{r}_1 \times \bar{F}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{F}_2 =$$

$$= \bar{r}_1 \times (-\bar{F}_2) + \bar{r}_2 \times \bar{F}_2 = (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \times \bar{F}_2 = \bar{\rho} \times \bar{F}_2. \qquad (10.7)$$

Обчислена векторна сума не залежить від положення точки O , відносно якої визначаються моменти. Векторний добуток $\bar{\rho} \times \bar{F}$ називається моментом пари сил ($\bar{F}_1$; $\bar{F}_2$) і позначається $\vec{M}$ ($\vec{F}_1$; $\vec{F}_2$):

$$\vec{M}(\vec{F}_1; \vec{F}_2) = \bar{\rho} \times \vec{F}. \qquad (10.8)$$

Модуль момента пари сил дорівнює

$$M(\vec{F}_1; \vec{F}_2) = F \cdot h.$$

Момент пари сил - вектор вільний.

Висновки:

1. Пару сил, не змінюючи її дії на тіло, можна перенести куди завгодно в площині, в якій лежить пара.

2. Пару сил, не змінюючи її дії на тіло, можна перенести у паралельну площину.

3. У парі сил, не змінюючи величини її момента, можна відповідно змінювати модулі сил і довжину плеча.

4. Дві пари сил з рівними моментами еквівалентні.

5. Декілька пар сил, що лежать в одній площині, можна заміняти однією еквівалентною парою з моментом, що дорівнює векторній сумі моментів цих пар.

Лекція II

Тема "СКЛАДАННЯ ПАР СИЛ У ПРОСТОРІ. УМОВИ РІВНОВАГИ ПАР"

Декілька пар сил, що лежать у різних площинах, можна замінити однією еквівалентною парою з моментом, що дорівнює векторній сумі моментів цих пар.

Нехай на тіло діє n пар, які лежать в різних площинах. Складаючи ці пари у послідовному порядку та застосовуючи кожний раз аксіому про складання двох векторів, ми встановимо, що ця система пар заміняється одною рівнодіючою парою з вектором-моментом

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_k . \qquad (II.1)$$

Вектор $\vec{M}$ (рис. II.I) можна знайти також як замикаючу сторону багатокутника, побудованого із складових векторів-моментів пар.

Однак якщо складові вектори не лежать в одній площині, то обчислювання краще проводити аналітично.

На основі теореми про проекції суми векторів на вісь запишемо (див. рис. II.I):

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} M_{kx}, \quad M_y = \sum_{k=1}^{n} M_{ky}, \quad M_z = \sum_{k=1}^{n} M_{kz} . \qquad (II.2)$$

Модуль момента пари

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} . \qquad (II.3)$$

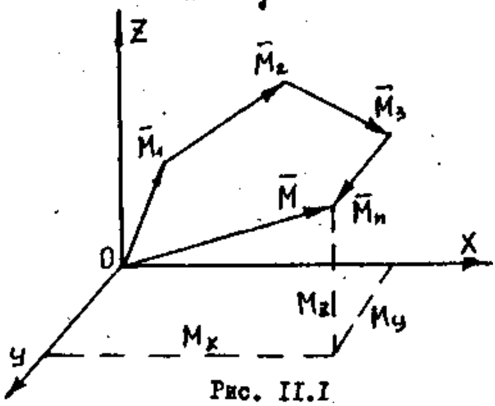

Рис. II.I

Звідси легко знаходяться умови рівноваги системи пар. Для рівноваги пар необхідно і достатньо, щоб вектор-момент рівнодіючої пари дорівнював нулю:

$$\bar{M} = \sum_{k=1}^{n} \bar{M}_k = 0. \tag{II.4}$$

Це означає, що багатокутник, побудований з векторів-моментів, має бути замкнутим, звідки маємо аналітичні умови рівноваги:

$$\sum_{k=1}^{n} M_{kz} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{kz} = 0. \tag{II.5}$$

Лекція 12

Тема "ДОВІЛЬНА СИСТЕМА СИЛ. ЗВЕДЕННЯ ДО ОДНОГО ЦЕНТРА"

Довільною системою сил називається сукупність прикладених до твердого тіла сил, лінії дії яких довільно орієнтовані у просторі (рис. 12.1).

Розглядаючи збіжну систему сил, ми переконалися, що систему можна замінити однією рівнодіючою силою, яка дорівнює векторній сумі всіх сил, що входять до системи. Систему паралельних сил також можливо звести або до рівнодіючої сили, або до пари сил.

