

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

С.В. Спренне, І.Г. Шебанов

**ДИНАМІКА ВИКОНАВЧИХ І ПЕРЕДАВАЛЬНИХ
МЕХАНІЗМІВ АВІАЦІЙНОЇ ТЕХНІКИ**

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2003

УДК 629.735.33-2.018:681.3 (075.8)

Динаміка виконавчих і передавальних механізмів авіаційної техніки/
С.В. Спренне, І.Г. Шебанов. – Навч. посібник. – Харків: Нац. аерокосм.
ун-т „Харк. авіац. ін-т”, 2003. – 42 с.

Посібник надає необхідну інформацію з питань динаміки виконавчих і передавальних механізмів зі ступенем рухомості, більшим за одиницю. Ці питання в навчальній літературі відсутні або викладені недостатньо.

Для студентів, що вивчають курс „Теорія механізмів і машин”, та при виконанні курсових і дипломних проектів.

Іл. 13. Бібліогр.: 5 назв

Рецензенти: канд. фіз.-мат. наук А.А. Гончаренко,
канд. техн. наук, доц. В.І. Іщенко

© Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
„Харківський авіаційний інститут”, 2003 р.

Зміст

Вступ.....	4
1. Рівняння руху механізмів зі степенем рухомості, більшим за одиницю.....	4
2. Дослідження п'ятиланкового важільного механізму робота.....	11
3. Дослідження триланкового важільного механізму робота з використанням динамічної розв'язки руху.....	18
4. Дослідження зубчастого механізму з двома степенями рухомості приводу шасі літака.....	24
5. Дослідження зубчастого диференціального механізму приводу співвісних гвинтів.....	33
Бібліографічний список	41

Вступ

В авіаційній техніці все більшого поширення, набувають механізми зі ступенем рухомості, більшим за одиницю. Ці механізми застосовуються для підвищення надійності приводів, забезпечення кращих умов роботи повітряних гвинтів літаків і вертольотів, у транспортних і складальних операціях в цехах підприємств і на аеродромах. Це потребує більш детального ознайомлення студентів з дослідженням зазначених механізмів. Ці дослідження базуються на методах аналітичної механіки, де матеріальна система розглядається як ціле, а поняття про узагальнені координати дозволяє складати диференціальні рівняння руху за кількістю, що дорівнює числу ступенів вільності, та у формі, яка не залежить від вибору цих координат. Узагальненість принципів аналітичної механіки дозволяє поширити їх також на дослідження електромеханічних та інших комбінованих систем.

Даний посібник подає необхідну інформацію з питань динаміки виконавчих і передавальних механізмів, яка в навчальній літературі відсутня або викладена недостатньо і може бути надійним помічником у курсовому та дипломному проектуванні.

1. Рівняння руху механізмів зі ступенем рухомості, більшим за одиницю

Рух механізму зі ступенем рухомості, більшим за одиницю, при голономних зв'язках звичайно описується рівняннями Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (j = 1, \dots, N), \quad (1)$$

де T - кінетична енергія механізму, q_i - узагальнені координати, Q_i - узагальнені сили, N - кількість узагальнених координат, що у голономних системах збігається з числом ступенів вільності.

Зазначимо, що перший член лівої частини рівнянь Лагранжа містить другу похідну за часом від узагальнених координат. Тому система рівнянь (1) являє собою систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з N невідомими узагальненими координатами. Виконавши інтегрування рівнянь (1), одержують узагальнені координати, що визначають положення механізму у функції часу t .

Очевидно, що інтегрування рівнянь Лагранжа дає найкоротший шлях визначення руху механізму, бо в цьому випадку кількість диференціальних рівнянь буде мінімальною і дорівнюватиме числу ступенів вільності (ступеню рухомості механізму).

Рівняння Лагранжа визначають універсальну методику складання диференціальних рівнянь руху механізмів з голономними зв'язками, яка полягає в єдиній послідовності дій:

1. Визначають степінь рухомості механізму, що розглядається. Знання степеня рухомості гарантує від можливості пропуску яких-небудь узагальнених координат механізму або від уведення зайвих, залежних одна від одної, координат.
2. Вибирають узагальнені координати. Простота розв'язання задачі залежить від того, як вдало вибрані узагальнені координати.
3. Записують вираз кінетичної енергії механізму.
4. Визначають потенціальну енергію механізму.
5. Знаходять узагальнені сили механізму.
6. Виконують вказані в рівняннях Лагранжа дії.

Узагальнену силу Q_i можна знайти одним із способів:

1. За формулою

$$Q_i = \sum_{k=1}^n \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right), \quad (2)$$

де F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекції заданих сил \overline{F}_k на осі нерухомої декартової системи координат.

Практично цю формулу використовують рідко, тому що необхідно спочатку одержати вирази для $F_{kx}, F_{ky}, F_{kz}, x_k, y_k, z_k$ як функцій узагальнених координат, що трудно при достатньо великих значеннях n .

2. Шляхом надання відповідній узагальненій координаті віртуального переміщення δq_i і визначення суми робіт δA_i усіх заданих сил на віртуальних переміщеннях точок їх прикладення. Множник при δq_i у виразі віртуальної роботи $\delta A_i = Q_i \cdot \delta q_i$ і буде узагальненою силою. При цьому всі інші узагальнені координати залишають незмінними.

Приклад 1.

Тіло 2 силою тяжіння G_2 переміщується по гладенькій поверхні призми 1 вагою G_1 . Кут α , сили \overline{P} та \overline{F} задані. Тертям між призмою 1 та тілом 2 знехтуємо (рис. 1).

Знайти узагальнені сили, що відповідають координатам S і x .

У цьому прикладі $N = 2$, $q_1 = x$, $q_2 = s$.

Визначимо узагальнені сили:

- 1) $\delta S \neq 0$, $\delta x = 0$,
 $\delta A_2 = (G_2 \sin \alpha - F) \delta S = Q_2 \delta S$; $Q_2 = G_2 \sin \alpha - F$;
- 2) $\delta S = 0$, $\delta x \neq 0$,
 $\delta A_1 = (P + F \cos \alpha) \delta x = Q_1 \delta x$; $Q_1 = P + F \cos \alpha$.

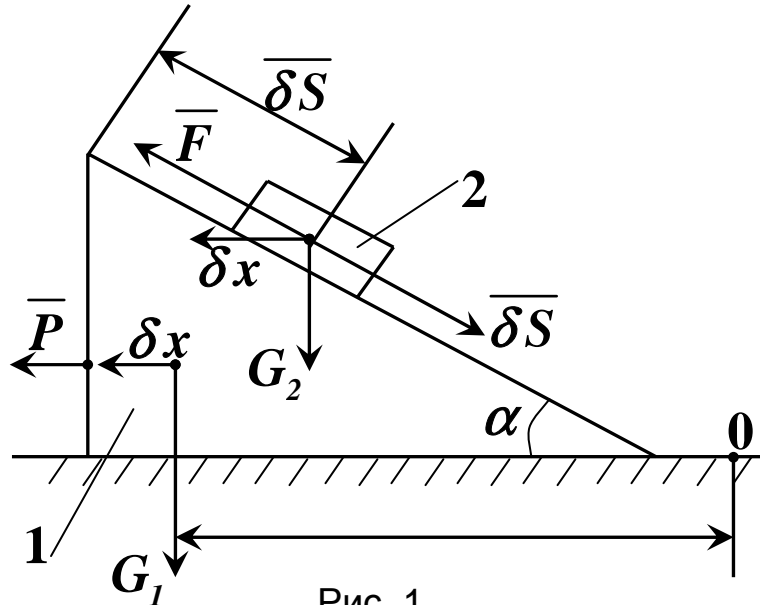


Рис. 1

Приклад 2.

Однорідні важелі OA і AB однаковою довжиною з'єднані між собою ідеальним шарніром A . До стояка важіль OA приєднаний ідеальним шарніром O (рис. 2). Визначити узагальнені сили.

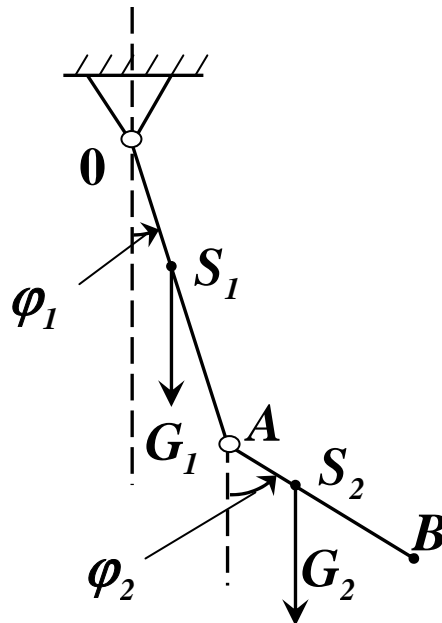


Рис. 2

У цьому прикладі $N = 2$, $q_1 = \varphi_1$, $q_2 = \varphi_2$.
 Застосуємо другий із способів обчислення узагальнених сил.
 Нехай $\delta\varphi_1 \neq 0$, $\delta\varphi_2 = 0$ (рис. 3).

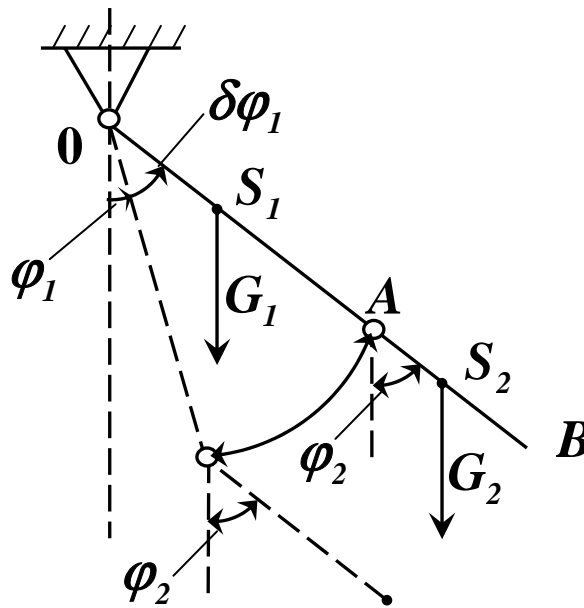


Рис. 3

Тоді

$$\delta A_1 = \left(-G_1 \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin \varphi_1 - G_2 \cdot l \cdot \sin \varphi_1 \right) \delta \varphi_1 = Q_1 \delta \varphi_1,$$

$$Q_1 = -(0,5G_1 + G_2) \cdot l \cdot \sin \varphi_1.$$

Нехай $\delta\varphi_1 = 0$, $\delta\varphi_2 \neq 0$ (рис. 4).

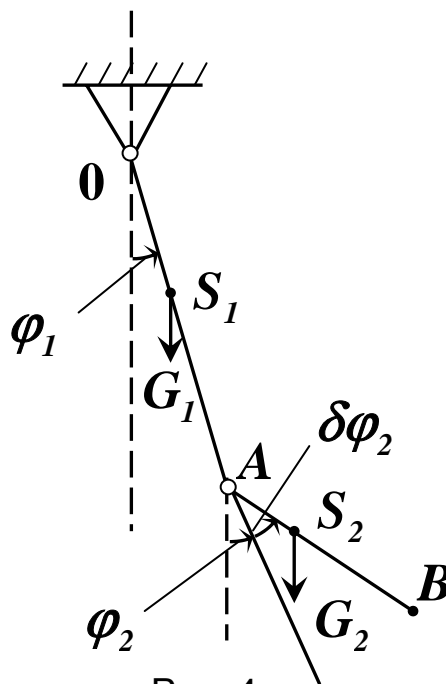


Рис. 4

Тоді

$$\delta A_2 = -G_2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin \varphi_2 \cdot \delta \varphi_2 = Q_2 \cdot \delta \varphi_2,$$

$$Q_2 = -G_2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin \varphi_2.$$

У багатьох випадках більш раціонально користуватися тим, що

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_{k=1}^n \overline{F}_k \cdot \delta \overline{r}_k = \\ &= \sum_{k=1}^n (F_{kx} \cdot \delta x_k + F_{ky} \cdot \delta y_k + F_{kz} \cdot \delta z_k) = \sum_{j=1}^n Q_j \cdot \delta q_j. \end{aligned}$$

Так, у прикладі 2 (рис. 5)

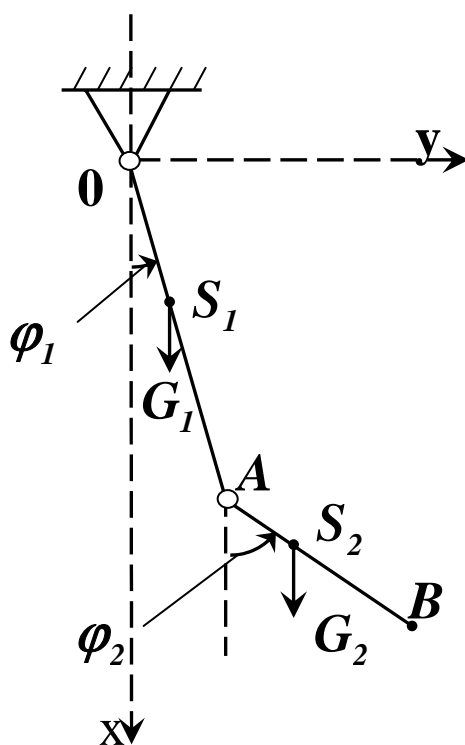


Рис. 5

$$G_{1y} = G_{2y} = 0; x_{S_1} = -\frac{l}{2} \cos \varphi_1; x_{S_2} = l \cdot \cos \varphi_1 + \frac{l}{2} \cdot \cos \varphi_2;$$

$$G_{1x} = G_1; G_{2x} = G_2;$$

$$\delta x_{S_1} = -\frac{l}{2} \sin \varphi_1 \cdot \delta \varphi_1;$$

$$\delta x_{S_2} = -l \cdot \sin \varphi_1 \cdot \delta \varphi_1 - \frac{l}{2} \sin \varphi_2 \cdot \delta \varphi_2,$$

тобто

$$\delta A = -G_1 \frac{l}{2} \sin \varphi_1 \cdot \delta \varphi_1 -$$

$$-G_2 \left(l \cdot \sin \varphi_1 \cdot \delta \varphi_1 + \frac{l}{2} \sin \varphi_2 \cdot \delta \varphi_2 \right) = Q_1 \delta \varphi_1 + Q_2 \delta \varphi_2.$$

Звідси

$$Q_1 = -G_1 \frac{l}{2} \sin \varphi_1 - G_2 \cdot l \cdot \sin \varphi_1;$$

$$Q_2 = -G_2 \cdot l \cdot \sin \varphi_2.$$

3. За формулою (3), якщо всі задані сили консервативні,

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, N). \quad (3)$$

Приклад 3.

Важелі $AB = BC = CD = l$ однорідні, з'єднані між собою ідеальними шарнірами B та C і приєднані до повзуна 1 ідеальним шарніром D .

У цьому прикладі $N = 4$, $q_1 = \varphi_1$; $q_2 = \varphi_2$; $q_3 = \varphi_3$; $q_4 = x$.

Вибравши за нульовий рівень потенціальної енергії горизонтальну пряму, що проходить через точку D , одержимо

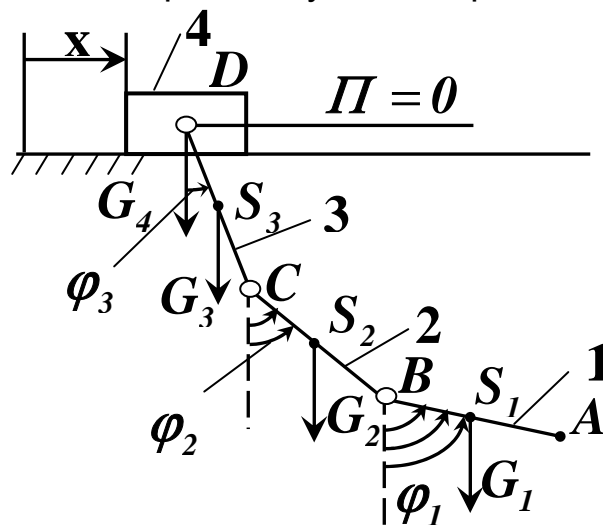


Рис. 6

$$\begin{aligned} \Pi = & -G_1 \left(\frac{l}{2} \cos \varphi_1 + l \cdot \cos \varphi_2 + l \cdot \cos \varphi_3 \right) - \\ & -G_2 \left(\frac{l}{2} \cos \varphi_2 + l \cdot \cos \varphi_3 \right) - G_3 \frac{l}{2} \cos \varphi_3, \end{aligned}$$

звідки

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = -G_1 \frac{l}{2} \sin \varphi_1, \\ Q_2 &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = -G_2 \frac{l}{2} \sin \varphi_2 - G_1 \cdot l \cdot \sin \varphi_2, \\ Q_3 &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_3} = -G_1 \cdot l \cdot \sin \varphi_3 - G_2 \cdot l \cdot \sin \varphi_3 - G_3 \frac{l}{2} \sin \varphi_3. \end{aligned}$$

Узагальнена сила не є силою у загальному розумінні, бо вона – не вектор і її розмірність у загальному випадку не збігається з розмірністю сили. Розмірність узагальненої сили залежить від розмірності узагальненої координати. Якщо, наприклад, за узагальнену координату прийняти кут у радіанах, то розмірність узагальненої сили буде збігатися з розмірністю моменту сили.

Іноді сили, що залежать тільки від узагальнених координат (сили пружності, сили тяжіння) не включають в узагальнені сили, а враховують їх вплив через зміну потенціальної енергії механізму. Тоді рівняння Лагранжа мають вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i \quad (\gamma = 1, \dots, N), \quad (4)$$

або

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (\gamma = 1, \dots, N), \quad (5)$$

де $L = T - \Pi$ - функція Лагранжа.

Сили сухого (полусухого) тертя приєднують до заданих сил, сили в'язкого опору враховуються через дисипативну функцію Релея

$$\Phi = \sum_{k=1}^n \frac{b_k V_k^2}{2}, \quad (6)$$

де b_k - коефіцієнти в'язкого опору, V_k - швидкість точки k .

Рівняння Лагранжа тоді за наявності непотенціальних, потенціальних сил і сил в'язкого опору таке:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_i} = Q_i. \quad (7)$$

2. Дослідження п'ятиланкового важільного механізму робота

Розглянемо дослідження важільного механізму з двома степенями рухомості (рис. 7). За узагальнені координати приймемо кути повороту φ_1 і φ_4 .