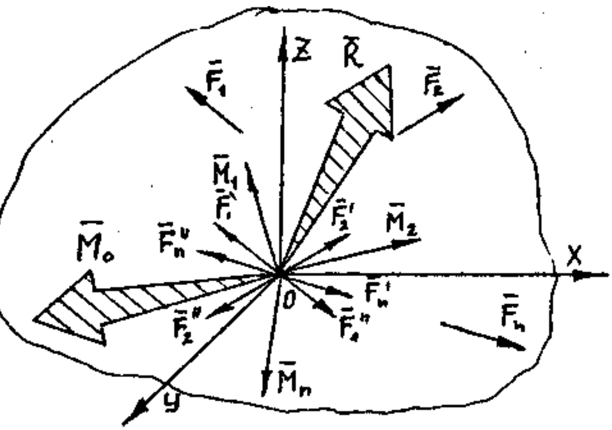

Рис. 12.1

Спробуємо спростити прикладену до абсолютно твердого тіла довільну систему сил, звівши всі сили до одного заданого центра O (див. рис. 12.1). Почнемо із сили $\vec{F}_1$. Прикладемо у центрі O зрівноважену систему сил, щоб виконувалась умова

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_1' = -\vec{F}_1'', \qquad (12.1)$$

тобто сили, рівні за модулем і паралельні між собою. Дві паралельні, рівні за модулем і протилежні за напрямком сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_1''$, ми можемо трактувати як пару сил ($\vec{F}_1$ і $\vec{F}_1''$), а силу $\vec{F}_1'$, прикладену в точці O_1 - як перенесену в точку O силу $\vec{F}_1$.

Повторивши аналогічну операцію перенесення до центра O сил $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ..., $\vec{F}_n$, одержимо систему сил $\vec{F}_1'$, $\vec{F}_2'$, ..., $\vec{F}_n'$, прикладених у точці O (збіжну систему сил), і систему пар сил з моментами M_1, M_2, M_3, ..., M_n (див. рис. 12.1), яку одержали внаслідок проведених операцій перенесення. Векторна сума всіх збіжних сил дасть рівнодіючу, або так званий головний вектор $\vec{R}$ системи, прикладений у точці O, а векторна сума моментів усіх приєднаних пар сил - головний момент системи $\vec{M}_0$.

Таким чином, довільну систему сил можна звести до однієї рівнодіючої сили, що дорівнює головному вектору, прикладеному у центрі зведення, та до однієї пари сил, яка дорівнює головному моменту відносно того ж центра:

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k, \qquad \vec{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{F}_k; \vec{F}_k''). \qquad (12.2)$$

Головний момент системи приєднаних пар сил можна розглядати і як векторну суму моментів всіх вихідних сил відносно центра O:

$$\vec{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{F}_k). \qquad (12.3)$$

Модулі векторів $\vec{R}$ і $\vec{M}_0$ та їх напрямок визначаються з формул:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \qquad (12.4)$$

$$\cos(\widehat{\vec{R};\vec{i}}) = \frac{R_x}{R}, \cos(\widehat{\vec{R};\vec{j}}) = \frac{R_y}{R}; \cos(\widehat{\vec{R};\vec{k}}) = \frac{R_z}{R}; \qquad (12.5)$$

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}\,; \tag{12.6}$$

$$\cos(\widehat{\overline{M}_0; \overline{i}}) = \frac{M_x}{M}, \quad \cos(\widehat{\overline{M}_0; \overline{j}}) = \frac{M_y}{M},$$

$$\cos(\widehat{\overline{M}_0; \overline{k}}) = \frac{M_z}{M}. \tag{12.7}$$

З'ясуємо тепер, як позначається на головному векторі та головному моменті зміна положення центра зведення довільної системи сил.

Цілком очевидно, що головний вектор $\overline{R}$ не залежить від положення центра зведення, тому що сили у цей центр переносяться паралельно до самих себе, а це означає, що багатокутник сил залишається незмінним.

Головний момент $\overline{M}_0$ залежатиме від положення центра зведення, тому що змінюватимуться його модуль і напрямок. При цьому головний момент сил відносно нового центра зведення зміниться на величину, що дорівнює моменту попереднього головного вектора системи відносно нового центра:

$$\overline{M}_{01} = \overline{M}_0 + \overline{M}_{01}(\overline{R}), \tag{12.8}$$

де $\overline{M}_0$ і $\overline{M}_{01}$ – головні моменти даної системи сил відносно попереднього центра O і нового O_1, а $\overline{M}_{01}(\overline{R})$ – момент головного вектора $\overline{R}$ відносно нового центра зведення, який визначається за формулою

$$\overline{M}_{01}(\overline{R}) = \overline{OO_1} \times \overline{R}. \tag{12.9}$$

При зведенні довільної системи сил до заданого центра повинні мати місто лише такі випадки:

1. Головний вектор $\overline{R} \neq 0$, а головний момент $\overline{M}_0 = 0$, тобто система сил зводиться до рівнодійної, а тіло рухається поступально.

2. Головний вектор $\overline{R} = 0$, а головний момент $\overline{M}_0 \neq 0$, тобто система сил зводиться до пари і тіло при цьому обертається.

3. Головний вектор $\overline{R} = 0$ і головний момент $\overline{M}_0 = 0$, тоб-

то під дією такої системи сил тіло знаходиться у рівновазі.

4. Головний вектор $\vec{R} \neq 0$ і головний момент $\vec{M}_0 \neq 0$, тобто при цьому можуть бути такі три окремі випадки:

А) Коли головний вектор паралельний головному моменту $\vec{R} \parallel \vec{M}_0$ (рис. 12.2,а), то це означає, що система зводиться до сили $\vec{R}$ і пари ($\vec{F}$; $\vec{F}'$), яка лежить у площині, перпендикулярній до сили (рис. 12.2,б).