Для визначення положень усіх ланок механізму необхідно і достатньо знати в кожному його положенні радіус-вектор \overline{r}_B :

$$\overline{r}_B = \overline{r}_B(\varphi_1, \varphi_4). \quad (8)$$

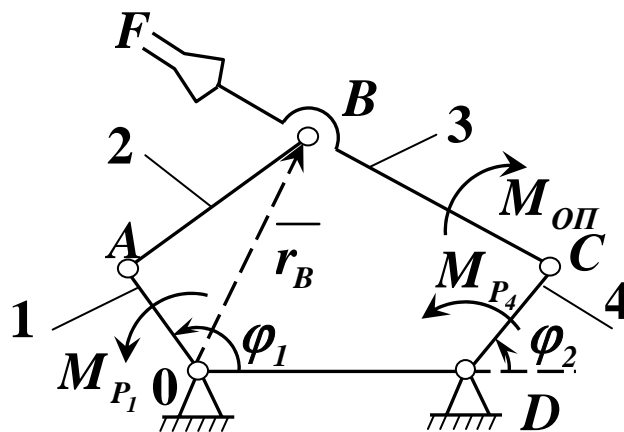


Рис. 7

За правилом диференціювання складних функцій одержимо

$$\overline{V}_B = \frac{\partial \overline{r}_B}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial \overline{r}_B}{\partial \varphi_4} \frac{d\varphi_4}{dt} = \overline{V}_{B\varphi_1} \dot{\varphi}_1 + \overline{V}_{B\varphi_4} \dot{\varphi}_4, \quad (9)$$

де $\overline{V}_{B\varphi_1}$ і $\overline{V}_{B\varphi_4}$ - аналоги швидкостей точки B .

Для визначення $\bar{V}_{B\varphi_1}$ умовно зупиняють ланку 4, для знаходження $\bar{V}_{B\varphi_4}$ - ланку 1.

Нехай ланки 1 і 4 навантажені моментами M_{p_1} і M_{p_4} рушійних сил, а ланка 3 – моментом M_{on} сил опору.

Рівняння руху механізму у формі рівнянь Лагранжа другого роду має такий вигляд:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_1, \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_4} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_4} = Q_4. \quad (11)$$

Визначимо вираз кінетичної енергії механізму.

Використаємо спосіб статичного розміщення мас. Маси m_2 , m_3 ланок 2, 3 рознесемо на дві відповідні точки: m_2 - на точки A і B , m_3 - на точки B і C .

У цьому випадку одержимо схему розміщення мас, що зображена на рис. 8, причому

$$m_{A_2} = \frac{m_2 \cdot l_{S_2B}}{l_{AB}}, \quad (12)$$

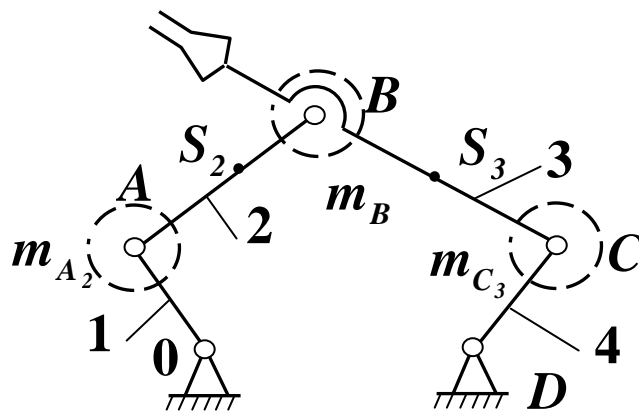


Рис. 8

$$m_{B_2} = \frac{m_2 \cdot l_{AS_2}}{l_{AB}}, \quad (13)$$

$$m_{B_3} = \frac{m_3 \cdot l_{S_3C}}{l_{BC}}, \quad (14)$$

$$m_{C_3} = \frac{m_3 \cdot l_{BS_3}}{l_{BC}}, \quad (15)$$

$$m_B = m_{B_2} + m_{B_3}. \quad (16)$$

Тоді

$$\begin{aligned} T = & \frac{I_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{m_{A_2} \cdot l_{AO}^2 \cdot \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{m_B \cdot V_{B\varphi_1}^2 \cdot \dot{\varphi}_1^2}{2} + \\ & + \left(m_B \cdot V_{B\varphi} \cdot V_{B\varphi_4} \cdot \cos \gamma_{14} \right) \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_4 + \frac{m_B \cdot V_{B\varphi_4}^2 \cdot \dot{\varphi}_4^2}{2} + \\ & + \frac{m_{C_3} \cdot l_{CD}^2 \cdot \dot{\varphi}_4^2}{2} + \frac{I_4 \cdot \dot{\varphi}_4^2}{2}, \end{aligned} \quad (17)$$

де γ_{14} - кут між аналогами $\bar{V}_{B\varphi_1}$ та $\bar{V}_{B\varphi_4}$.

Позначимо

$$\begin{aligned} I_{11} &= I_1 + m_{A_2} \cdot l_{AO}^2 + m_B \cdot V_{B\varphi_1}^2, \\ I_{14} &= m_B \cdot V_{B\varphi_1} \cdot V_{B\varphi_4} \cdot \cos \gamma_{14}, \\ I_{44} &= I_4 + m_{C_3} \cdot l_{CD}^2 + m_B \cdot V_{B\varphi_4}^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Тоді

$$T = \frac{I_{11} \cdot \dot{\varphi}_1^2}{2} + I_{14} \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_4 + \frac{I_{44} \cdot \dot{\varphi}_4^2}{2}. \quad (19)$$

Визначимо похідні, що входять до лівих частин рівнянь (10), (11).
Для рівняння (10)

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial I_{11}}{\partial \varphi_1} \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \frac{\partial I_{14}}{\partial \varphi_1} \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_4 + \frac{1}{2} \frac{\partial I_{44}}{\partial \varphi_1} \cdot \dot{\varphi}_4^2, \quad (20)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = I_{11} \cdot \dot{\varphi}_1 + I_{14} \cdot \dot{\varphi}_4, \quad (21)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = I_{11} \cdot \ddot{\varphi}_1 + \frac{dI_{11}}{dt} \cdot \dot{\varphi}_1 + I_{14} \cdot \ddot{\varphi}_4 + \frac{dI_{14}}{dt} \cdot \dot{\varphi}_4. \quad (22)$$

Оскільки інерційні коефіцієнти I_{11} і I_{14} є функціями двох узагальнених координат, то похідні $\frac{dI_{11}}{dt}$ та $\frac{dI_{14}}{dt}$ можуть бути подані так:

$$\frac{dI_{11}}{dt} = \frac{\partial I_{11}}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial I_{11}}{\partial \varphi_4} \frac{d\varphi_4}{dt} = \frac{\partial I_{11}}{\partial \varphi_1} \dot{\varphi}_1 + \frac{\partial I_{11}}{\partial \varphi_4} \dot{\varphi}_4, \quad (23)$$

$$\frac{dI_{14}}{dt} = \frac{\partial I_{14}}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial I_{14}}{\partial \varphi_4} \frac{d\varphi_4}{dt} = \frac{\partial I_{14}}{\partial \varphi_1} \dot{\varphi}_1 + \frac{\partial I_{14}}{\partial \varphi_4} \dot{\varphi}_4. \quad (24)$$

Підставляючи у (21) вирази похідних, маємо

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = I_{11} \cdot \ddot{\varphi}_1 + \frac{\partial I_{11}}{\partial \varphi_1} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{\partial I_{11}}{\partial \varphi_4} \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_4 + I_{14} \cdot \ddot{\varphi}_4 +$$

$$+ \frac{\partial I_{14}}{\partial \varphi_1} \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_4 + \frac{\partial I_{14}}{\partial \varphi_4} \dot{\varphi}_4^2. \quad (25)$$

Аналогічно для рівняння (10)

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_4} = \frac{1}{2} \frac{\partial I_{11}}{\partial \varphi_4} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{\partial I_{11}}{\partial \varphi_4} \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_4 + \frac{1}{2} \frac{\partial I_{44}}{\partial \varphi_4} \dot{\varphi}_4^2, \quad (26)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_4} = I_{44} \cdot \dot{\varphi}_4 + I_{14} \cdot \dot{\varphi}_1, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_4} &= I_{44} \cdot \ddot{\varphi}_4 + \frac{dI_{44}}{dt} \dot{\varphi}_4 + I_{14} \cdot \ddot{\varphi}_1 + \frac{dI_{14}}{dt} \dot{\varphi}_1 = \\ &= I_{44} \cdot \ddot{\varphi}_4 + \frac{\partial I_{44}}{\partial \varphi_4} \dot{\varphi}_4^2 + \frac{\partial I_{44}}{\partial \varphi_1} \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_4 + I_{14} \cdot \ddot{\varphi}_1 + \\ &\quad + \frac{\partial I_{14}}{\partial \varphi_4} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{\partial I_{14}}{\partial \varphi_4} \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_4. \end{aligned} \quad (28)$$

Визначимо узагальнені сили Q_1 та Q_4 :

$$\delta A_1 = Q_1 \cdot \delta \varphi_1 = M_{p_1} \cdot \delta \varphi_1 - M_{on} \delta \varphi_3^{(4)}; \quad (29)$$

$$Q_1 = M_1 - M_3 \cdot U_{12}^{(4)}; \quad (30)$$

$$\delta A_4 = Q_4 \cdot \delta \varphi_4 = M_{p_4} \cdot \delta \varphi_4 - M_{on} \delta \varphi_3^{(1)}; \quad (31)$$

$$Q_4 = M_4 - M_3 \cdot U_{34}^{(1)}. \quad (32)$$

Підставимо в рівняння (10), (11) вирази для похідних:

$$\begin{aligned}
& I_{11} \cdot \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial I_{11}}{\partial \varphi_1} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{\partial I_{11}}{\partial \varphi_4} \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_4 + \\
& + \left(\frac{\partial I_{14}}{\partial \varphi_4} - \frac{1}{2} \frac{\partial I_{44}}{\partial \varphi_1} \right) \dot{\varphi}_4^2 + I_{14} \cdot \ddot{\varphi}_4 = Q_1, \tag{33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& I_{44} \cdot \ddot{\varphi}_4 + \frac{1}{2} \frac{\partial I_{44}}{\partial \varphi_4} \dot{\varphi}_4^2 + \frac{\partial I_{44}}{\partial \varphi_1} \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_4 + \\
& + \left(\frac{\partial I_{14}}{\partial \varphi_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial I_{11}}{\partial \varphi_4} \right) \dot{\varphi}_1^2 + I_{14} \cdot \ddot{\varphi}_1 = Q_4. \tag{34}
\end{aligned}$$

Розв'яжемо рівняння (33), (34) відносно $\ddot{\varphi}_1$, $\ddot{\varphi}_4$:

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi}_1 &= \frac{Q_1 \cdot I_{44} - Q_4 \cdot I_{14}}{I_{11} \cdot I_{14} - I_{14}^2} + \\
& + \frac{I_{14} \frac{\partial I_{14}}{\partial \varphi_1} - \frac{1}{2} I_{14} \frac{\partial I_{11}}{\partial \varphi_4} - \frac{1}{2} I_{44} \frac{\partial I_{11}}{\partial \varphi_1}}{I_{11} \cdot I_{44} - I_{14}^2} \dot{\varphi}_1^2 + \\
& + \frac{I_{14} \frac{\partial I_{44}}{\partial \varphi_1} - I_{44} \frac{\partial I_{11}}{\partial \varphi_1}}{I_{11} \cdot I_{44} - I_{14}^2} \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_4 + \\
& + \frac{\frac{1}{2} I_{14} \frac{\partial I_{44}}{\partial \varphi_4} + \frac{1}{2} I_{44} \frac{\partial I_{44}}{\partial \varphi_4} - I_{44} \frac{\partial I_{14}}{\partial \varphi_4}}{I_{11} \cdot I_{44} - I_{14}^2} \dot{\varphi}_4^2, \tag{35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi}_4 = & \frac{Q_4 \cdot I_{11} - Q_1 \cdot I_{14}}{I_{11} \cdot I_{44} - I_{14}^2} + \\
& + \frac{\frac{1}{2} I_{14} \frac{\partial I_{11}}{\partial \varphi_1} - I_{11} \frac{\partial I_{14}}{\partial \varphi_1} + \frac{1}{2} I_{11} \frac{\partial I_{11}}{\partial \varphi_4}}{I_{11} \cdot I_{44} - I_{14}^2} \dot{\varphi}_1^2 + \\
& + \frac{I_{14} \frac{\partial I_{11}}{\partial \varphi_1} - I_{11} \frac{\partial I_{44}}{\partial \varphi_1}}{I_{11} \cdot I_{44} - I_{14}^2} \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_4 + \\
& + \frac{I_{14} \frac{\partial I_{14}}{\partial \varphi_4} - \frac{1}{2} I_{14} \frac{\partial I_{44}}{\partial \varphi_4} - \frac{1}{2} I_{11} \frac{\partial I_{44}}{\partial \varphi_4}}{I_{11} \cdot I_{44} - I_{14}^2} \dot{\varphi}_4^2, \quad (36)
\end{aligned}$$

або

$$\ddot{\varphi}_1 = A_0 + A_{11} \dot{\varphi}_1^2 + A_{14} \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_4 + A_{44} \cdot \dot{\varphi}_4^2, \quad (37)$$

$$\ddot{\varphi}_4 = B_0 + B_{11} \dot{\varphi}_1^2 + B_{14} \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_4 + B_{44} \cdot \dot{\varphi}_4^2. \quad (38)$$

Якщо Q_1 і Q_4 залежать тільки від кутів повороту φ_1 і φ_2 , то коефіцієнти $A_0, B_0, A_{11}, B_{11}, A_{14}, B_{14}, A_{44}, B_{44}$ - функції лише узагальнених координат φ_1 і φ_4 і не залежать від часу.

Рівняння (36), (37) є системою нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку відносно φ_1 і φ_4 . Коефіцієнти цих рівнянь можуть бути визначені, якщо відомі значення $Q_1, Q_4, I_{11}, I_{14}, I_{44}$. Із сумісного розв'язання цих рівнянь визначаються закони руху ланок 1 і 4.

Розв'язання рівнянь (36), (37) можна виконати одним із чисельних методів інтегрування.

3. Дослідження триланкового важільного механізму робота з виконанням динамічної розв'язки руху

Механізм робота з двома степенями рухомості (рис. 9) рухається під дією моменту M_{P1} та сили F_{P2} . Сила тяжіння ланки 1 - $I - G_1$, сила тяжіння об'єкта маніпулювання та ланки 2 - G_2 . За узагальнені координати приймаємо φ_{10} - кут повороту ланки 1 відносно стояка, l_{CS_2} - зміщення ланки 2 відносно ланки 1. В кінематичних парах враховується в'язке тертя.

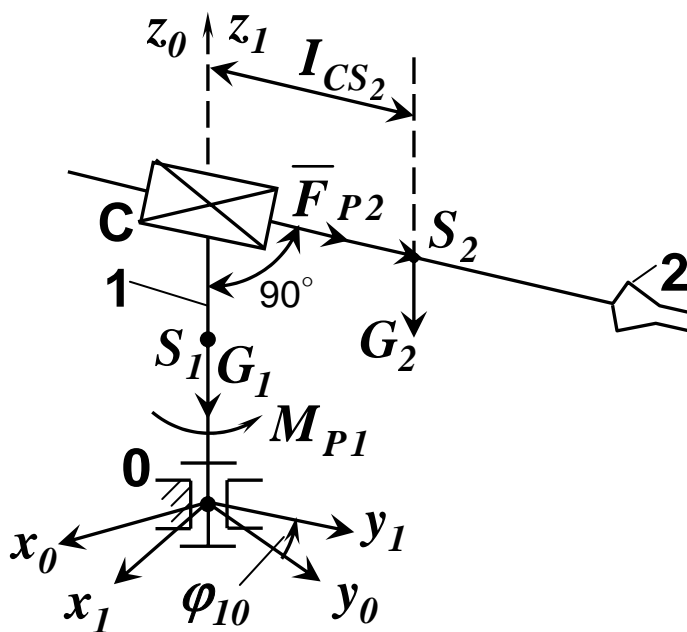


Рис. 9

Рівняння Лагранжа мають вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_{10}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_{10}} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\varphi}_{10}} = Q_1, \quad (39)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{l}_{CS_2}} - \frac{\partial T}{\partial l_{CS_2}} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{l}_{CS_2}} = Q_2. \quad (40)$$

Знайдемо вираз кінетичної енергії механізму:

$$T = \frac{I_{z_1} \cdot \dot{\varphi}_{10}^2}{2} + \frac{(I_{z_2} + m_2 \cdot l_{CS_2}^2) \cdot \dot{\varphi}_{10}^2}{2} + \frac{m_2 \cdot l_{CS_2}^2}{2}, \quad (41)$$

де I_{z_1} і I_{z_2} - моменти інерції ланок 1, 2 відносно вертикальних осей, що проходять через центри мас ланок; m_2 - маса другої ланки.

Визначимо похідні, що входять до рівнянь (39), (40):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_{10}} = (I_{z_1} + I_{z_2} + m_2 \cdot l_{CS_2}^2) \dot{\varphi}_{10}, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_{10}} &= (I_{z_1} + I_{z_2} + m_2 \cdot l_{CS_2}^2) \ddot{\varphi}_{10} + \\ &+ 2m_2 \cdot l_{CS_2} \cdot \dot{\varphi}_{10} \cdot \dot{l}_{CS_2}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_{10}} = 0, \quad (44)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{l}_{CS_2}} = m_2 \cdot \dot{l}_{CS_2}, \quad (45)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{l}_{CS_2}} = m_2 \cdot \ddot{l}_{CS_2}, \quad (46)$$

$$\frac{\partial T}{\partial l_{CS_2}} = m_2 \cdot \dot{\varphi}_{10}^2 \cdot l_{CS_2}, \quad (47)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\varphi}_{10}} = b_1 \cdot \dot{\varphi}_{10} \cdot r_0^2, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \dot{l}_{CS_2}} = b_2 \cdot \dot{l}_{CS_2},$$

де r_0 - радіус шарніра 0.

Знайдемо узагальнені сили:

$$\delta A_1 = Q_1 \cdot \delta \varphi_1 = M_{p_1} \cdot \delta \varphi_1, \quad (48)$$

$$\delta A_2 = Q_2 \cdot \delta l_{CS_2} = F_{p_2} \cdot \delta l_{CS_2}. \quad (49)$$

Робота сил тяжіння G_1 і G_2 на відносних віртуальних переміщеннях дорівнює нулю. Тоді

$$Q_1 = M_{p_1}, \quad (50)$$

$$Q_2 = F_{p_2}. \quad (51)$$

Отже, диференціальні рівняння руху механізму мають вигляд

$$\left(I_{z_1} + I_{z_2} + m_2 \cdot l_{CS_2}^2 \right) \ddot{\varphi}_{10} + 2m_2 \cdot l_{CS_2} \cdot \dot{\varphi}_{10} \cdot \dot{l}_{CS_2} + b_1 \cdot r_0^2 \cdot \dot{\varphi}_{10} = M_{p_1}, \quad (52)$$

$$2m_2 \cdot \ddot{l}_{CS_2} - m_2 \cdot \dot{\varphi}_{10}^2 \cdot l_{CS_2} + b_2 \cdot \dot{l}_{CS_2} = F_{p_2}. \quad (53)$$

Аналіз рівнянь (52), (53) показує, що вони взаємозалежні, тобто має місце взаємний вплив рухів за степенями рухомості. Це утруднює керування роботом, знижує швидкодію системи при обмежених зусиллях приводів.

Для розв'язки рухів необхідно, щоб інерційні коефіцієнти в рівняннях руху робота не залежали від узагальнених координат. Так,

взаємозалежність рівнянь (52), (53) обумовлена координатою l_{CS_2} . Проте $l_{CS_2} = 0$, якщо центр мас ланки 2 та об'єкта маніпулювання буде збігатися в процесі руху з точкою C (рис. 9). Цього можна досягнути за рахунок уведення двох додаткових мас m_n , що переміщуються залежно від положення маси m_2 , наприклад, з допомогою синусного механізму (рис. 10).