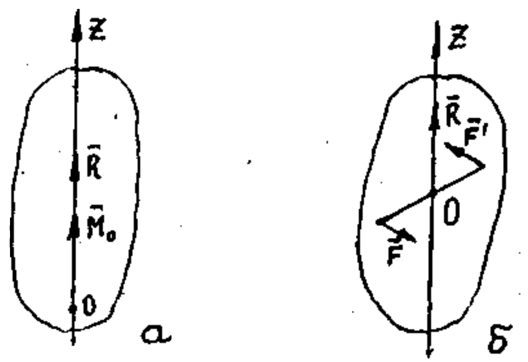

Рис. 12.2

Така сукупність сили і пари називається динамічним гвинтом (динамою).

Б) Коли головний вектор перпендикулярний до головного моменту $\vec{R} \perp \vec{M}_0$ (рис. 12.3), то така система також зводиться

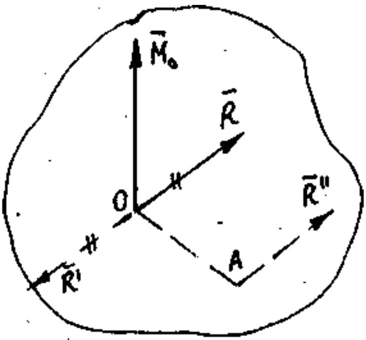

Рис. 12.3

до рівнодіючої $\vec{R}'' = \vec{R}$, але не проходить через центр O. Дійсно, коли $\vec{R} \perp \vec{M}_0$, пара і сила лежать в одній площині. Тоді вибираємо сили пари ($\vec{R}'$, $\vec{R}''$) такими, щоб виконувалась умова

$$\vec{R} = \vec{R}'' = -\vec{R}',$$

і у точці O матимемо взаємно зрівноважені сили.

Сила R дорівнюватиме R'' і прикладатиметься у точці A. Відстань OA визначається за формулою

$$OA = \frac{M_0}{R}. \tag{12.10}$$

в) Якщо для даної системи сил кут між $\vec{R}$ і $\vec{M}_0$ є довільним, то така система сил також приводиться до динами, але вісь останньої не проходитиме через центр O (рис. 12.4). Розкладемо вектор $\vec{M}_0$ на складові $\vec{M}_1$ і $\vec{M}_2$. Пару $\vec{M}_2$ та силу $\vec{R}$

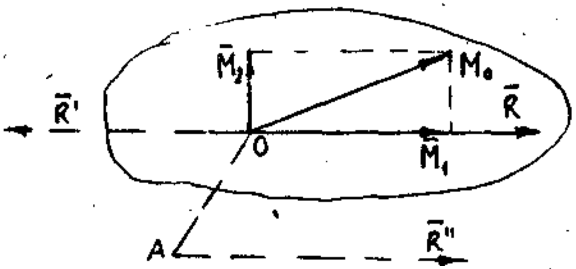

Рис. 12.4

можна, як і в попередньому випадку, замінити рівнодіючою силою $\vec{R}''$, прикладеною у точці A, тому що вони взаємно перпендикулярні: $\vec{M}_2 \perp \vec{R}$.

В результаті дана система сил заміниться силою $\vec{R}'' = \vec{R}$ і парою з моментом $\vec{M}_1$, тобто динамою з віссю, яка проходить через точку A.

Лекція 13

Тема "УМОВИ РІВНОВАГИ ДОВІЛЬНОЇ СИСТЕМИ СИЛ"

<u>У векторній формі</u>. З результатів зведення довільної системи сил до головного вектора $\vec{R}$ і головного моменту $\vec{M}_0$ ми бачимо, що тверде тіло перебуватиме у рівновазі лише тоді, коли і головний вектор $\vec{R}$, і головний момент $\vec{M}_0$ системи дорівнюватиме нулеві, тобто

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0, \quad \vec{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{F}_k) = 0. \tag{13.1}$$

Геометрично це означає, що багатокутник сил і багатокутник моментів є замкнутими.

<u>В аналітичній формі</u>. Проектуючи рівняння (13.1) на декартові осі координат, запишемо аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил у вигляді шести рівнянь (відповідно до шести ступенів вільності тіла у просторі).

Ці умови читаються так: для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій всіх сил на три взаємно перпендикулярні осі і суми моментів усіх сил відносно цих осей дорівнювали нулю:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} M_x(\vec{F}_k) = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} M_y(\vec{F}_k) = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k) = 0, \end{cases} \tag{13.2}$$

де F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекції сил на координатні осі;
M_x, M_y, M_z – моменти сил відносно цих осей.

Якщо тіло до прикладання сил знаходилось у стані спокою, то перші три рівняння (13.2) виражають необхідні умови відсутності переміщень тіла вздовж осей координат, а три останні – відсутність обертання навколо цих осей.

Приклад.

Однорідна прямокутна рама вагою $\bar{G}$ прикріплена до стіни за допомогою шарового шарніра A і завіси B та утримується у горизонтальному положенні ниткою CE, прив"язаною в точці C рами і до гвіздка E, забитого в стіну на одній вертикалі з A: $\angle ECA = \angle BAC$.