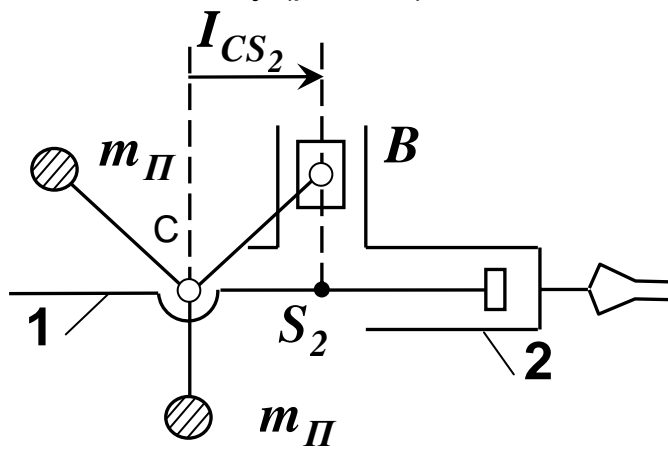


Рис. 10

Покажемо, при яких параметрах додаткового механізму забезпечується $l_{CS_2} = 0$.

При повороті кривошипа CB на кут $\Delta\alpha$ за ходом годинникової стрілки (рис. 11) маємо умову рівноваги

$$m_2 a = m_n b + m_n c, \quad (54)$$

де $a = R \cos(\alpha - \Delta\alpha)$, $b = r \cos(\alpha + \Delta\alpha)$, $c = r \sin \Delta\alpha$.

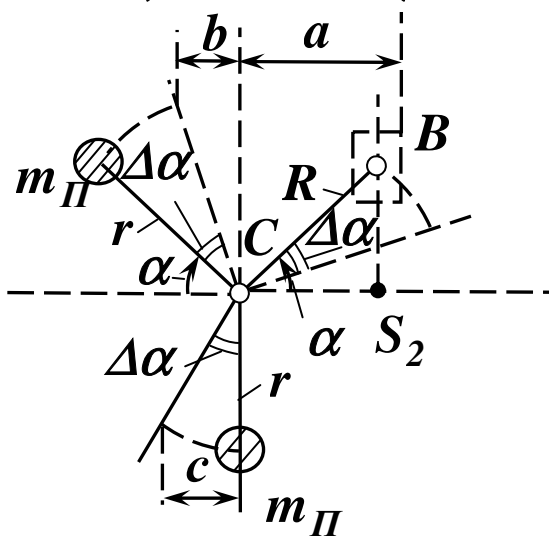


Рис. 11

Тоді

$$m_2 R \cos(\alpha - \Delta\alpha) = m_n r \cos(\alpha + \Delta\alpha) + m_n r \sin \Delta\alpha.$$

Якщо $mR = m_n r$, то $\cos(\alpha - \Delta\alpha) = \cos(\alpha + \Delta\alpha) + \sin \Delta\alpha$. Тоді $\alpha = 30^\circ$, тобто вираз (54) забезпечується за умови $mR = m_n r$ та $\alpha = 30^\circ$.

Запишемо спрощені рівняння руху:

$$\ddot{\varphi}_{10} + \frac{b_1 r_0^2}{I_{z_1} + I_{z_2}} \dot{\varphi}_{10} = \frac{M_{p_1}}{I_{z_1} + I_{z_2}}, \quad (56)$$

$$l_{CS_2} \ddot{\varphi}_{10} + \frac{b_2}{m_2} l_{CS_2} \dot{\varphi}_{10} = \frac{F_{p_2}}{m_2}. \quad (57)$$

Будемо вважати, що $M_{p_1} = \text{const}$, $F_{p_2} = \text{const}$. Знайдемо загальний розв'язок рівняння (56) з правою частиною як суму загального розв'язку відповідного рівняння без правої частини та частинного розв'язку даного рівняння. Тоді характерне рівняння

$$\lambda^2 + \frac{b_1 r_0^2}{I_{z_1} + I_{z_2}} \lambda = 0$$

має корні $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\frac{b_1 r_0^2}{I_{z_1} + I_{z_2}}$, а загальний розв'язок

однорідного рівняння такий:

$$\varphi_{10}^* = C_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (58)$$

Частинний розв'язок будемо шукати у вигляді $\varphi_{10}^{**} = At$, де

$$A = \frac{M_{p1}}{b_1 r_0^2}.$$

Тоді

$$\varphi_{10} = C_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{M_{p1}}{b_1 r_0^2} t. \quad (59)$$

Аналогічно загальний розв'язок рівняння (57) має вигляд

$$l_{CS_2} = C_3 + C_4 e^{\lambda_4 t} + \frac{F_{p1}}{b_1 r_0^2} t, \quad (60)$$

де $\lambda_4 = -\frac{b_2}{m_2}$.

Нехай початкові умови при $t=0$ такі:

$$\varphi_{10} = 0; \dot{\varphi}_{10} = 0; l_{CS_2} = 0; \dot{l}_{CS_2} = 0.$$

Диференціюючи рівняння (59), (60), одержимо

$$\dot{\varphi}_{10} = \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{M_{p1}}{b_1 r_0^2}, \quad (61)$$

$$\dot{l}_{CS_2} = \lambda_4 c_4 e^{\lambda_4 t} + \frac{F_{p2}}{b_2}.$$

Тоді

$$c_1 = \frac{M_{p1}}{\lambda_2 b_1 r_0^2}, \quad c_2 = -\frac{M_{p1}}{\lambda_2 b_1 r_0^2},$$

$$c_3 = \frac{F_{p2}}{\lambda_4 b_2}, \quad c_4 = -\frac{F_{p2}}{\lambda_4 b_2},$$

звідки

$$\varphi_{10} = \frac{Mp_1}{\lambda_2 b_1 r_0^2} (1 - e^{\lambda_2 t}) + \frac{Mp_1}{b_1 r_0^2} t, \quad (62)$$

$$lcs_2 = \frac{Fp_2}{\lambda_4 b_2} (1 - e^{\lambda_4 t}) + \frac{Fp_2}{b_2} t. \quad (63)$$

Одержані розв'язки (62), (63) можуть бути використані для визначення абсолютних рухів ланок та їх точок, а також оцінки часу спрацювання.

4. Дослідження зубчастого механізму з двома степенями рухомості приводу шасі літака

Для забезпечення надійності приводу висувного шасі літака застосовують зубчастий редуктор з двома степенями рухомості. На рис. 12 показано такий редуктор, що складається з простого диференціального механізму $D.\overline{AI}$ (колеса z_1, z_2, z_3 , водило H) і рядного зубчастого механізму (колеса z_4, z_5, z_6).

У звичайних умовах вихідній ланці надається рух від двох двигунів D_1 і D_6 через вхідні ланки z_1 та z_6 , долаючи зведений момент опору M_{on} шасі. Якщо виникає відмова одного з двигунів, зупиняється одна із вхідних ланок (z_1 або z_6). При цьому рух вихідної ланки h триває, бо диференціальний механізм $D.\overline{AI}$ перетворюється на планетарний \overline{AI} . Таким чином, забезпечується надійність приводу.

Виконаємо його дослідження.

Оскільки степінь рухомості редуктора (рис. 12) $W = 2$, то його рух описується двома рівняннями Лагранжа:

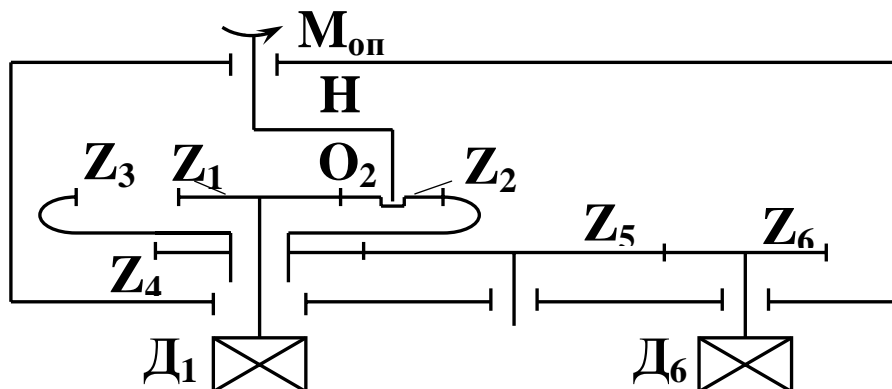


Рис. 12

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_1, \quad (64)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_6} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_6} = Q_2. \quad (65)$$

Вираз кінетичної енергії редуктора має вигляд

$$T = \frac{I_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{km_2 V_{02}^2}{2} + \frac{kI_2 \dot{\varphi}_2^2}{2} + \frac{I_H \dot{\varphi}_H^2}{2} + \frac{I_3 \dot{\varphi}_3^2}{2} + \frac{I_5 \dot{\varphi}_5^2}{2} + \frac{I_6 \dot{\varphi}_6^2}{2}, \quad (66)$$

де $\dot{\varphi}_i$ - кутова швидкість i -ї ланки;

K – кількість сателітів;

$\dot{\varphi}_H$ - кутова швидкість водила H ;

$$V_{02} = \dot{\varphi}_H (r_{w1} + r_{w2}); \quad (67)$$

r_{w1} і r_{w2} - радіуси початкових кіл коліс Z_1 і Z_2 ;

$$\dot{\varphi}_2 = u_{21}^{(3)} \dot{\varphi}_1 + u_{23}^{(1)} \dot{\varphi}_3 = u_{21}^{(3)} \dot{\varphi}_1 + u_{23}^{(1)} u_{36} \dot{\varphi}_6 \quad (68)$$