Визначити натяг нитки та опорні реакції (рис. 13.1).

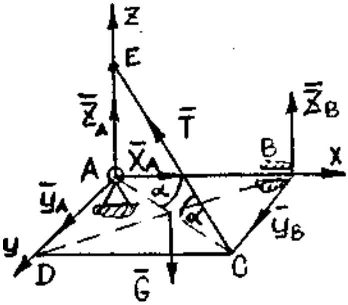

Рис. 13.1

Розв"язання задачі виконуватимемо за таким планом:

1. Зобразимо схему задачі.
2. Виберемо координатні осі.
3. Зобразимо задані сили. Це сила ваги рами $\bar{G}$, прикладена на перетині діагоналей прямокутника $ABCD$.
4. Умовно відкинемо в"язі і замінимо їх дію реакціями в"язей.
5. Складемо шість рівнянь рівноваги, тому що задача просторова:

$$\begin{cases} \sum F_x = x_A - T\cdot\cos^2\alpha = 0, \\ \sum F_y = y_A + y_B - T\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha = 0, \\ \sum F_z = z_A + z_B - G + T\sin\alpha = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sum M_x = G\cdot\frac{AD}{2} - T\cdot AD\cdot\sin\alpha = 0, \\ \sum M_y = -G\frac{AB}{2} + z_B\cdot AB + T\cdot AB\cdot\sin\alpha = 0, \\ \sum M_z = -y_B\cdot AB = 0. \end{cases}$$

В результаті маємо шість невідомих і шість рівнянь рівноваги. Задачу розв"язано.

Якщо всі сили довільної системи діють в одній площині, то аналітичні умови рівноваги довільної плоскої системи сил зводяться до запису трьох рівнянь (відповідно кількості ступенів вільності тіла на площині).

<u>Перша, або основна, форма запису умов рівноваги:</u>

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{O_z}(\bar{F}_k) = 0, \qquad (13.3)$$

де $\sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\bar{F}_k)$ – момент всіх сил відносно осі Oz, яка перпендикулярна до площини Oxy, де діють сили, і може бути проведена з будь-якої точки площини. А тому цей вираз ми можемо замінити визначенням суми моментів цих сил відносно будь-якої точки площини.

Таким чином, для рівноваги довільної системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій всіх сил на дві взаємно перпендикулярні осі та алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно будь-якої точки площини дорівнювали нулю.

Друга форма умов рівноваги. Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів всіх сил відносно кожної з двох будь-яких точок A і B, взятих в площині системи, і алгебраїчна сума проекцій всіх сил на будь-яку вісь Ox, не перпендикулярну до AB, дорівнювали нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\bar{F}_k)=0,\quad \sum_{k=1}^{n} M_B(\bar{F}_k)=0,\quad \sum_{k=1}^{n} F_{kx}=0. \tag{13.4}$$

Третя форма умов рівноваги (рівняння трьох моментів). Для рівноваги довільної системи плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів всіх сил відносно кожної з трьох будь-яких точок A, B, C, які не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\bar{F}_k)=0,\ \sum_{k=1}^{n} M_B(\bar{F}_k)=0,\ \sum_{k=1}^{n} M_C(\bar{F}_k)=0. \tag{13.5}$$

Якщо ми маємо справу з системою паралельних сил, то кількість рівнянь зменшується. Нехай сили паралельні осі OZ, і тоді для просторової системи паралельних сил маємо:

$$\sum_{k=1}^{n} M_x(\bar{F}_k)=0,\quad \sum_{k=1}^{n} M_y(\bar{F}_k)=0,\quad \sum_{k=1}^{n} F_{kz}=0. \tag{13.6}$$

Для плоскої системи сил, якщо сили паралельні осі OY, можна записати:

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\bar{F}_k)=0,\quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky}=0. \tag{13.7}$$

Лекція 14

Тема "РІВНОВАГА СИСТЕМИ ТВЕРДИХ ТІЛ. СТАТИЧНО ВИЗНАЧЕНІ ТА НЕВИЗНАЧЕНІ ЗАДАЧІ"

До цього ми розглядали рівновагу одного твердого тіла. Однак при статичному розрахунку багатьох інженерних конструкцій доводиться розглядати рівновагу системи твердих тіл, з"єднаних якими-небудь в"язями.

В"язі, які з"єднують тіла даної конструкції, а також сили взаємодії між тілами розглядуваної конструкції називаються внутрішніми.

В"язі, що скріплюють конструкцію з тілами, які до неї не входять, і сили, з якими діють на конструкцію зовнішні тіла, називаються зовнішніми.

Якщо після відкидання зовнішніх в"язей конструкція залишається жорсткою, то для неї задачі статики розв"язуються як для абсолютно твердого тіла.

Іноді доводиться розв"язувати задачі на рівновагу складних конструкцій, які після відкидання зовнішніх в"язей не залишаються жорсткими (рис. 14.1,а). Якщо відкинути опори A і B, то конструкція не буде жорсткою, а її частини можуть повертатися коло шарніра C (рис. 14.1,б).