- абсолютна кутова швидкість сателіта Z_2 ;

$$u_{21}^{(3)} = \frac{u_{2H}^{(3)}}{u_{1H}^{(3)}} = \frac{1 - \frac{z_3}{z_2}}{1 + \frac{z_3}{z_1}}; \quad u_{23}^{(1)} = \frac{u_{2H}^{(1)}}{u_{3H}^{(1)}} = \frac{1 + \frac{z_1}{z_2}}{1 + \frac{z_1}{z_3}};$$

$$u_{36} = u_{46} = \frac{z_6}{z_4}; \quad z_i - \text{кількість зубців } i\text{-го колеса.}$$

$$\dot{\varphi}_H = u_{H1}^{(3)} \dot{\varphi}_1 + u_{H3}^{(1)} \dot{\varphi}_3 = u_{H1}^{(3)} \dot{\varphi}_1 + u_{H3}^{(1)} u_{36} \dot{\varphi}_6; \quad (69)$$

$$u_{H1}^{(3)} = \frac{z_1}{z_2 + z_3}; \quad u_{H3}^{(1)} = \frac{z_3}{z_1 + z_3};$$

$$\dot{\varphi}_3 = u_{36} \dot{\varphi}_6; \quad \dot{\varphi}_5 = u_{56} \dot{\varphi}_6;$$

I_1 та I_6 - моменти інерції вхідних ланок z_1 і z_6 і роторів двигунів відносно осей обертання; I_H - момент інерції вихідної ланки H та зведений момент інерції ланок шасі відносно осі обертання водила; I_H може вважатися постійним; I_2, I_3, I_5 - моменти інерції ланок $z_2, z_3 - z_4, z_5$ відносно осей обертання.

Враховуючи (66) - (69), будемо мати

$$T = \frac{I_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{km_2 (r_{w1} + r_{w2})^2 \left(u_{H1}^{(3)}\right)^2 \dot{\varphi}_1^2}{2} +$$

$$+ km_2 (r_{w1} + r_{w2})^2 u_{H1}^{(3)} u_{H3}^{(1)} u_{36} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_6 +$$

$$+ \frac{km_2 (r_{w1} + r_{w2})^2 \left(u_{H1}^{(3)}\right)^2 \left(u_{36}\right)^2 \dot{\varphi}_6^2}{2} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{kI_2 \left(u_{21}^{(3)}\right)^2 \dot{\varphi}_1^2}{2} + kI_2 u_{21}^{(3)} u_{23}^{(1)} u_{36} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_6 + \\
& + \frac{kI_2 \left(u_{23}^{(1)}\right)^2 \left(u_{36}\right)^2 \dot{\varphi}_6^2}{2} + \frac{I_H \left(u_{H1}^{(3)}\right)^2 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \\
& + I_H u_{H1}^{(3)} u_{H3}^{(1)} u_{36} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_6 + \frac{I_H \left(u_{H3}^{(1)}\right)^2 \left(u_{36}\right)^2 \dot{\varphi}_6^2}{2} + \\
& + \frac{I_3 \left(u_{36}\right)^2 \dot{\varphi}_6^2}{2} + \frac{I_5 \left(u_{56}\right)^2 \dot{\varphi}_6^2}{2} + \frac{I_6 \dot{\varphi}_6^2}{2}. \quad (70)
\end{aligned}$$

Позначимо

$$\begin{aligned}
I_{11} = I_1 + km_2 (r_{w1} + r_{w2})^2 \left(u_{H1}^{(3)}\right)^2 + \\
+ kI_2 \left(u_{21}^{(3)}\right)^2 + I_H \left(u_{H1}^{(3)}\right)^2; \quad (71)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{66} = I_6 + km_2 (r_{w1} + r_{w2})^2 \left(u_{H3}^{(1)}\right)^2 u_{36}^{(2)} + kI_2 \left(u_{23}^{(1)}\right)^2 \times \\
\times \left(u_{36}\right)^2 + I_H \left(u_{H3}^{(1)}\right)^2 \left(u_{36}\right)^2 + I_3 u_{36}^{(2)} + I_5 u_{56}^{(2)}; \quad (72)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{16} = km_2 (r_{w1} + r_{w2})^2 u_{H1}^{(3)} u_{H3}^{(1)} u_{36} + \\
+ kI_2 u_{21}^{(3)} u_{23}^{(1)} u_{36} + I_H u_{H1}^{(3)} u_{H3}^{(1)} u_{36}. \quad (73)
\end{aligned}$$

Отже,

$$T = \frac{I_{11} \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{I_{66} \dot{\varphi}_6^2}{2} + I_{16} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_6. \quad (74)$$

Визначимо похідні рівнянь (64), (65):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = I_{11} \dot{\varphi}_1 + I_{16} \dot{\varphi}_6; \quad (75)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = I_{11} \ddot{\varphi}_1 + I_{16} \ddot{\varphi}_6; \quad (76)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0; \quad (77)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_6} = I_{66} \dot{\varphi}_6 + I_{16} \dot{\varphi}_1; \quad (78)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_6} = I_{66} \ddot{\varphi}_6 + I_{16} \ddot{\varphi}_1; \quad (79)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_6} = 0. \quad (80)$$

Вирази узагальнених сил мають вигляд

$$Q_1 = Mp_1 + M_{on} u_{H4}^{(3)}, \quad (81)$$

$$Q_6 = Mp_6 + M_{on} u_{H3}^{(1)} u_{36}, \quad (82)$$

де M_{p1} , M_{p6} - рушійні моменти на валах двигунів D_1 та D_6 .

Тоді

$$I_{11} \ddot{\varphi}_1 + I_{16} \ddot{\varphi}_6 = M_{p1} + M_{on} u_{H1}^{(3)}, \quad (83)$$

$$I_{66} \ddot{\varphi}_6 + I_{16} \ddot{\varphi}_1 = M_{p6} + M_{on} u_{H3}^{(1)} u_{36}. \quad (84)$$

Для авіаційних асинхронних двигунів

$$M_{p1} = a_1 - b_1 \dot{\varphi}_1, \quad (85)$$

$$M_{p6} = a_6 - b_6 \dot{\varphi}_6, \quad (86)$$

$$\text{де } a_1 = \frac{M_{ном1} \dot{\varphi}_{c1}}{\dot{\varphi}_{c1} - \dot{\varphi}_{H1}}; \quad a_6 = \frac{M_{ном6} \dot{\varphi}_{c6}}{\dot{\varphi}_{c6} - \dot{\varphi}_{H6}}; \quad b_1 = \frac{M_{ном1}}{\dot{\varphi}_{c1} - \dot{\varphi}_{H1}};$$

$$b_6 = \frac{M_{ном6}}{\dot{\varphi}_{c6} - \dot{\varphi}_{H6}};$$

$M_{ном1}$, $M_{ном6}$ - номінальні рушійні моменти;

$\dot{\varphi}_{c1}$, $\dot{\varphi}_{c6}$ - синхронні кутові швидкості;

$\dot{\varphi}_{H1}$, $\dot{\varphi}_{H6}$ - номінальні кутові швидкості.

Статична характеристика шасі $M_{on}(\varphi_H)$ не має достатньо простого аналітичного виразу і часто подається у графічній формі.

У більшості випадків розв'язання рівнянь (83), (84) аналітичним методом дуже ускладнено. Тому використовується метод скінченних приростів.

Будують механічні характеристики двигунів і статичну характеристику механізму шасі. Встановлюють інтервали часу Δt_1 ,

$\Delta t_2, \Delta t_3, \dots, \Delta t_n$. Чим менше величини інтервалів часу, тим точніше можна одержати розв'язок.

Для моменту часу $t = 0$ рушійні моменти мають значення $(M_{p_1})_0, (M_{p_6})_0$, а момент опору - $(M_{on})_0$.

Тоді

$$\begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \end{pmatrix}_0 = \frac{\left((M_{p_1})_0 + (M_{on})_0 u_{H1}^{(3)} \right) \cdot I_{66}}{I_{11} \cdot I_{66} - I_{16}^2} - \frac{\left((M_{p_6})_0 + (M_{on})_0 u_{H3}^{(1)} u_{36} \right) I_{66}}{I_{11} \cdot I_{66} - I_{16}^2}, \quad (87)$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_6 \end{pmatrix}_0 = \frac{\left((M_{p_1})_0 + (M_{on})_0 u_{H1}^{(3)} \right) I_{16}}{I_{16}^2 - I_{11} \cdot I_{66}} - \frac{\left((M_{p_6})_0 + (M_{on})_0 u_{H3}^{(1)} u_{36} \right) I_{11}}{I_{16}^2 - I_{11} \cdot I_{66}}. \quad (88)$$

При малих інтервалах часу $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \dots, \Delta t_n$ можна вважати, що прискорення протягом цих інтервалів сталі, а швидкості наприкінці інтервалу Δt_1 дорівнюють

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} \Delta \dot{\varphi}_1 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \end{pmatrix}_0 \Delta t_1, \quad (89)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_6 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} \Delta \dot{\varphi}_6 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_6 \end{pmatrix}_0 \Delta t_1. \quad (90)$$

Приймаючи середні значення швидкостей протягом інтервалу часу Δt_1 рівними $0,5 \left(\Delta \dot{\varphi}_1 \right)_1$, $0,5 \left(\Delta \dot{\varphi}_6 \right)_1$, одержують кути повороту наприкінці першого інтервалу часу:

$$\left(\varphi_1 \right)_1 = \left(\Delta \varphi_1 \right)_1 = 0,5 \left(\Delta \dot{\varphi}_1 \right)_1 \Delta t_1; \quad (91)$$

$$\left(\varphi_6 \right)_1 = \left(\Delta \varphi_6 \right)_1 = 0,5 \left(\Delta \dot{\varphi}_6 \right)_1 \Delta t_1. \quad (92)$$