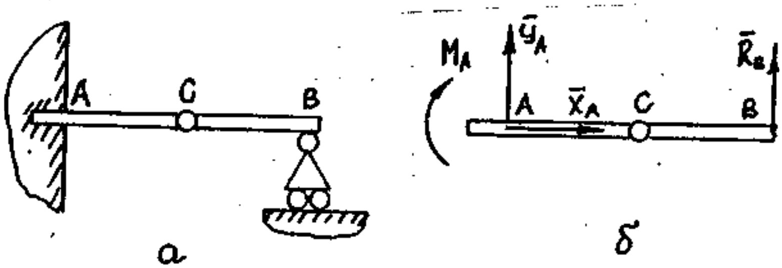

Рис. 14.1

Розглядаючи рівновагу системи тіл на основі принципу затвердіння, можливо побачити всю систему в цілому, вважаючи її затверділою і застосовуючи до неї умови рівноваги як для твердого тіла. Але ці умови, хоча і необхідні, не будуть достатніми, тому що у цьому разі кількість невідомих може бути більше трьох. Крім того, у багатьох задачах треба буде визначити і внутрішні сили системи, які до рівняння рівноваги не входять (рис. 14.2).

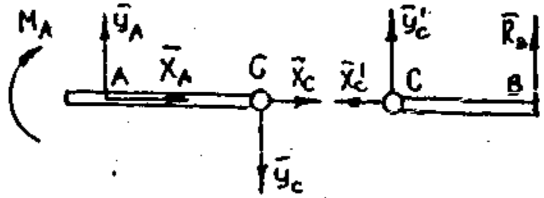

Рис. 14.2

У цьому разі виконується умова

$$\vec{X}_c = -\vec{X}'_{c'}, \qquad \vec{Y}_c = -\vec{Y}'_c. \qquad (14.1)$$

Тоді, застосовуючи метод перерізу, необхідно додатково розглянути рівновагу якої-небудь однієї чи кількох частин конструкції як вільного тіла. При цьому до умов рівноваги ввійдуть реакції внутрішніх в"язей. Згідно з аксіомою 4 внутрішні сили рівні за модулем і спрямовані по одній прямій в різні боки. Отже, очевидна властивість внутрішніх сил: головний вектор і головний момент внутрішніх сил відносно будь-якого центра дорівнює нулю. Звідси випливає важливий висновок: до всіх рівнянь статики входять тільки зовнішні сили.

Якщо конструкція складається із n тіл (див. рис. 14.2), на кожне з яких діє довільна плоска система сил, то можна скласти $3n$ умов рівноваги, що дозволяють знайти $3n$ невідомих.

Якщо при цьому число невідомих реакцій в"язей дорівнюватиме $3n$, то конструкція називається статично визначеною. Але якщо число невідомих реакцій в"язей перевищує $3n$, то конструкція буде статично невизначеною. Ці задачі розв"язує дисципліна опору матеріалів.

<u>Приклад</u>.

При заданому навантаженні визначити реакції опор та сили, які діють у шарнірі C (рис. 14.3). На консоль діють: пара

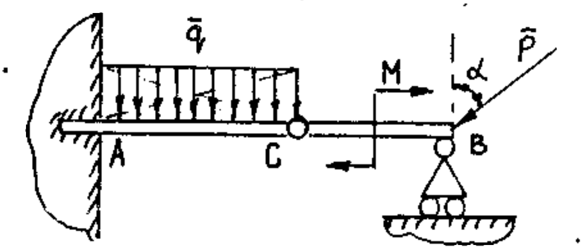

Рис. 14.3

сил з моментом M , зосереджена сила $\vec{P}$ і розподільне навантаження $\vec{q}$.

Вибираємо систему координат, замінюємо розподільне навантаження зосередженою силою $Q = q \cdot AC$, яку прикладаємо на перетині діагоналей прямокутника.

Відкидаємо в"язи і замінюємо їх дію реакціями в"язей. Після цього, застосовуючи метод перерізу, ріжемо консоль по шарніру C (рис. 14.4).

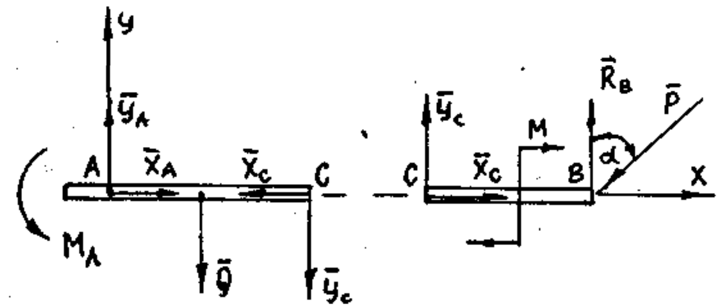

Рис. 14.4

Запишемо рівняння рівноваги для кожної частини консолі окремо:

$$\begin{cases} \sum F_x = X_A - X_C = 0, \\ \sum F_y = Y_A - Y_C = Q = 0, \\ \sum M_C = Q \cdot AC/2 - Y_A \cdot AC + M_A = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = X_c - P \cdot \sin\alpha = 0, \\ \sum F_y = Y_c + R_B - P \cdot \cos\alpha = 0, \\ \sum M_c = -M + R_B \cdot CB - P \cdot CB \cdot \cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Маємо шість невідомих і шість рівнянь рівноваги. Отже, задачу розв"язано.

Л е к ц і я 15

Тема "РІВНОВАГА ЗА НАЯВНОСТІ СИЛ ТЕРТЯ"

На попередніх лекціях, коли ми розглядали рівновагу твердих тіл, які спираються на нерухому площину, припускалося, що опорна поверхня ідеально гладенька. Реакція такої поверхні спрямована по нормалі до цієї площини, тому що вона не перешкоджає руху тіла в дотичній площині. Однак дослід показує, що при намаганні зворухнути одне тіло відносно іншого в площині контакту тіл виникає сила опору їх відносному ковзанню. Ця сила має назву сили тертя ковзання.

15.1. Тертя ковзання

Величина сили сухого тертя $\bar{F}_{тр}$ пропорційна ступеню шорсткості контактуючих поверхонь (пари тертя) і нормальному тиску $\bar{N}$ (тобто силі, яка притискає поверхні тіл одна до одної):

$$F_{тр} = f \cdot N. \tag{15.1}$$

Ступінь шорсткості характеризується коефіцієнтом тертя f, що визначається експериментально. Тіло (рис. 15.1,а) перебуває у

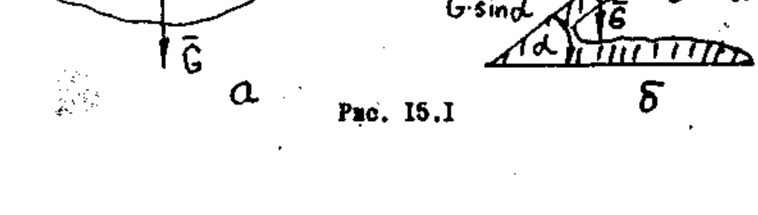

Рис. 15.1

граничній рівновазі під дією чотирьох сил: вага тіла $\vec{G}$ зрівноважується реакцією опорної поверхні $\vec{N}$, а сила $\vec{T}$, яка намагається зрушити тіло, - силою тертя $F_{тр} = f \cdot N$. Коефіцієнт тертя обчислимо за формулою

$$f = F_{тр} / N, \quad \text{або} \quad f = T/G. \qquad (15.2)$$

Тіло вагою $\vec{G}$ (рис. 15.1,б) лежить на нахиленій площині. Якщо цю силу ваги розкласти на дві взаємно перпендикулярні складові $G \cdot \cos\alpha$ і $G \cdot \sin\alpha$, то у випадку граничної рівноваги

$$N = G \cdot \cos\alpha, \quad F_{тр} = G \cdot \sin\alpha, \qquad (15.3)$$

і коефіцієнт тертя

$$f = F_{тр} / N = G \cdot \sin\alpha / G \cdot \cos\alpha = tg\,\alpha \qquad (15.4)$$

дорівнюватиме тангенсу кута нахилу площини при граничній рівновазі тіла. Коефіцієнт тертя ковзання f є величиною безрозмірною і лежить у межах $0 < f < 1$. Він залежить від матеріалу поверхонь тертя та їх стану, ступеня обробки, температури, вологості тощо. Розрізняють два коефіцієнта тертя ковзання - спокою та динамічний. Статичний коефіцієнт тертя більший за динамічний.

Задачі з урахуванням сили тертя розв"язують звичайним способом. Складають рівняння рівноваги в положенні рівноваги (на межі ковзання). Тоді сила тертя досягне свого найбільшого значення (15.1). Цю величину записують до рівнянь рівноваги.

15.2. Тертя кочення

Якщо тверде тіло має форму колеса або котка і котиться по поверхні іншого тіла, то такий рух повинен виключати прослизування в точці контакту, тобто сила тертя ковзання має бути достатньою для того, щоб не допустити прослизування одного тіла (колеса) відносно іншого (дороги). Сила тертя ковзання у цьому випадку відіграє позитивну роль.

Якби коток і поверхня, по якій він котиться, були абсолютно твердими, то такий вид переміщення був би ідеальним і не викликав би ніякого опору. Однак опір рухові котка при його коченні все ж таки виникає. І спричиняється він деформацією котка або поверхні, по якій коток котиться, або и обома водночас.

Опір, що виникає при коченні одного тіла по поверхні іншого, називається тертям кочення. Для вивчення цього явища розглянемо кочення абсолютно твердого котка вагою $\vec{G}$ по поверхні, яка деформується (рис. 15.2).

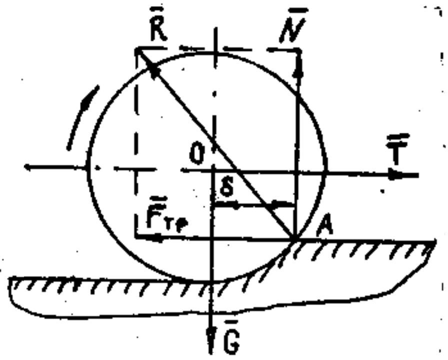

Рис. 15.2

Крім ваги $\vec{G}$ на коток діють: тяга $\vec{T}$, сила тертя кочення $\vec{F}_{тр}$ і вертикальна складова реакції поверхні $\vec{N}$. Система цих сил утворює дві пари сил ($\vec{T}$, $\vec{F}_{тр}$) і ($\vec{G}$, $\vec{N}$). Пара сил ($\vec{T}$, $\vec{F}_{тр}$) створює обертальний момент у напрямку кочення котка, а пара сил ($\vec{G}$, $\vec{N}$) – обертальний момент, що протидіє коченню. Момент пари ($\vec{G}$, $\vec{N}$) характеризує момент тертя кочення, який дорівнює добутку нормального тиску $\vec{N}$ на коефіцієнт тертя кочення δ, що являє собою плече пари:

$$M_{тр.коч} = N \cdot \delta. \tag{15.5}$$

Отже, коефіцієнт тертя кочення δ є величиною розмірною [м] і характеризує величину деформації тіл. Сили опору при коченні тіл набагато нижчі, ніж при ковзанні. Тому в техніці, де тільки це можливо, намагаються ковзання заміняти коченням (колеса, котки, шарикопідшипники).

Близьким за природою як до тертя ковзання, так і до тертя кочення є тертя кручіння (або вертіння), яке виникає при загвинчуванні, свердлінні та являє собою досить складний процес. У цьому курсі це тертя вивчатися не буде.

Лекція 16

Тема "ЦЕНТР ПАРАЛЕЛЬНИХ СИЛ І ЦЕНТР ВАГИ ТІЛА"

Сили ваги є розподіленими силами, тобто діють на всі точни об"єму тіла. Оскільки статика оперує лише зосередженими силами, то розподілені сили ваги замінюємо рівнодіючою силою, яка називається вагою тіла, а точка прикладання рівнодіючої сили ваги – центром ваги тіла. Центр ваги тіла не змінює свого положення при вільному русі тіла у просторі. Ця властивість дозволяє експериментально визначати центр ваги неоднорідних плоских тіл складної конструкції таким чином: достатньо підвісити тіло на нитці в будь-якій його точці та побудувати продовження нитки в тілі (провести вертикаль), а потім повторити цю операцію для декількох інших точок, – і ми одержимо точку перетину побудованих ліній. Це і є центром ваги цього тіла. Центр ваги порожнистих тіл і тіл складної просторової форми може лежати поза межами тіла (наприклад центр ваги обруча).

Для аналітичного визначення положення центра ваги скористаємось теоремою Варіньона, яка стверджує, що момент рівнодіючої сили дорівнює сумі моментів складових сил.

Нехай на тіло в точках A і B діють дві паралельні сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ (рис. 16.1), що мають рівнодіючу R :

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 . \qquad (16.1)$$

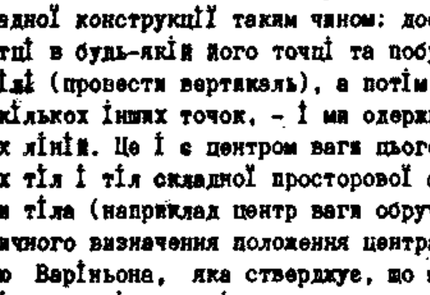

Рис. 16.1

Рівнодіюча $\vec{R}$ прикладена в точці C , що ділить відстань між силами обернено пропорційно силам:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC} = \frac{b}{a} , \qquad (16.2)$$

звідки $F_1 \cdot a = F_2 \cdot b$.

Момент рівнодіючої сили $\vec{R}$ відносно деякої точки O дорівнює

$$M_0(\vec{R}) = R \cdot X_c \tag{16.3}$$

або

$$R \cdot X_c = (F_1 + F_2) \cdot X_c = F_1 (X_1 + a) + F_2 (X_2 - b) = \\ = F_1 \cdot X_1 + F_2 \cdot X_2 + (F_1 a - F_2 \cdot b), \tag{16.4}$$

де X_c – координата точки C . Оскільки із рівняння (16.2) маємо $F_1 \cdot a = F_2 \cdot b$, то вираз в останній дужці залежності (16.4) дорівнює нулю, і ми одержимо

$$R \cdot x_c = F_1 \cdot X_1 + F_2 \cdot X_2, \tag{16.5}$$

що і потрібно було довести. Очевидно, що теорема Варіньона справедлива для будь-якого числа сил, тобто

$$R \cdot x_c = \sum_{k=1}^{n} F_k \cdot X_k . \tag{16.6}$$

<u>Центр ваги тіла</u>. Спираючись на залежність (16.6), знайдемо вирази для аналітичного визначення координат центра ваги в декартовій системі координат:

$$x_C = \sum_{k}^{n} P_k \cdot x_k / P; \qquad y_C = \sum_{k=1}^{n} P_k \cdot y_k / P;$$

$$z_C = \sum_{k=1}^{n} P_k \cdot z_k / \tag{16.7}$$

де P – рівнодійча сил ваги частинок даного тіла;

P_k – вага будь-якої частинки тіла.