Знаючи $\left(\varphi_1 \right)_1$ і $\left(\varphi_6 \right)_1$, визначають момент опору $\left(M_{on} \right)_1$ і рушійні моменти $\left(Mp_1 \right)_1$, $\left(Mp_6 \right)_1$, обчислюють прискорення в момент часу $t_2 = \Delta t_1$:

$$\begin{aligned} \left(\ddot{\varphi}_1 \right)_1 &= \frac{\left(\left(Mp_1 \right)_1 + \left(M_{on} \right)_1 u_{H1}^{(3)} \right) I_{66}}{I_{11} \cdot I_{66} - I_{16}^2} - \\ &\quad - \frac{\left(\left(Mp_6 \right)_1 + \left(M_{on} \right)_1 u_{H3}^{(1)} u_{36} \right) I_{66}}{I_{11} \cdot I_{66} - I_{16}^2}; \end{aligned} \quad (93)$$

$$\begin{aligned} \left(\ddot{\varphi}_6 \right)_1 &= \frac{\left(\left(Mp_1 \right)_1 + \left(M_{on} \right)_1 u_{H1}^{(3)} \right) I_{16}}{I_{16}^2 - I_{11} \cdot I_{66}} - \\ &\quad - \frac{\left(\left(Mp_6 \right)_1 + \left(M_{on} \right)_1 u_{H3}^{(1)} u_{36} \right) I_{11}}{I_{16}^2 - I_{11} \cdot I_{66}}. \end{aligned} \quad (94)$$

Приймаючи ці значення прискорень сталими протягом інтервалу часу Δt_2 , визначають прирости швидкостей протягом цього інтервалу часу:

$$\left(\Delta \dot{\varphi}_1 \right)_2 = \left(\ddot{\varphi}_1 \right)_1 \Delta t_2; \quad (95)$$

$$\left(\Delta \dot{\varphi}_6 \right)_2 = \left(\ddot{\varphi}_6 \right)_1 \Delta t_2. \quad (96)$$

Швидкості наприкінці інтервалу часу Δt_2 дорівнюють

$$\left(\dot{\varphi}_1 \right)_2 = \left(\dot{\varphi}_1 \right)_1 + \left(\Delta \dot{\varphi}_1 \right)_2, \quad (97)$$

$$\left(\dot{\varphi}_6 \right)_2 = \left(\dot{\varphi}_6 \right)_1 + \left(\Delta \dot{\varphi}_6 \right)_2. \quad (98)$$

Середні значення швидкостей протягом інтервалу часу Δt_2

$$\left(\dot{\varphi}_1 \right)_1 + 0,5 \left(\Delta \dot{\varphi}_1 \right)_2, \quad (99)$$

$$\left(\dot{\varphi}_6 \right)_1 + 0,5 \left(\Delta \dot{\varphi}_6 \right)_2, \quad (100)$$

а прирости кутів повороту

$$\left(\Delta \varphi_1 \right)_2 = \left(\left(\Delta \dot{\varphi}_1 \right)_1 + 0,5 \left(\Delta \dot{\varphi}_1 \right)_2 \right) \Delta t_2, \quad (101)$$

$$(\Delta\varphi_6)_2 = \left(\left(\Delta\dot{\varphi}_6 \right)_1 + 0,5 \left(\Delta\dot{\varphi}_6 \right)_2 \right) \Delta t_2. \quad (102)$$

Кути повороту до моменту часу $t_2 = \Delta t_1 + \Delta t_2$ такі:

$$(\varphi_1)_2 = (\varphi_1)_1 + (\Delta\varphi_1)_2; \quad (103)$$

$$(\varphi_6)_2 = (\varphi_6)_1 + (\Delta\varphi_6)_2. \quad (104)$$

Знаючи $(\varphi_1)_2$, $\left(\dot{\varphi}_1 \right)_2$, $(\varphi_6)_2$, $\left(\dot{\varphi}_6 \right)_2$, знаходять момент опору $M_{ом2}$ та моменти двигунів $(M_{p1})_2$, $(M_{p6})_2$ і продовжують обчислення в межах кута φ_H^{max} .

За результатами розрахунків будують діаграми $\varphi_1(t)$, $\varphi_6(t)$, $\dot{\varphi}_H(t)$, $\varphi_4(t)$ та проводять їх аналіз.

5. Дослідження диференціального зубчастого механізму приводу співвісних гвинтів

У літаках і вертольотах для приводу співвісних повітряних гвинтів знаходять застосування диференціальні зубчасті механізми.

Розглянемо дослідження механізму **CD.AI** (рис. 13) з двома степенями рухомості.

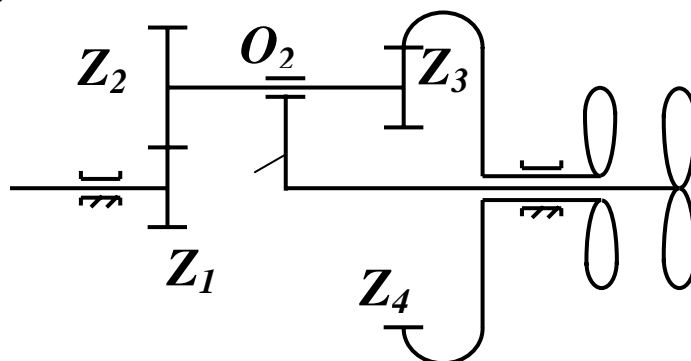


Рис. 13

Вхідна ланка механізму - z_1 , вихідні ланки - z_4 та H . До вхідної ланки від двигуна прикладається рушійний момент M_{p1} , до вихідних ланок – моменти опору $(M_{on})_H$ і $(M_{on})_4$.

Оскільки степінь рухомості механізму $W = 2$, то його рух описується двома рівняннями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_4} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_4} = Q_4, \quad (105)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_H} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_H} = Q_H. \quad (106)$$

Вираз кінетичної енергії механізму має вигляд

$$T = \frac{I_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{km_2 V_{02}^2}{2} + \frac{k \cdot I_2 \dot{\varphi}_2^2}{2} + \frac{I_H \dot{\varphi}_H^2}{2} + \frac{I_4 \dot{\varphi}_4^2}{2}, \quad (107)$$

де

$$\dot{\varphi}_1 = u_{14}^{(H)} \dot{\varphi}_4 + u_{1H}^{(4)} \dot{\varphi}_H; \quad (108)$$

$$u_{1H}^{(H)} = -\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}; \quad u_{1H}^{(4)} = 1 + \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3};$$

$$V_{02} = \dot{\varphi}_H (r_{w1} + r_{w2}); \quad (109)$$

$$\dot{\varphi}_2 = u_{24}^{(H)} \dot{\varphi}_4 + u_{2H}^{(4)} \dot{\varphi}_H; \quad (110)$$

$$u_{24}^{(H)} = \frac{z_4}{z_3}; \quad u_{2H}^{(4)} = 1 - \frac{z_4}{z_3};$$

k - кількість сателітів;

I_1 - момент інерції ланки z_1 і зведеного моменту рухомих ланок двигуна;

I_2 - момент інерції сателіта $z_2 - z_3$;

I_4 - момент інерції ланки z_4 та заднього повітряного гвинта;

I_H - момент інерції водила та переднього повітряного гвинта.

Усі моменти інерції ланок визначаються відносно осей їх обертання. Підставивши (108) - (110) у (107), матимемо

$$\begin{aligned} T = & \frac{I_1 \left(u_{14}^{(H)} \right)^2 \dot{\varphi}_4^2}{2} + \frac{k m_2 (r_{w1} + r_{w2})^2 \dot{\varphi}_H^2}{2} + \\ & + I_1 u_{14}^{(H)} u_{1H}^{(H)} \dot{\varphi}_4 \dot{\varphi}_H + \frac{I_1 \left(u_{1H}^{(4)} \right)^2 \dot{\varphi}_H^2}{2} + \\ & + k I_2 u_{24}^{(H)} u_{2H}^{(4)} \dot{\varphi}_4 \dot{\varphi}_H + \frac{k \cdot I_2 \left(u_{24}^{(H)} \right)^2 \dot{\varphi}_4^2}{2} + \\ & + \frac{k \cdot I_2 \left(u_{2H}^{(4)} \right)^2 \dot{\varphi}_H^2}{2} + \frac{I_H \dot{\varphi}_H^2}{2} + \frac{I_4 \dot{\varphi}_4^2}{2}. \end{aligned} \quad (111)$$

Позначимо

$$I_{44} = I_1 \left(u_{14}^{(H)} \right)^2 + I_2 \left(u_{24}^{(H)} \right)^2 + I_4, \quad (112)$$

$$I_{HH} = I_H + I_1 \left(u_{1H}^{(4)} \right)^2 +$$

$$+ km_2 \left(r_{w1} + r_{w2} \right)^2 + k \cdot I_2 \left(u_{2H}^{(4)} \right)^2, \quad (113)$$

$$I_{4H} = k \cdot I_2 u_{24}^{(H)} u_{2H}^{(4)} + I_1 u_{14}^{(H)} u_{1H}^{(4)}. \quad (114)$$

Отже,

$$T = \frac{I_{44} \dot{\varphi}_4^2}{2} + \frac{I_{HH} \dot{\varphi}_H^2}{2} + I_{44} \dot{\varphi}_4 \dot{\varphi}_H. \quad (115)$$