Таким чином, центром ваги тіла називається незмінно зв"язана з цим тілом точка, в якій прикладена рівнодійча сил ваги частинок даного тіла і координати якої визначаються формулами (16.7).

<u>Центр мас</u>. Якщо позначимо масу тіла через M , а маси його складових частинок через mk , то матимемо

$$P = Mg, \quad P_k = m_k \cdot g, \tag{16.8}$$

де g – прискорення сили тяжіння.

Підставивши ці значення у вираз (16.7), маємо:

$$x_c = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot x_k / M; \qquad y_c = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot y_k / M;$$

$$z_c = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot z_k / M. \qquad (16.9)$$

Точка, координати якої знаходяться за формулами (16.9), називається центром мас.

Положення центра мас залежить тільки від розподілу мас в тілі і являє собою одну з характеристик цього розподілу.

В той час як поняття про центр ваги має сенс тільки для тіла, що знаходиться в однорідному полі сили ваги, поняття центра мас не зв"язано з поняттям про силове поле, не залежить від діючих сил і в цьому розумінні є більш загальним. Для твердого тіла, яке розташоване в однорідному полі сили ваги, положення центра ваги і центра мас збігаються.

<u>Центр ваги об"ємів</u>. У випадку однорідних тіл вага P_k будь-якої k-ї частинки тіла пропорційна об"єму V_k цієї частинки, а вага всього тіла - об"єму V тіла:

$$P_k = \gamma \cdot V_k , \qquad P = \gamma \cdot V, \qquad (16.10)$$

де γ - питома вага.

Тоді, підставляючи формулу (16.10) у вираз (16.2), в результаті матимемо:

$$x_c = \sum_{k=1}^{n} V_k \cdot x_k / V; \qquad y_c = \sum_{k=1}^{n} V_k \cdot y_k / V;$$

$$z_c = \sum_{k=1}^{n} V_k \cdot z_k / V. \qquad (16.11)$$

<u>Центр ваги площини</u>. Шляхом аналогічних міркувань легко встановити залежність між вагою однорідної пластини та її площею S :

$$x_c = \sum_{k=1}^{n} S_k \cdot x_k / S; \qquad y_c = \sum_{k=1}^{n} S_k \cdot y_k / S.$$

$$(16.12)$$

<u>Центр ваги лінії</u>. Однаково знаходиться залежність між вагою тонкого стержня (лінії) та його довжиною L :

$$x_c = \sum_{k=1}^{n} L_k \cdot x_k / L; \quad y_c = \sum_{k=1}^{n} L_k \cdot y_k / L;$$

$$z_c = \sum_{k=1}^{n} L_k \cdot z_k / L. \qquad (16.13)$$

При безперервному розподілі маси твердого тіла формули (16.11), (16.12) і (16.13) треба замінити інтегральними.

а) Для однорідного твердого тіла

$$x_c = \frac{1}{V} \iiint x dV, \quad y_c = \frac{1}{V} \iiint y dV,$$

$$z_c = \frac{1}{V} \iiint z dV, \qquad (16.14)$$

де $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ – елемент об"єму, який інтегрується по всьому об"єму.

б) Для однорідної пластини

$$x_c = \frac{1}{S} \iint x dS, \quad y_c = \frac{1}{S} \iint y dS, \qquad (16.15)$$

де $dS = dx \cdot dy$ – елемент площини.

в) Для однорідної лінії

$$x_c = \frac{1}{L} \int x dl, \quad y_c = \frac{1}{L} \int y dl, \quad z_c = \frac{1}{L} \int z dl, \qquad (16.16)$$

де dl – елемент дуги.

Додатково слід вказати деякі способи визначення положення центра ваги, які застосовуються на практиці:

1. Розрахункові:
   а) симетрії;
   б) розбивання;
   в) доповнення;
   г) інтегрування.

2. Графічні.

3. Експериментальні:

а) підвішування;

б) зважування.

Ці способи достатньо висвітлені в літературі і тут вивчатися не будуть.

Список використаної та рекомендованої літератури

І. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: В 2 т. - М.: Наука, 1985. Т.І.

2. Глонь О.А. Основи теоретичної механіки. - К.: ВКЦ "Софія", 1992.

3. Павловский М.А., Путята Т.В. Теоретическая механика. - К.: Выща шк., 1985.

4. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. - М.: Наука, 1985.

5. Юрченко О.А., Старов А.М., Яковлев Ф.И. Теоретическая механика. - Харьков: ХВВАИКУ, 1990.

6. Яблонский А.А. Курс теоретической механики: В 2 т. - М.: Высш шк., 1972. Т.І.

7. Яблонский А.А. Сборник задач для курсового проектирования по теоретической механике. М.: Высш. шк., 1985.

ЗМІСТ

Олексій Михайлович Старов

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. СТАТИКА

Редактор Л.О. Кузьменко

Зв.план, 1999
Підписано до друку 17.05.99
Формат 60x84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк.
Умовн.-друк. арк. 2,5. Обл.-вид. арк. 2,86. Т. 200 прим.
Замовлення 57. Ціна вільна

Державний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
"Харківський авіаційний інститут"
310070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
Ротапринт друкарні ХАІ
310070, Харків-70, вул. Чкалова, 17