Визначимо похідні рівнянь (105), (106):

$$\frac{d\dot{T}}{d\dot{\varphi}_4} = I_{44} \dot{\varphi}_4 + I_{4H} \dot{\varphi}_H; \quad (116)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{d\dot{T}}{d\dot{\varphi}_4} = I_{44} \ddot{\varphi}_4 + I_{4H} \ddot{\varphi}_H; \quad (117)$$

$$\frac{d\dot{T}}{d\varphi_4} = 0; \quad (118)$$

$$\frac{d\dot{T}}{d\dot{\varphi}_H} = I_{HH} \dot{\varphi}_H + I_{4H} \dot{\varphi}_4; \quad (119)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{d\dot{T}}{d\dot{\varphi}_H} = I_{HH} \ddot{\varphi}_H + I_{4H} \ddot{\varphi}_4; \quad (120)$$

$$\frac{dT}{d\varphi_H} = 0. \quad (121)$$

Вирази узагальнених сил мають вигляд:

$$Q_4 = Mp_1 u_{14}^{(H)} + (M_{on})_4; \quad (122)$$

$$Q_H = Mp_1 u_{1H}^{(4)} + (M_{on})_H. \quad (123)$$

Тоді

$$I_{44} \ddot{\varphi}_4 + I_{4H} \ddot{\varphi}_H = Mp_1 u_{14}^{(H)} + (M_{on})_4, \quad (124)$$

$$I_{HH} \ddot{\varphi}_H + I_{4H} \ddot{\varphi}_4 = Mp_1 u_{1H}^{(4)} + (M_{on})_H. \quad (125)$$

Прийmemo

$$\begin{aligned} M_{p1} &= a_1 - b_1 \dot{\varphi}_1, \\ (M_{on})_4 &= const, \\ (M_{on})_H &= const, \end{aligned} \quad (126)$$

де

$$a_1 = \frac{\dot{M}_{H1} \dot{\varphi}_{10}}{\varphi_{10} - \varphi_{1H}}; \quad b_1 = \frac{\dot{M}_{H1}}{\varphi_{10} - \varphi_{1H}};$$

M_{H1} - номінальний рушійний момент двигуна;

$\dot{\varphi}_{10}$ - кутова швидкість ланки Z_1 при нульовому навантаженні;

φ_{1H} - кутова швидкість ланки Z_1 при номінальному режимі.

Розв'язки рівнянь (124), (125) будемо знаходити методом скінченних приростів.

Призначимо інтервали часу $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \dots, \Delta t_n$, розглянемо процес розганання механічної системи. Для моменту часу $t = 0$

рушійний момент - $(Mp_1)_0$, а моменти опору - $(M_{on})_4$, $(M_{on})_H$.
Тоді прискорення дорівнюють:

$$\begin{aligned} \left(\ddot{\varphi}_H \right)_0 &= \frac{(M_{on})_4 I_{4H} - (M_{on})_H I_{44}}{I_{4H}^2 - I_{44} I_{HH}} + \\ &+ \frac{(Mp_1)_0 (u_{14}^H I_{4H} - u_{1H}^4 I_{44})}{I_{4H}^2 - I_{44} I_{HH}}; \end{aligned} \quad (127)$$

$$\begin{aligned} \left(\ddot{\varphi}_4 \right)_0 &= \frac{(M_{on})_4 I_{HH} - (M_{on})_H I_{4H}}{I_{44} I_{HH} - I_{4H}^2} + \\ &+ \frac{(Mp_1)_0 (u_{14}^H I_{HH} - u_{1H}^4 I_{4H})}{I_{44} I_{HH} - I_{4H}^2}. \end{aligned} \quad (128)$$

При малих інтервалах часу Δt_1 , Δt_2 , Δt_3 , ..., Δt_n можна вважати, що прискорення протягом цих інтервалів сталі, а швидкості наприкінці інтервалу Δt_1 дорівнюють:

$$\left(\dot{\varphi}_H \right)_1 = \left(\Delta \dot{\varphi}_H \right)_1 = \left(\ddot{\varphi}_H \right)_0 \Delta t_1; \quad (129)$$

$$\left(\dot{\varphi}_4 \right)_1 = \left(\Delta \dot{\varphi}_4 \right)_1 = \left(\ddot{\varphi}_4 \right)_0 \Delta t_1. \quad (130)$$

Приймаючи середні значення швидкостей протягом інтервалу часу Δt_1 рівними $0,5 \left(\Delta \dot{\varphi}_H \right)_1$, $0,5 \left(\Delta \dot{\varphi}_4 \right)_1$, одержують кути повороту наприкінці першого інтервалу часу:

$$\left(\varphi_H \right)_1 = \left(\Delta \varphi_H \right)_1 = 0,5 \left(\Delta \dot{\varphi}_H \right)_1 \Delta t_1; \quad (131)$$

$$(\varphi_4)_1 = \left(\Delta \varphi_4 \right)_1 = 0,5 \left(\Delta \dot{\varphi}_4 \right)_1 \Delta t_1. \quad (132)$$

Знаючи $\left(\dot{\varphi}_H \right)_1$ та $\left(\dot{\varphi}_4 \right)_1$, визначають $\left(\dot{\varphi}_1 \right)_1$ і $(Mp_1)_1$,

обчислюють прискорення в момент часу $t_2 = \Delta t_1$:

$$\begin{aligned} \left(\ddot{\varphi}_H \right)_1 &= \frac{(M_{on})_4 I_{44} - (M_{on})_H I_{4H}}{I_{4H}^2 - I_{44} \cdot I_{HH}} + \\ &+ \frac{(Mp_1)_1 \left(u_{14}^{(H)} I_{4H} - u_{1H}^{(4)} I_{44} \right)}{I_{4H}^2 - I_{44} \cdot I_{HH}}; \end{aligned} \quad (133)$$

$$\begin{aligned} \left(\ddot{\varphi}_4 \right)_1 &= \frac{(M_{on})_4 I_{HH} - (M_{on})_H I_{4H}}{I_{44} \cdot I_{HH} - I_{4H}^2} + \\ &+ \frac{(Mp_1)_1 \left(u_{14}^{(H)} I_{HH} - u_{1H}^{(4)} I_{4H} \right)}{I_{44} \cdot I_{HH} - I_{4H}^2}. \end{aligned} \quad (134)$$

Приймаючи ці значення прискорень сталими протягом інтервалу часу Δt_2 , визначають прирости швидкостей протягом цього інтервалу часу:

$$\left(\Delta \dot{\varphi}_H \right)_2 = \left(\ddot{\varphi}_H \right)_1 \Delta t_2; \quad (135)$$

$$\left(\Delta \dot{\varphi}_4 \right)_2 = \left(\ddot{\varphi}_4 \right)_1 \Delta t_2. \quad (136)$$

Швидкості наприкінці інтервалу часу Δt_2 дорівнюють:

$$\left(\dot{\varphi}_H\right)_2 = \left(\dot{\varphi}_H\right)_1 + \left(\Delta\dot{\varphi}_H\right)_2; \quad (137)$$

$$\left(\dot{\varphi}_4\right)_2 = \left(\dot{\varphi}_4\right)_1 + \left(\Delta\dot{\varphi}_4\right)_2. \quad (138)$$

Середні значення швидкостей протягом інтервалу часу Δt_2 такі:

$$\left(\dot{\varphi}_H\right)_1 + 0,5 \left(\Delta\dot{\varphi}_H\right)_2; \quad (139)$$

$$\left(\dot{\varphi}_4\right)_1 + 0,5 \left(\Delta\dot{\varphi}_4\right)_2. \quad (140)$$

Прирости кутів повороту складають:

$$\left(\Delta\varphi_H\right)_2 = \left(\left(\dot{\varphi}_H\right)_1 + 0,5 \left(\Delta\dot{\varphi}_H\right)_2 \right) \Delta t_2; \quad (141)$$

$$\left(\Delta\varphi_4\right)_2 = \left(\left(\dot{\varphi}_4\right)_1 + 0,5 \left(\Delta\dot{\varphi}_4\right)_2 \right) \Delta t_2. \quad (142)$$

Кути повороту до моменту часу $t_2 = \Delta t_1 + \Delta t_2$ дорівнюють:

$$\left(\varphi_H\right)_2 = \left(\varphi_H\right)_1 + \left(\Delta\varphi_H\right)_2; \quad (143)$$

$$\left(\varphi_4\right)_2 = \left(\varphi_4\right)_1 + \left(\Delta\varphi_4\right)_2. \quad (144)$$

Знаючи $\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_H \\ \varphi_H \end{pmatrix}_2$ та $\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_4 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}_2$, визначають $\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}_2$, знаходять $\begin{pmatrix} M_{p1} \\ \dot{\varphi}_1 \end{pmatrix}_2$ і продовжують обчислення до того часу, коли збільшення $\dot{\varphi}_H$ і $\dot{\varphi}_4$ стануть несуттєвими.

За розрахунками будують діаграми $\varphi_H(t)$, $\varphi_4(t)$, $\varphi_1(t)$, $\dot{\varphi}_H(t)$, $\dot{\varphi}_4(t)$, $\dot{\varphi}_1(t)$ та виконують їх аналіз.

Бібліографічний список

- Кириченко В. И. Редукторы ТВД и вертолетных двигателей. – Х., 1978.
- Кулебакин В. С., Нагорский В. Д. Электропривод самолетных агрегатов и механизмов. – М., 1969.
- Левитский Н. И. Колебания в механизмах. – М., 1988.
- Механика промышленных роботов/ В 3 кн.; Под ред. К. В. Фролова, Е. И. Воробьева. – М., 1988. Кн. 2. Расчет и проектирование механизмов.
- Теоретическая механика. Динамика/ Под общ. ред. М. А. Павловского. – К., 1990.

Спренне Сергій Володимирович
Шебанов Ігор Георгійович

ДИНАМІКА ВИКОНАВЧИХ І ПЕРЕДАВАЛЬНИХ
МЕХАНІЗМІВ АВІАЦІЙНОЇ ТЕХНІКИ

Редактор Л.О. Кузьменко

Зв. план, 2003

Підписано до друку 22.09.2003

Формат 60x84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк.

Ум. друк. арк. 2,2. Обл.-вид. арк. 2,5. Наклад 100 прим.

Замовлення 438. Ціна вільна

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
<http://www.khai.edu>

Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu