

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Т.І. Бондарева, В.М. Красніков, Ю.О. Романенков

АНАЛІЗ І ОЦІНКА РИЗИКІВ У ПІДПРИЄМНИЦЬКІЙ ДІЯЛЬНОСТІ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2007

Аналіз і оцінка ризиків у підприємницькій діяльності / Т.І. Бондарєва, В.М. Красніков, Ю.О. Романенков. – Навч. посібник. – Харків: Нац. аерокосм. ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2007. – 47 с.

Наведено теоретичний матеріал і описано практичне застосування різних методів аналізу і оцінки ризиків у підприємницькій діяльності, що входить у програму підготовки студентів спеціальностей "Менеджмент організацій" і "Проектний менеджмент".

Матеріал кожного розділу містить необхідні теоретичні відомості, формулювання й приклади розв'язання типових задач, а також контрольні запитання та завдання для самостійної роботи.

Для студентів факультету економіки та менеджменту, а також студентів заочної форми навчання за спеціальностями "Менеджмент організацій" і "Управління проектами".

Іл. 7. Табл. 22. Бібліогр.: 10 назв

Рецензенти: д-р екон. наук, проф. В.М. Тимофєєв,
канд. екон. наук, доц. Л.В. Базалієва

ЗМІСТ

Вступ	4
1. Суть, поняття і види ризику	5
2. Оцінка ризику	10
2.1. Статистичні методи оцінки ризику	10
2.2. Оцінка систематичного ризику	15
3. Застосування теорії ігор для прийняття рішень в умовах ризику..	19
3.1. Основні поняття теорії ігор	19
3.2. Змішані стратегії	23
3.3. Функція корисності Неймана - Morgenштерна	28
4. Оцінка ризику інвестиційних проектів	36
Бібліографічний список	46

ВСТУП

Історичний досвід економічних відносин показує, що на будь-якому підприємстві завжди зберігається можливість настання кризової ситуації, що пов'язана, з одного боку, з об'єктивними передумовами, такими, як випадковість, невизначеність і конфліктність, а з іншого – із суб'єктивними, що залежать від характеру й досвіду керівника економічної організації (або підприємства).

Будь-яка сфера людської діяльності, економіка зокрема, пов'язана із прийняттям рішень в умовах невизначеної інформації. Джерела невизначеності можуть бути різними: нестабільність економічної й політичної ситуації, невизначеність дій партнерів по бізнесу (при відсутності договорів із чіткими зобов'язаннями), велика кількість випадкових обставин, урахувати які не завжди можливо (погодні умови, що впливають на даний вид бізнесу, коливання попиту на товари, неточність інформації тощо). Економічні рішення з урахуванням перелічених і багатьох інших факторів приймаються в рамках аналітичного підходу до вибору найкращої дії.

Специфіка підприємницької діяльності є такою, що в економічній боротьбі з конкурентами-виробниками за покупця підприємство продає свою продукцію в кредит, ризикуючи при цьому не одержати гроші в строк, або розміщає тимчасово вільні гроші в банку з ризиком недоодержання доходу через темпи інфляції, або веде комерційні експортно-імпортні операції з ризиком втрат від несприятливої кон'юнктури ринку валют тощо.

В наш час вчені багатьох країн світу займаються дослідженнями різних напрямків проблеми ризику. Багато хто з провідних учених і підприємців Заходу вважають, що економічна діяльність і політична влада мають спиратися не стільки на знання менеджерів, скільки на спеціальні знання експертів в галузі економічного, політичного й технологічного ризиків (прикладом тому може бути підручник математика Т. Сааті [1]).

1. СУТЬ, ПОНЯТТЯ І ВИДИ РИЗИКУ

Під ризиком (від *risko* (ісп.) – стрімка скеля) розуміють небезпеку (загрозу) виникнення втрат або збитку. Поняття ризику неоднозначне. Один з варіантів застосування цього поняття з економічної точки зору пов'язано з роботою Дж. М. Кейнса [2], в якій він обґрунтував ідею того, що у вартість товару мають входити можливі витрати, викликані непередбаченими змінами ринкових цін, зношуваністю устаткування або втратами в результаті катастроф. У зв'язку з цим, на думку Кейнса, для покриття можливого відхилення реального прибутку від очікуваного необхідно ввести поняття «витрати ринку». За Кейнсом, необхідно враховувати три види ризику: ризик підприємця, ризик кредитора й ризик інфляції.

Представники класичної теорії ризику Дж. Мілль та І. Сеніор, розрізняли в структурі підприємницького прибутку відсоток як частку на вкладений капітал, зарплату підприємця (капіталіста) та плату за ризик як відшкодування можливого збитку, пов'язаного з підприємництвом.

У класичній теорії економічний ризик ототожнюється із середнім значенням втрат, які можуть статися внаслідок реалізації обраного рішення, і являє собою збиток, що є наслідком цього рішення. Таке тлумачення поняття "ризик" сприяло виникненню іншого його розуміння, і уже в 30-ті роки ХХ століття економісти А. Маршалл і А. Пігу розробили основи неокласичної теорії економічного ризику.

Відповідно до їхніх поглядів підприємство, що працює в умовах невизначеності й прибуток якого є величиною недетермінованою, має керуватися двома критеріями: розмірами очікуваного прибутку та величиною його можливих коливань. При цьому підприємцеві варто враховувати концепцію граничної корисності [3], яка пропонує при виборі однієї з альтернатив, що дозволяє одержати однаковий прибуток, вибирати ту, коливання прибутку якої менше. Таким чином, робиться однозначний висновок: визначений (детермінований) прибуток має більшу корисність, ніж прибуток того ж розміру, але з більшою ймовірністю можливих коливань. Тому А. Маршалл виводить, що не вигідно грати в лотереях і брати участь в азартних іграх (і важко цьому знайти заперечення, оскільки математичні методи статистики й теорії ігор дозволяють обчислити у ряді випадків можливість успіху, що може бути надзвичайно низькою). Однак знайшлися супротивники такої точки зору, що вважають, що в цій рекомендації не враховується задоволення людей, які беруть участь в азартних заходах. Цей факт з'явився доповненням до неокласичної теорії про те, що заради більшого очікуваного прибутку підприємець може піти на більший ризик.

Ризик – складне явище, що і обумовлює можливість співіснування багатьох визначень цього поняття з різних точок зору.

Розглянемо деякі існуючі підходи до розуміння категорії «ризик».

Ризик – це спосіб дій у невизначених умовах; ситуативна характеристика діяльності, що полягає у невизначеності її результату й появи можливих несприятливих наслідків у разі неуспіху; подія або група родинних випадкових подій, що наносять збиток об'єкту, який володіє даним ризиком; міра розсіювання (дисперсія) отриманих в результаті прогнозу оціночних показників розглянутої діяльності (прибуток, рентабельність капіталу та ін.)

Об'єктивність ризику полягає в тому, що він існує незалежно від суб'єкта, що ризикує, а суб'єктивність – у тому, що кожен індивід оцінює його (ризик) по-різному (внаслідок особливостей характеру, одержаних знань, набутого досвіду).

Залежно від ступеня визначеності можливих виходів або наслідків різних дій, з якими стикається особа, що приймає рішення (ОПР), у теорії прийняття рішень розглядаються три види моделей вибору рішень:

- в умовах невизначеності, якщо відомо, що кожна дія приведе до конкретного результату;

- при невизначеності, коли дії мають багато окремих виходів, але їх імовірності невідомі;

- при ризику, якщо кожна дія приводить до одного з багатьох можливих результатів, причому кожен результат має обчислену або експертну ймовірність появи (відому ОПР).

Проблема ризику й прибутку – одна з ключових в економічній діяльності, зокрема, в управлінні виробництвом і фінансами. Підприємець згодний іти на ризик в умовах невизначеності, оскільки поряд з ризиком втрат існує можливість одержання прибутків. У роботі [4] вказується на те, що якщо ризики не враховуються в економічній діяльності, то вони стають джерелом, з одного боку, збитків, а з іншого – прибутків. Можна вибрати рішення, що припускають менший ризик, але при цьому буде менше одержуваний прибуток, тобто більш високий ризик обумовлено більш високим доходом (рис. 1.1).

З рис. 1.1 видно, що нульовий ризик забезпечує прибуток Π_1 , а при ризику P_2 прибуток має значення Π_3 , $\Pi_3 > \Pi_2 > \Pi_1$.

Ще раз зупинимося на суб'єктивності оцінки ризику підприємцем згідно з наведеним його визначенням. Безумовно, поряд з об'єктивністю ризик завжди суб'єктивний, оскільки реалізується людиною. Саме підприємець оцінює ситуацію, розробляє можливі виходи з неї і уявляє їх здійснення, робить, нарешті, один вибір з багатьох альтернатив. При цьому важливу роль відіграє його інформованість, досвід, кваліфікація та ділові якості.

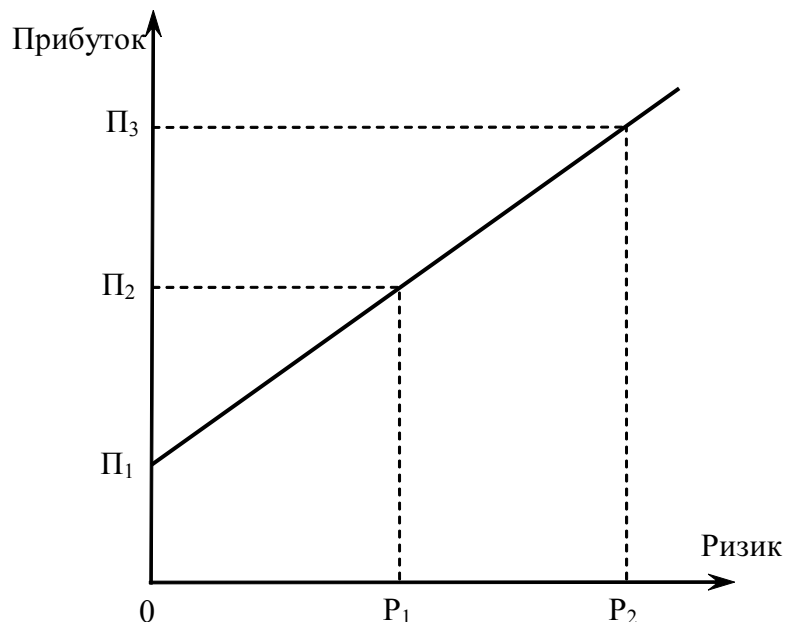


Рис. 1.1. Залежність ризику від прибутку

Уподобання підприємця звичайно відображаються в так званій карті переваг очікуваної комерційної ефективності вкладених коштів (прибутковості) над ризиком її неотримання. Ця карта відображає також урахування декількох рівнів корисності для підприємця (рис. 1.2).

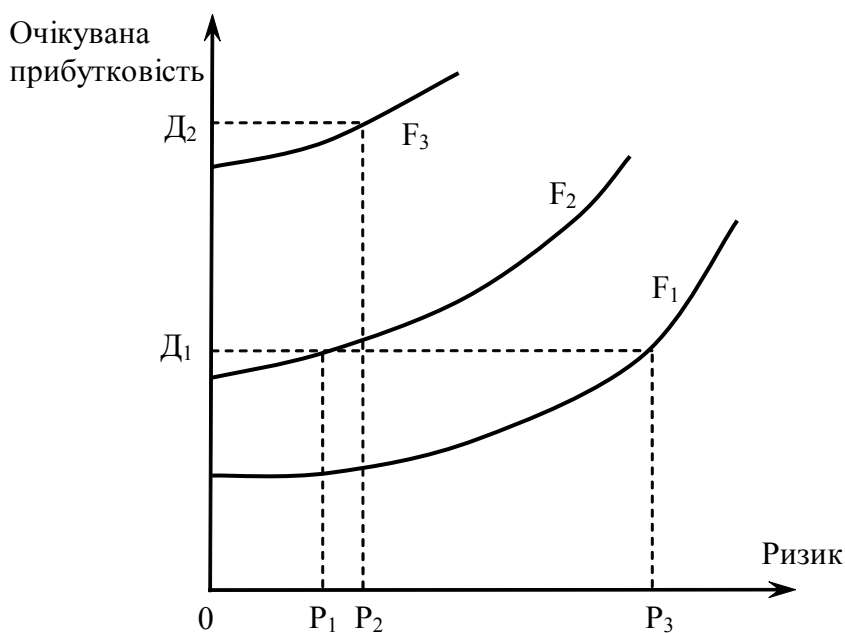


Рис. 1.2. Карта переваг між очікуваною прибутковістю та ризикованістю дій

Криві на карті переваги мають позитивну спрямованість, тому що обидва критерії зростають, але вони протилежні перевагам підприємця. Їх називають «криві рівних переваг» або «криві байдужості», тому що кожна з них відображає однакові переваги для підприємця при даному рівні його задоволеності очікуваною

ефективністю вкладень і ризикованістю рішень. При цьому рівнів задоволеності може бути кілька. На рис. 1.2 їх показано три: найбільш низький з них – F_1 , а найбільш високий – F_3 . Рівень F_1 нижчий за рівень F_2 , тому що при однаковій прибутковості величина ризику $P_3 > P_1$. Сполучення очікуваної рентабельності прийнятого рішення і його ризикованості, що характеризують криві рівних переваг для рівня F_3 , виявляється більш прийнятним внаслідок більш високої очікуваної прибутковості вкладень у дане підприємство.

Далі проаналізуємо декілька важливих видів ризиків.

Політичний ризик – це можливість виникнення збитків або скорочення розмірів прибутку організації, діяльність якої є наслідком державної політики. Таким чином, політичний ризик пов'язано з можливими змінами в пріоритетних напрямках діяльності уряду держави. Урахування даного виду ризику особливо важливе у країнах з нестійким законодавством, відсутністю традицій і культури підприємництва. Політичний ризик властивий підприємницькій діяльності, його не можна уникнути, можна лише вірно оцінити й урахувати.

Технічний ризик. Ефективна підприємницька діяльність, як правило, пов'язана з освоєнням нової техніки й технології, пошуком резервів, підвищенням інтенсивності виробництва. Однак впровадження нової техніки й технології призводить до небезпеки техногенних катастроф, що спричиняють значний збиток природі, людям, виробництву.

Технічний ризик визначається ступенем організації виробництва, проведенням превентивних заходів (регулярної профілактики устаткування, заходів безпеки праці), можливістю проведення ремонту устаткування власними силами підприємства.

Виробничий ризик пов'язано з виготовленням продукції, товарів і послуг; з будь-якими видами виробничої діяльності, коли підприємці стикаються з проблемами неадекватного використання сировини, зростання собівартості продукції, збільшення втрат робочого часу, використання нових методів виробництва.

Комерційний ризик – це ризик, що виникає при реалізації товарів і послуг, вироблених або куплених підприємцем. Комерційний ризик пов'язано з реалізацією товару (послуг) на ринку, його транспортуванням, прийманням товару (послуг) покупцем і його платоспроможністю, а також форс-мажорними обставинами.

Під **фінансовим** розуміють ризик, що виникає при здійсненні фінансового підприємництва або фінансових угод, виходячи з того, що у фінансовому підприємстві в ролі товару виступають або валюта, або цінні папери, або кошти. До фінансового ризику належать валютний, кредитний і інвестиційний.

Валютний ризик – це ймовірність фінансових втрат внаслідок зміни курсу валют, що може відбутися в період між укладанням

контракту й фактичним здійсненням розрахунків по ньому. Валютний курс, установлюваний з урахуванням купівельної спроможності валют, досить рухливий.

Валютний ризик містить три різновиди: економічний ризик, ризик переводу, ризик угод.

Економічний ризик для підприємницької фірми полягає в тому, що вартість її активів і пасивів може мінятися в більшу або меншу сторону (у національній валюті) внаслідок майбутніх змін валютного курсу. Це також стосується інвесторів, закордонні інвестиції яких – акції або боргові зобов'язання – приносять прибуток в іноземній валюті.

Ризик переводу має бухгалтерську природу й пов'язаний з розходженнями в обліку активів і пасивів фірми в іноземній валюті. У тому випадку, коли відбувається падіння курсу іноземної валюти, в якій виражені активи фірми, вартість цих активів зменшується.

Ризик угод – це ймовірність валютних збитків щодо конкретних операцій в іноземній валюті. Ризик угод виникає через невизначеність вартості в національній валюті інвалютної угоди в майбутньому. Даний вид ризику існує як при укладанні торговельних контрактів, так і при одержанні або наданні кредитів і полягає в можливості зміни величин надходжень або платежів при перерахуванні в національній валюті.

Кредитний ризик пов'язано з можливістю невиконання підприємницькою фірмою своїх фінансових зобов'язань перед інвестором внаслідок використання зовнішньої позики для фінансування діяльності фірми. Отже, кредитний ризик виникає при діловому спілкуванні підприємства з кредиторами: банком та іншими фінансовими установами; контрагентами: постачальниками й посередниками; а також з акціонерами.

Інвестиційний ризик обумовлено специфікою вкладання підприємницькою фірмою коштів у різні проекти.

Галузевий ризик – це ймовірність втрат внаслідок змін в економічному стані галузі.

Інноваційний ризик – це ймовірність втрат, що виникають при вкладенні підприємницькою фірмою коштів у виробництво нових товарів і послуг, які, можливо, не знайдуть очікуваного попиту на ринку.

Контрольні запитання й завдання

1. Назвіть основні причини існування ризиків у підприємницькій діяльності.

2. Наведіть поняття ризику, які використовували представники класичної теорії.

3. Дайте тлумачення ризику з точки зору неокласичної теорії економічного ризику.

4. Зробіть аналіз різних визначень ризику. Поясніть, яке з них, на вашу думку, найбільш повно відбиває суть ризику.
5. Проілюструйте і прокоментуйте залежність ризику від прибутку.
6. Побудуйте карту переваг, прокоментуйте її.
7. Наведіть приклади побутових і виробничих ризикових ситуацій.
8. Назвіть ризики, що найбільш характерні для діяльності фірми збуту.
9. Назвіть ризики, що характерні для функціонування підприємства з виробництва продуктів харчування.
10. Назвіть ризики, що виникають у діяльності підприємства сфери послуг.
11. Визначте ризики, характерні для функціонування банку.
12. Розгляньте діяльність страхової компанії та назвіть ризики, що виникають у її функціонуванні.
13. Визначте ризики, що виникають у діяльності вищого навчального заходу.
14. Перелічте ризики сільськогосподарського підприємства.
15. Дайте характеристику й назвіть причини екологічних ризиків.

2. ОЦІНКА РИЗИКУ

Під оцінкою ризику розуміють зіставлення варіантів рішень, які пропонуються з урахуванням можливих вигід і втрат. Трудність оцінки конкретного виду ризику в діяльності різних підприємств обумовлена низькою ефективністю методик кількісних і якісних оцінок ризику, що пов'язано з багатьма факторами внутрішнього й зовнішнього середовища підприємства, які впливають на виникнення та реалізацію ризиків. Крім того, особлива проблема полягає в суперечливості об'єктивних і суб'єктивних оцінок факторів виникнення ризиків.

2.1. Статистичні методи оцінки ризику

Як міру ризику можна приймати величину випадкового збитку (або середнє значення відповідної випадкової величини)

$$R = M(x) = \bar{x}, \quad (2.1)$$

де $M(x)$ – математичне сподівання випадкової величини x ,

\bar{x} – середнє очікуване значення (середньозважене значення всіх можливих результатів), визначене на основі ймовірності одержання кожного результату

$$\bar{x} = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n = \sum_{i=1}^n p_ix_i, \quad (2.2)$$

де p_i – імовірність настання i -го результату причому $\sum p_i = 1$;

x_i – абсолютне значення i -го результату;

n – число варіантів результату події.

Дисперсія являє собою середнє зважене значення квадратів відхилень дійсних результатів від середніх очікуваних

$$\sigma^2 = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 P_i. \quad (2.3)$$

Для оцінки ризику інвестора може використовуватися інша формула знаходження дисперсії, оскільки до уваги береться той факт, що ризик інвестора характеризується можливими оцінками його мінімального й максимального прибутків. При цьому, чим більшою є різниця між цими величинами при однаковій їх імовірності, тим вище ступінь ризику [6], а формула (2.3) матиме вигляд

$$\sigma^2 = P_{\max} (x_{\max} - \bar{x})^2 + P_{\min} (x_{\min} - \bar{x})^2, \quad (2.4)$$

де P_{\max} і P_{\min} – імовірності одержання максимального й мінімального прибутків відповідно;

x_{\max} і x_{\min} – максимальна й мінімальна величини прибутку відповідно.

Середньоквадратичне (стандартне) відхилення визначається так:

$$\sigma = \sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 P_i}. \quad (2.5)$$

Як дисперсія, так і стандартне відхилення характеризують абсолютне коливання можливих результатів.

Для виключення впливу абсолютних значень результатів використовують показник відносного коливання – коефіцієнт варіації.

Згідно з виразом (2.3) значення дисперсії $\sigma^2(x)$ залежить від середнього очікуваного значення результату, тому коливання результату може сприйматися по-різному. Коефіцієнт варіації V змінюється від 0 до 100%, являє собою відношення середньоквадратичного відхилення до середнього арифметичного та характеризує ступінь відхилення можливих значень

$$V = \pm \frac{\sigma(x)}{\bar{x}}. \quad (2.6)$$

Тут доречно помітити, що мірою ризику вважають середнє очікуване значення \bar{x} , а ступенем ризику – середньоквадратичне відхилення результату $\sigma(x)$.

Отже, чим вище коефіцієнт варіації, тим сильнішим є коливання, тим більш ризикованим є аналізований варіант вкладення капіталу. Це досить зручна характеристика, оскільки, наприклад, втрата

1000 грош. од. з $\sigma = 10$ грош. од. і втрата цієї ж суми з $\sigma = 100$ грош. од. мають різний ризик, що й показує коефіцієнт варіації.

Коефіцієнт варіації як безрозмірна величина дає можливість порівнювати результати різних проектів, які, можливо, в абсолютному вираженні показників не можна було б порівнювати (тонни й кілометри або кількість штук).

Найчастіше показником ефективності фінансового рішення є прибуток. Розглянемо вибір ОПР одного з двох варіантів інвестицій в умовах ризику. Припустимо, що є два проекти А і В, у які можна вкласти кошти. Відомо, що проект А в майбутньому має забезпечити рівень прибутку, середнє значення якого дорівнює m_A з дисперсією σ_A^2 . Для проекту В аналогічні дані дорівнюють відповідно m_B і σ_B^2 . Середньоквадратичні відхилення прибутків проектів А і В становлять σ_A й σ_B . Для ОПР можливі такі варіанти вибору:

- а) $m_A = m_B$, $\sigma_A < \sigma_B$ – проект А переважніше;
- б) $m_A > m_B$, $\sigma_A < \sigma_B$ – проект А переважніше;
- в) $m_A > m_B$, $\sigma_A = \sigma_B$ – проект А переважніше;
- г) $m_A > m_B$, $\sigma_A > \sigma_B$;
- д) $m_A < m_B$, $\sigma_A < \sigma_B$.

У випадках (г) і (д) рішення про вибір проекту А або В залежить від суб'єктивних переваг ОПР, оскільки відношення до ризику у різних людей різне. Зокрема, у випадку (г) проект А забезпечує більш високий середній прибуток, однак він більш ризикований. У випадку (д) при виборі проекту А ризик менший, але й очікуваний прибуток менше. Подібні задачі можна вирішувати за допомогою теорії Неймана-Моргенштерна (див. підрозд. 3.3).

Задача 2.1. Є два інвестиційних проекти. Перший з імовірністю $p_1 = 0,6$ забезпечує прибуток $v_1 = 15$ млн грн, однак, з імовірністю $p_1^* = 0,4$ можна втратити $\xi_1 = 5,5$ млн грн. При використанні другого проекту з імовірністю $p_2 = 0,8$ можна одержати прибуток $v_2 = 10$ млн. грн і з імовірністю $p_2^* = 0,2$ втратити $\xi_2 = 6$ млн грн. Який проект вибрати?

Розв'язання. Оцінимо середні прибутки за проектами:

$$1\text{-й: } p_1 v_1 + p_1^* \xi_1 = 0,6 \cdot 15 + 0,4(-5,5) = 6,8 \text{ млн грн.};$$

$$2\text{-й: } p_2 v_2 + p_2^* \xi_2 = 0,8 \cdot 10 + 0,2(-6) = 6,8 \text{ млн грн.}$$

Середній прибуток однаковий за обома проектами. Оцінимо середньоквадратичні відхилення прибутків за проектами:

$$1\text{-й: } \sqrt{0,6(15 - 6,8)^2 + 0,4(-5,5 - 6,8)^2} = 10,04 \text{ млн грн.};$$

$$2\text{-й: } \sqrt{0,8(10 - 6,8)^2 + 0,2(-6 - 6,8)^2} = 6,4 \text{ млн грн.}$$

Другий проект переважніше.

Задача 2.2. Акціонерне товариство (АТ) має борг у розмірі 80 млн грн, який необхідно сплатити. Йому запропоновано два ризикових проекти (табл. 2.1). Який проект має вибрати рада директорів АТ?

Таблиця 2.1

Характеристики	Проект 1			Проект 2		
	Імовірність події	0,2	0,6	0,2	0,4	0,2
Грошові надходження, млн грн	40	50	60	0	50	100

Розв'язання. Для оцінки ефективності розглянутих проектів обчислимо математичні сподівання m_1 і m_2 , а також середньоквадратичні відхилення σ_1 і σ_2 проектів:

$$1\text{-й: } m_1 = 40 \cdot 0,2 + 50 \cdot 0,6 + 60 \cdot 0,2 = 50 \text{ млн грн;}$$

$$2\text{-й: } m_2 = 0 \cdot 0,4 + 50 \cdot 0,2 + 100 \cdot 0,4 = 50 \text{ млн грн;}$$

$$1\text{-й: } \sigma_1 = \sqrt{0,2(40 - 50)^2 + 0,6(50 - 50)^2 + 0,2(60 - 50)^2} = 6,3 \text{ млн грн;}$$

$$2\text{-й: } \sigma_2 = \sqrt{0,4(0 - 50)^2 + 0,2(50 - 50)^2 + 0,4(100 - 50)^2} = 44,7 \text{ млн грн.}$$

Виходить, що при середній прибутковості обох проектів, що дорівнює 50 млн грн, варто вибирати перший проект, тому що середньоквадратичне відхилення прибутку за першим проектом у сім разів менше, ніж за другим. Однак не врахована та обставина, що АТ має борг 80 млн грн, який необхідно сплатити.

Для подальшого дослідження скористаємося центральною граничною теоремою А. М. Ляпунова [7], відповідно до якої в практичних задачах розподіл суми випадкових величин близький до нормального закону. Якщо припустити, що прибутковість за цими проектами розподілена за нормальним законом, то з імовірністю 0,997 можливі значення виграшів і платежів за цими ж проектами визначимо у діапазонах $m \pm 3\sigma$:

$$1\text{-й: } m_1 = 50 \pm 3 \cdot 6,3 \text{ млн грн; } 31,1 \leq m_1 \leq 68,9 \text{ млн грн;}$$

$$2\text{-й: } m_2 = 50 \pm 3 \cdot 44,7 \text{ млн грн; } -84,1 \leq m_2 \leq 184,1 \text{ млн грн.}$$

Таким чином, прибутковість, що одержана за обома проектами, знаходиться у різних інтервалах і при виборі менш ризикового

першого проекту з урахуванням середньоквадратичного відхилення прибутку АТ може зменшити свій борг, але не звільнитися зовсім.

Якщо прийняти другий проект, АТ може повністю звільнитися від боргів й одержати при цьому чималий прибуток. Безумовно, якщо не повезе, то АТ очікує банкрутство. Необхідно прийняти рішення.

Задача 2.3. Підприємство відправило замовникові партію з 500 виробів. Імовірність втрати (або псування) виробів під час транспортування складає 0,2%. На яку суму необхідно застрахувати дану партію виробів для компенсації можливих збитків при нормі виплати страховою компанією 36%?

Розв'язання. Спочатку відповімо на питання: скільки виробів може бути втрачено при транспортуванні і з якою імовірністю? Використаємо закон Пуассона, який дозволяє оцінити імовірність настання рідких подій (закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини):

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!},$$

де k – кількість появ незалежних подій;

λ – середнє число (або середня інтенсивність) появи таких подій у n випробуваннях;

$$P - \text{імовірність появи події } P = \frac{P(\%)}{100} = \frac{0,2}{100} = 0,002;$$

$$n = 500.$$

Середня інтенсивність втрат на одну партію виробів

$$\lambda = n \cdot P = 500 \cdot 0,002 = 1.$$

Згідно з законом Пуассона ймовірність відсутності втрат виробів при транспортуванні

$$P_{500}(0) = \frac{1^0 \cdot e^{-1}}{0!} = e^{-1} = 0,36788.$$

Імовірність втрати одного виробу

$$P_{500}(1) = \frac{1^1 \cdot e^{-1}}{1!} = e^{-1} = 0,36788.$$

Імовірність втрати двох виробів

$$P_{500}(2) = \frac{1^2 \cdot e^{-1}}{2!} = \frac{0,36788}{2} = 0,18394.$$

Аналогічно обчислимо імовірності втрати іншої кількості виробів і запишемо отримані результати в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

Число втрачених виробів	Імовірність втрати визначеної кількості виробів	Середня кількість втрачених виробів	Нагромаджена кількість втрачених виробів
K	$P_n(K)$	$K \cdot P_n(K)$	$\sum K \cdot P_n(K)$
0	0,36788	0	0
1	0,36788	0,36788	0,36788
2	0,18394	0,36788	0,73576
3	0,06131	0,18393	0,91969
4	0,01533	0,06132	0,98101
5	0,00307	0,01535	0,99636
6	0,000511	0,00307	0,99943
7	0,000073	0,00051	0,99994
8	0,000008	0,00006	1,00000

Оскільки очевидно, що імовірність втрати восьми виробів надзвичайно мала, то подальші обчислення можна припинити.

Нагромаджена кількість втрачених виробів дорівнює середній інтенсивності втрат

$$\sum K \cdot P_n(K) = \lambda = 1,0.$$

Норма доходу страхової компанії $\alpha = 36\%$, що встановлюється з урахуванням середньої вартості втрачених під час транспортування виробів. Тому страхова сума має складати не менше

$$S = \lambda \left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) = 1 \left(1 + \frac{36}{100}\right) = 1,36 \text{ від вартості виробу.}$$

2.2. Оцінка систематичного ризику

Систематичний ризик (завжди присутній і обумовлений діяльністю конкретного підприємства) можна визначити за допомогою коефіцієнта β , що дозволяє оцінити рівень коливань результатів діяльності якої-небудь галузі щодо економіки країни в цілому, або результатів діяльності підприємства щодо всієї галузі. Коефіцієнт β у фінансовому менеджменті називають коефіцієнтом чутливості, який можна обчислити за формулою

$$\beta = \frac{\rho_{xx_i}}{\sigma_x^2}, \quad (2.6)$$

де ρ_{xx_i} – коефіцієнт кореляції випадкових величин x й x_i , які характеризують i -у галузь і всю економіку в цілому.

Коефіцієнт кореляції розраховують так:

$$\rho_{xx_i} = \frac{1}{(n-1)\sigma_x\sigma_{x_i}} \sum_{i=1}^n (x - \bar{x})(x - \bar{x}_i). \quad (2.7)$$

Галузь з показником $\beta=1$ має коливання результатів своєї діяльності, що дорівнюють ринковим; при $\beta < 1$ – коливання нижче ринкових; при $\beta > 1$ – коливання в галузі перевищують коливання в економіці в цілому.

Коефіцієнт β застосовують і для оцінки ризику вкладень у цінні папери, його розраховують за формулою

$$\beta = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad (2.8)$$

де Δ_i – відсоток зміни курсу i -го цінного паперу;

Δ – середній відсоток зміни курсів акцій на фондовому ринку.

Коефіцієнт β характеризує тенденцію курсу акції рухатися вгору й униз разом з ринком: акція з високим β більш мінлива ніж ринок, а акція з низьким β менш мінлива ніж середня (середня акція має $\beta=1$).

У фінансовому бізнесі основне значення має рівняння моделі ціноутворення активу капіталу:

$$R_{необ.i} = R_c + \beta(R_{оч} - R_y), \quad (2.9)$$

де $R_{необ.i}$ – необхідна норма прибутку на акцію;

$R_{оч}$ – очікуваний прибуток від інвестицій на фондовій біржі;

R_y – норма прибутку за безризиковими цінними паперами.

В рівнянні (2.9) премія за ризик $\beta(R_{оч} - R_y)$ залежить від коефіцієнта β акції.

Кожний вкладник капіталу має зробити вибір – або високий прибуток від ризикових операцій, або низький прибуток від безризикових. Тому певний інтерес має рівняння, що є бюджетним обмеженням та ілюструє взаємозв'язок ризику й прибутку:

$$R_{оч} = R_y + [(R_{оч.б.} - R_y) / \sigma_{\bar{b}}] \sigma_{оч}, \quad (2.10)$$

де $R_{оч}$ – очікуваний прибуток;

R_y – вільний від ризику прибуток або норма прибутку за безризиковими цінними паперами;

$R_{оч.б.}$ – очікуваний прибуток від інвестицій на фондовій біржі;

$\sigma_{\bar{b}}$ – стандартне відхилення прибутку від вкладів на фондовій біржі;

$\sigma_{оч}$ – стандартне відхилення очікуваного прибутку.

Аналіз рівняння (2.10) показує, що при зростанні стандартного відхилення $\sigma_{оч.б.}$ буде збільшуватися й середньозважений очікуваний прибуток $R_{оч}$.

При виконанні статистичних розрахунків ступеня ризику необхідно мати велику кількість даних, які не завжди є в аналітика

(при малій виборці отримані у розрахунках висновки не завжди точні і надійні). Крім того, збирання та зберігання цих даних є непростими задачами. Тому аналітики використовують ряд інших методів.

Задача 2.4. Показники роботи фірми за останні 12 періодів наведено в табл. 2.3.

Таблиця 2.3

Характеристики	Номер періоду											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ефективність цінних паперів, %	21	20	19	17	20	17	19	20	8	10	9	20
Ефективність ринку цінних паперів, %	20	20	21	15	19	17	18	19	9	11	9	20

Зробіть висновок щодо стабільності роботи фірми порівняно з ефективністю роботи галузі в цілому.

Розв'язання. Аналіз виконаємо на основі розрахунку коефіцієнта чутливості β :

$$\bar{x} = 16,67; \bar{y} = 16,5; \bar{y}^2 = 290,33; \sigma_y^2 = 19,73;$$

$$\overline{xy} = (21 \cdot 20 + 20 \cdot 20 + 19 \cdot 21 + 17 \cdot 15 + 20 \cdot 19 + 17 \cdot 17 + 19 \cdot 18 + 20 \cdot 19 + 8 \cdot 9 + 10 \cdot 11 + 9 \cdot 9 + 20 \cdot 20) / 12 = 294;$$

$$V_{xy} = \frac{n}{n-1} (\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}) = \frac{12}{11} (294 - 16,67 \cdot 16,5) = 20,67;$$

$$\beta = 20,67 / 19,73 = 1,05.$$

Отже, $\beta > 1$, тобто фірма працює менш стабільно, ніж галузь у цілому.

Задача 2.5. Ефективність роботи шахти і вугільної промисловості в цілому за останні сім періодів наведено у табл. 2.4.

Таблиця 2.4

Характеристики	Показники						
Ефективність роботи шахти (X)	20	10	5	-4	5	-3	4
Ефективність роботи вугільної промисловості (Y)	30	20	10	-5	-8	-10	-8

Потрібно на основі коефіцієнта чутливості зробити висновок щодо стабільності роботи шахти порівняно з вугільною промисловістю.

Рішення. Обчислимо коефіцієнт чутливості

$$\bar{x} = 5,286; \bar{y} = 4,143; \bar{y}^2 = 236,143; \sigma_y^2 = 255,475;$$

$$x\bar{y} = (20 \cdot 30 + 10 \cdot 20 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 5 - 5 \cdot 8 + 3 \cdot 10 - 4 \cdot 8) / 7 = 118,286;$$

$$V_{xy} = \frac{n}{n-1} (x\bar{y} - \bar{x} \cdot \bar{y}) = \frac{7}{6} (118,286 - 5,286 \cdot 4,143) = 112,450;$$

$$\beta = 112,450 / 255,475 = 0,444 < 1.$$

Отже, шахта працює більш стабільно, ніж вугільна галузь в цілому.

Контрольні запитання і завдання

1. Поясніть, як визначається математичне сподівання випадкової величини і що воно показує.
2. Поясніть, що являє собою дисперсія випадкової величини і як її обчислюють для оцінки ризику інвестора.
3. Сформулюйте, що таке відносний показник ризику.
4. Дайте визначення коефіцієнта варіації. Поясніть, у чому полягає його перевага над абсолютними показниками ризику.
5. Оцініть інвестиційні проекти на основі критерію найменшого ризику величини та відхилень рентабельності з урахуванням наведених у табл. 2.5 даних.

Таблиця 2.5

Характеристики	Проект А				Проект Б			
Рентабельність, %	30	20	40	15	25	35	20	10
Кількість років	1	2	3	2	2	4	1	1

6. Оцініть ризик вкладення коштів у проекти з метою вибору найменш ризикового.

Проект 1. Спостерігалось 20 випадків одержання прибутку. При цьому прибуток, що дорівнює 30% від суми вкладених коштів, було відзначено 5 разів, 20% – 6 разів, 10% – 3 рази, 15% – 5 разів, 25% – 1 раз.

Проект 2. Спостерігалось 25 випадків отримання прибутку, з них прибуток, що дорівнює 10% від суми вкладених коштів, було відзначено 3 рази, 25% – 4 рази, 15% – 5 разів, 5% – 6 разів, 12% – 7 разів.

7. Показники роботи компанії за останні 12 періодів наведено у табл. 2.6. Необхідно зробити висновок щодо стабільності роботи фірми порівняно з ефективністю роботи галузі в цілому.

Характеристики	Номер періоду											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ефективність цінних паперів, %	40	25	42	46	45	23	25	12	20	13	14	30
Ефективність ринку цінних паперів, %	32	35	36	23	40	45	50	21	23	34	36	25

3. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ІГОР ДЛЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ РИЗИКУ

3.1. Основні поняття теорії ігор

Звичайно теорію ігор достатньо справедливо визначають як розділ математики, що допомагає вивчити конфліктні ситуації. Це значить, що можна розробити оптимальні правила поведінки для кожної конфліктуючої сторони. Гра – спрощена модель реальної конфліктної ситуації (наприклад, боротьба з конкурентом). Гравець – одна із сторін в ігровій ситуації. Стратегія гравця – правила дії в кожній можливій ситуації гри. Гру зручно відобразити таблицею, що називається платіжною матрицею (матрицею гри, матрицею ефективності) й містить всі значення вигащів (якщо гра кінцева).

Припустимо перший гравець має m стратегій A_i , $i = \overline{1, m}$, а другий гравець – n стратегій B_j , $j = \overline{1, n}$. Гра може бути названа $m \times n$. Наведемо матрицю ефективності гри двох осіб з нульовою сумою у вигляді табл. 3.1.

Таблиця 3.1
Матриця ефективності гри $m \times n$

$\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$	B_1	B_2	...	B_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	α_2
...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	...	β_n	

У табл. 3.1 елементи a_{ij} – значення вигащів першого гравця – можуть означати й математичне сподівання вигащу, якщо він є

випадковою величиною. Значення α_i й β_j – відповідно мінімальні значення елементів a_{ij} за рядками і максимальні – за стовпцями.

При грі з нульовою сумою передбачено умову: сума вигравів усіх гравців у кожній партії дорівнює нулю. Ігри двох гравців з нульовою сумою належать до класу антагоністичних (виграш одного гравця дорівнює програшу іншого). Ігри з нульовою й ненульовою сумами є моделями багатьох економічних задач. Наприклад, внаслідок торговельних взаємин країн, що беруть участь у грі, всі учасники можуть бути у виграві. Гра, в яку потрібно робити внесок за право участі в ній, є грою з ненульовою сумою.

Ігри поділяються на матричні, біматричні, безперервні, опуклі, сепарабельні та ін. Пояснимо суть деяких з них.

Матрична – кінцева гра двох гравців з нульовою сумою. Її матриця – прямокутна. Номер рядка відповідає номеру стратегії, яку застосовує перший гравець. Номер стовпця відповідає номеру стратегії другого гравця. **Біматрична** – кінцева гра двох гравців з ненульовою сумою. Виграші кожного гравця задаються своєю матрицею, у якій рядок відповідає стратегії першого гравця, а стовпець – стратегії другого гравця. При цьому елемент першої матриці показує виграш першого гравця, а елемент другої – виграш другого гравця. Цей тип ігор характеризується добре розробленою теорією оптимальної поведінки гравців.

Якщо функція вигравів може бути наведена у вигляді суми добутоків функцій одного аргументу, то гра називається **сепарабельною**.

У даному посібнику розглядаються тільки матричні ігри.

Фізична і соціальна природа компонентів гри й сукупність інтересів гравців можуть бути досить різноманітними: юридичні особи, спортивні команди, конкуруючі фірми, воюючі сторони, біологічні види в боротьбі за існування та ін.

Розглянемо матричну гру $m \times n$ (див. табл. 3.1). Використаємо принцип одержання максимального гарантованого результату в найгірших умовах. Перший гравець прагне використати таку стратегію, що має забезпечити максимальний програш другого гравця, який відповідно намагається використати стратегію, що забезпечує мінімальний виграш першого гравця. Розглянемо обидва ці підходи. Першому гравцю необхідно одержати гарантований результат у найгірших умовах, тобто найменше значення його виграву

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}.$$

Щоб цей гарантований ефект був максимальним, потрібно з усіх значень α_i вибрати найбільше (нижня ціна гри – максимін)

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Таким чином, які б стратегії не застосовував другий гравець, перший гравець максимінною стратегією гарантував собі виграш, не менший ніж α (тобто максимінна стратегія – це рядок матриці, який відповідає елементу α).

Користуючись своїми оптимальними стратегіями, другий гравець прагне зменшити виграш першого гравця, тому застосовуючи кожен j -у чисту стратегію, він відшукує величину свого мінімального програшу

$$\beta_j = \min_i a_{ij}$$

у кожному j -му стовпці (тобто визначає максимальний виграш першого гравця, користуючись своєю j -ю стратегією). Далі з усіх j -х стратегій він вибирає таку, завдяки якій перший гравець одержить максимальний виграш

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij},$$

що й визначає чисту верхню ціну гри мінімакс.

Верхня ціна гри показує, який максимальний виграш може бути гарантований першому гравцю при застосуванні ним чистих стратегій (виграш – не менше ніж α). Другий гравець внаслідок вибору своїх чистих стратегій не допускає, щоб перший гравець міг одержати виграш, більший β . Мінімаксна стратегія відображається стовпцем платіжної матриці, у якому перебуває елемент β (див. табл. 3.1).

Якщо нижня й верхня ціни гри збігаються:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = v,$$

то така гра називається грою із сідловою точкою.

Задача 3.1. Визначимо максимінну й мінімаксну стратегії при заданій матриці ефективності

2	B_1	B_2	B_3	B_4	
1	A_1	2	7	6	10
	A_2	8	4	9	5

Максимінна стратегія ($\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha = 4$) – рядок A_2 .

Мінімаксна стратегія ($\beta_1 = 8$, $\beta_2 = 7$, $\beta_3 = 9$, $\beta_4 = 10$, $\beta = 7$) – стовпець B_2 .

Оскільки $\alpha < \beta$, то сідлова точка відсутня.

Задача 3.2. Визначити верхню й нижню ціни при заданій матриці гри та вказати максимінну й мінімаксну стратегії.

1 \ 2	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	1	2	3	1
A_2	4	5	6	4
β_j	4	5	6	

Нижня ціна гри: $\alpha_1=1$, $\alpha_2=4$, $\alpha=4$. Максимінна стратегія – рядок A_2 .

Верхня ціна гри: $\beta_1=4$, $\beta_2=5$, $\beta_3=6$, $\beta=4$. Мінімаксна стратегія – стовець B_1 .

У цьому випадку $\alpha = \beta = 4$, тобто маємо гру із сідловою точкою.

Якщо один гравець у цій грі дотримується сідлової точки, то другий може одержати кращий результат, якщо також буде дотримуватися цієї точки. У цьому випадку вирішенням гри є:

- чиста стратегія першого гравця;
- чиста стратегія другого гравця;
- сідловий елемент.

Оптимальні чисті стратегії – це чисті стратегії, що утворюють сідлову точку.

У грі без сідлової точки перший гравець зможе прийняти оптимальну стратегію, яка не збігається з максимінною, якщо йому відома стратегія другого гравця.

Задача 3.3. Дано матрицю гри

1 \ 2	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	3	5	8	6	11
A_2	8	4	12	7	9

Припустимо, що першому гравцеві стало відомо, що другий гравець прийняв мінімаксну стратегію. Перший гравець має вибрати оптимальну стратегію за умови, що B_2 – стратегія другого гравця ($\beta_2 = 5$).

Максимінна стратегія першого гравця ($\alpha_1=3$, $\alpha_2=4$, $\alpha=4$) – рядок A_2 .

Виберемо оптимальну стратегію першого гравця. Нею буде не максимінна A_2 (що дозволяє одержати виграш $\alpha=4$), а стратегія, що відповідає $\max_i a_{ij}$. У цьому випадку максимальний гарантований виграш першого гравця буде дорівнювати верхній ціні гри $\beta_2 = 5$, тому

перший гравець має вибрати свою оптимальну стратегію A_1 , знаючи, що другий гравець вибрав стратегію B_2 .

Таким чином, розглянутий приклад приводить до результату, відмінного від результату при грі із сідловою точкою.

Стратегія є оптимальною, якщо її застосування забезпечить першому гравцеві найбільший гарантований виграш при використанні будь-яких стратегій другим гравцем.

3.2. Змішані стратегії

Оцінивши стратегію першого гравця в задачі 3.3, поставимо питання – чи не поліпшиться результат його гри, якщо інформація про дії другого гравця буде відсутня, але перший гравець буде багаторазово застосовувати чисті стратегії випадково з певною ймовірністю?

Змішаною стратегією гравця називається повний набір його чистих стратегій при багаторазовому повторенні гри в тих самих умовах із заданими ймовірностями. Таким чином, змішані стратегії реалізуються за таких умов:

- наявність гри без сідлової точки;
- використання випадкових сполучень чистих стратегій із заданими ймовірностями;
- багаторазове повторювання гри в подібних умовах;
- відсутність у обох сторін інформації про стратегії супротивника;
- можливість осереднення результатів ігор.

Для змішаних стратегій використовуються наступні позначення.

Для першого гравця змішана стратегія полягає в застосуванні чистих стратегій $\overline{A_1, A_m}$ з відповідними ймовірностями $\overline{p_1, p_m}$, $p_i \geq 0$,

$\sum_{i=1}^m p_i = 1$ і позначається матрицею

$$S_1 = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{bmatrix}.$$

Аналогічно для другого гравця матриця стратегій

$$S_2 = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix},$$

де q_j – ймовірність застосування чистої стратегії B_j , $q_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^n q_j = 1$.

У ситуації, коли $p_i = 1$, перший гравець має чисту стратегію

$$S_1 = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_i & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & 1 & \dots & p_m \end{bmatrix}.$$

Чисті стратегії гравця є єдино можливими неспільними подіями. У матричній грі, знаючи платіжну матрицю A , при заданих значеннях \bar{p} і \bar{q} можна визначити середній виграш (математичне сподівання) першого гравця:

$$M(A, \bar{p}, \bar{q}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j,$$

де p_i і q_j – компоненти векторів \bar{p} і \bar{q} ; a_{ij} – елемент матриці A .

Застосовуючи свою змішану стратегію, перший гравець прагне максимально збільшити свій середній виграш, а другий гравець, у свою чергу, намагається довести успіх першого до мінімально можливого значення, тобто перший гравець прагне досягти

$$\alpha = \max_{\bar{p}} \min_{\bar{q}} M(A, \bar{p}, \bar{q}),$$

а другий гравець намагається одержати

$$\beta = \min_{\bar{q}} \max_{\bar{p}} M(A, \bar{p}, \bar{q}).$$

Якщо позначити вектори, що відповідають оптимальним стратегіям обох гравців як \bar{p}^0 й \bar{q}^0 , то можна записати

$$\max_{\bar{p}} \min_{\bar{q}} M(A, \bar{p}, \bar{q}) = \min_{\bar{q}} \max_{\bar{p}} M(A, \bar{p}, \bar{q}) = M(A, \bar{p}^0, \bar{q}^0).$$

Ціна гри – середній виграш першого гравця при використанні обома гравцями змішаних стратегій. Таким чином, на питання, що поставлено на початку цього підрозділу, можна відповісти ствердливо, тобто можна одержати виграш у середньому більше нижньої ціни гри, але менше верхньої.

Змішані стратегії будуть оптимальними, якщо вони утворять сідлову точку для функції $M(A, \bar{p}, \bar{q})$, тобто

$$M(A, \bar{p}, \bar{q}^0) \leq M(A, \bar{p}^0, \bar{q}^0) \leq M(A, \bar{p}^0, \bar{q}).$$

Активними стратегіями обох гравців називають стратегії, що входять до складу їх оптимальних змішаних стратегій з імовірностями \bar{p} і \bar{q} , відмінними від нуля.

Вирішити гру означає визначити ціну гри і оптимальні стратегії. Розглянемо знаходження оптимальних змішаних стратегій простої гри (на прикладі платіжної матриці 2x2).

За відсутності сідлової точки можна одержати дві оптимальні змішані стратегії (якщо визначено сідлову точку, то це означає, що є не вигідні стратегії, від яких слід відмовитися). Ці змішані стратегії записують так:

$$S_1 = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix}; S_2 = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{bmatrix}.$$

Маємо платіжну матрицю

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

При цьому

$$\begin{aligned} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 &= \gamma, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 &= \gamma, \\ p_1 + p_2 &= 1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Виразивши p_2 через p_1 , одержимо

$$\begin{aligned} a_{11}p_1 + a_{21}(1-p_1) &= a_{12}p_1 + a_{22}(1-p_1), \\ a_{11}p_1 + a_{21} - a_{21}p_1 &= a_{12}p_1 + a_{22} - a_{22}p_1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

З рівняння (3.2) знайдемо

$$p_1^0 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})}, \quad p_2^0 = 1 - p_1^0 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})}. \quad (3.3)$$

З рівняння (3.3) визначимо

$$\gamma = \frac{a_{11}(a_{22} - a_{21})}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})} + \frac{a_{21}(a_{11} - a_{12})}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})}.$$

Далі одержимо оптимальні значення ймовірностей q_1^0 й q_2^0 :

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= 1, \\ \gamma &= a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = a_{11}q_1 + a_{12}(1-q_1), \\ q_1^0 &= \frac{\gamma - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}, \quad q_2^0 = 1 - q_1^0 = \frac{a_{11} - \gamma}{a_{11} - a_{12}} \quad \text{при } a_{11} \neq a_{12}. \end{aligned}$$

Задача вирішена, тому що знайдені вектори $\overline{p^0} = \begin{bmatrix} p_1^0 \\ p_2^0 \end{bmatrix}$, $\overline{q^0} = \begin{bmatrix} q_1^0 \\ q_2^0 \end{bmatrix}$ і

ціна гри γ .

Цю задачу можна вирішити і графічно (рис. 3.1).

Алгоритм графічного рішення.

1. По осі абсцис відкладається відрізок одиничної довжини ($p_1 + p_2 = 1$).

2. По осі ординат – виграші при використанні стратегії A_1 .

3. На лінії, паралельній осі ординат, від точки 1 відкладаються виграші при застосуванні стратегії A_2 .

4. Кінці відрізків позначаються буквами b_{ij} , відповідно $a_{11} \rightarrow b_{11}$, $a_{12} \rightarrow b_{21}$, $a_{21} \rightarrow b_{12}$, $a_{22} \rightarrow b_{22}$, і з'єднуються відрізками $b_{11}b_{12}$ і $b_{21}b_{22}$.

5. Визначається ордината точки перетину C . Вона дорівнює ціні гри γ . Абсциса точки C дорівнює p_2 .

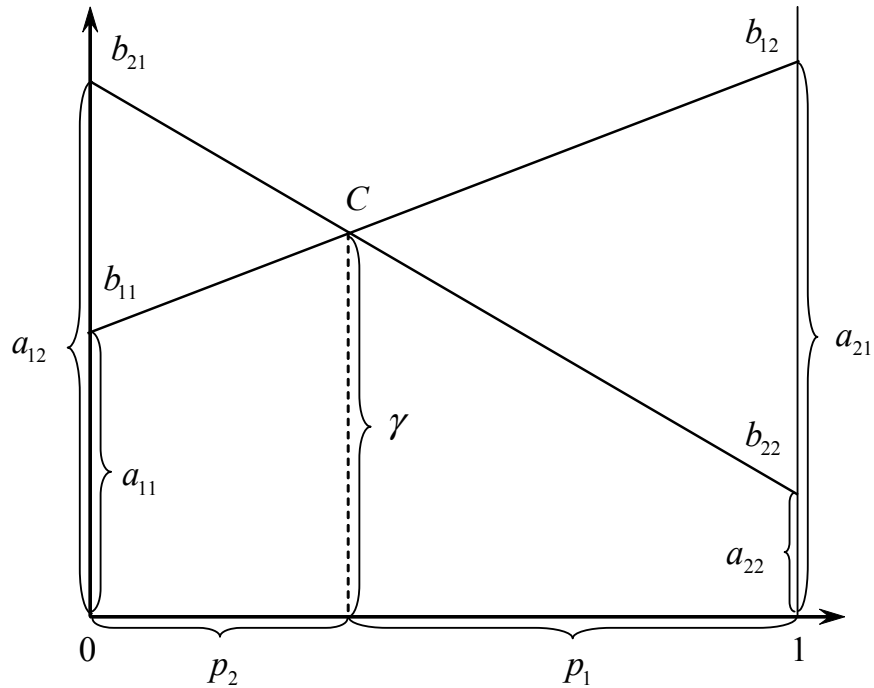


Рис. 3.1. Оптимальна змішана стратегія

Задача 3.4. Вибрати оптимальний режим роботи системи автоматичного управління (САУ), що складається з двох спецпроцесорів A_1 і A_2 . Завдяки застосуванню кожного з них одержано виграші залежно від зовнішніх умов. При використанні процесорів A_1 і A_2 залежно від типу розв'язуваних задач B_1 і B_2 (довгострокові і короткострокові) буде отримано й різний ефект. Передбачається, що максимальний виграш від заміни спецпроцесорів старого покоління на нові A_1 й A_2 відповідає найбільшому значенню критерію ефективності. Таким чином, побудована матриця гри, де A_1 і A_2 – стратегії керівника; B_1 і B_2 – стратегії, що відображають типи розв'язуваних задач.

$\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$	B_1	B_2	α_i
A_1	0,3	0,8	0,3
A_2	0,7	0,4	0,4
β_j	0,7	0,8	

Знайти оптимальну стратегію керівника й гарантований середній результат γ , тобто визначити, яку частину часу слід використовувати процесори A_1 і A_2 .

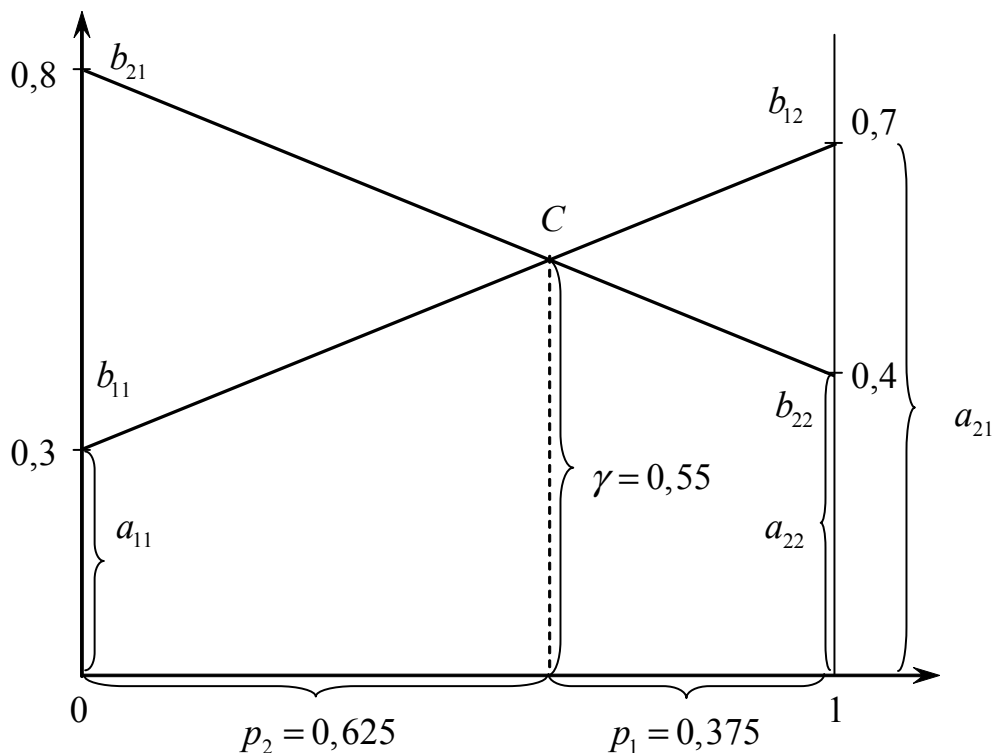


Рис. 3.2. Графічна інтерпретація алгоритму рішення

Розв'язання. Визначимо нижню й верхню ціни гри:

$$\alpha_1 = 0,3, \alpha_2 = 0,4, \alpha = 0,4; \beta_1 = 0,7, \beta_2 = 0,8, \beta = 0,7.$$

Очевидно, що це гра без сідлової точки, тому що

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{22} = 0,4; \max_j \min_i a_{ij} = a_{21} = 0,7.$$

Максимінна стратегія керівника, що впроваджує САУ, – A_2 . При цьому гарантований виграш дорівнює 0,4, тобто становить 40% порівняно зі старою системою. Визначимо γ , P_1 і P_2 графічним способом (рис. 3.2).

Алгоритм рішення:

1. На осі абсцис відкладемо відрізок одиничної довжини.
2. На осі ординат – виграші при використанні стратегії A_1 , тобто 0,3 і 0,8.
3. На протилежній осі (з точки 1) відкладемо виграші, застосувавши стратегії A_2 , тобто 0,7 і 0,4.
4. Проведемо прямі $b_{11}b_{12}$ і $b_{21}b_{22}$.
5. Визначимо точку C перетину ліній $b_{11}b_{12}$ і $b_{21}b_{22}$. Її ордината $\gamma = 0,55$.
6. Абсцису точки перетину C позначимо p_2 , а $p_1 = 1 - p_2$.

Оптимальна стратегія гри: $S^0 = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0,375 & 0,625 \end{bmatrix}$.

Висновок. При установці нових процесорів у САУ, якщо невідомі умови розв'язання задач замовника, на роботу процесора A_1 має

припадати 37,5% часу, а на роботу A_2 – 62,5%. При цьому виграш становитиме 55% порівняно з використанням старої САУ.

3.3. Функція корисності Неймана-Моргенштерна

Методологія раціонального прийняття рішень в умовах невизначеності, що основана на функції корисності індивіда, побудована з використанням п'яти аксіом, які відображають мінімальний набір необхідних умов несуперечливої й раціональної поведінки гравця. Американські вчені Дж. Нейман й О. Моргенштерн показали, що ОПР буде прагнути до максимізації очікуваної корисності, тобто із всіх рішень вибере те, що забезпечує найбільшу очікувану корисність. Корисність – це деяке число, яке ОПР відносить до кожного можливого результату. У кожній ОПР є своя функція корисності, що показує його вибір того або іншого результату залежно від його відношення до ризику.

Для описання наведених нижче аксіом зазначимо, якщо індивід у результаті гри з імовірністю p одержує грошовий приз x і з імовірністю $(1-p)$ – приз y , то цю ситуацію будемо позначати $G(x, y: p)$.

Аксіома 1. Аксіома порівнянності. При багатьох невизначених можливих виходах S індивід може стверджувати, що або результат x кращий результату y ($x \succ y$), або $y \succ x$, або індивід байдужий до вибору між x і y ($x \sim y$).

Аксіома 2. Аксіома транзитивності. Якщо $x \succ y$ й $y \succ z$, то $x \succ z$. Якщо $x: y$ й $y: z$, то $x: z$.

Аксіома 3. Аксіома незалежності. Якщо індивід байдужий до вибору між x і y ($x: y$), то він також буде байдужий до вибору ігор (лотерей) $G(x, z: p)$ і $G(y, z: p)$, тобто з $x: y$ виходить $G(x, z: p): G(y, z: p)$.

Аксіома 4. Аксіома вимірності. Якщо $x \succ y: z$ або $x: y \succ z$, то існує ймовірність p така, що $y: G(x, z: p)$.

Дамо пояснення. Припустимо є три результати: $x=1000$, $y=0$, а z – смерть гравця. Однак життя не можна порівнювати ні з яким виграшем й імовірності p , що відповідає цьому, не має бути. Проте у житті все можливо й тоді твердження $y: G(x, z: p)$ можна вважати справедливим для деякого значення $0 \leq p < 1$.

Аксіома 5. Аксіома ранжування. Якщо альтернативи y і u перебувають між альтернативами x і z і можна побудувати такі ігри, коли індивід байдужий до вибору між y й $G(x, z: p_1)$, а також до вибору між u і $G(x, z: p_2)$, то при $p_1 > p_2$ одержимо $y \succ u$.

Дамо пояснення. Припустимо є такі результати: $x = 1000$, $y = 500$, $u = 200$, $z = -10$, а також еквівалентні дві пари ситуацій, одна з яких неігрова, а інша ігрова:

1) гарантовано одержати 500 або грати: з імовірністю p_1 виграти 1000 і з імовірністю $(1 - p_1)$ програти 10, тобто $500 : G(1000, -10 : p_2)$;

2) гарантовано одержати 200 або грати: з імовірністю p_2 виграти 1000 і з імовірністю $(1 - p_2)$ програти 10, тобто $200 : G(1000, -10 : p_2)$.

Зрозуміло, що при зазначених умовах $p_1 > p_2$, а якщо $p_1 = p_2$, то $y : u$, тобто аксіома відповідає твердженню: чим більше ймовірність великого виграшу, тим більше гра «коштує» (тобто тим більша плата буде потрібна за придбання права брати в ній участь).

Визначення. Очікувана корисність події дорівнює сумі добуток імовірностей результатів і значень корисності цих результатів.

Задача 3.5. Компанія «Сири Бурлука» поставляє в близьке зарубіжжя сирну пасту. Керівництво має вирішити, скільки ящиків сирної пасти варто виробити протягом місяця, оскільки відомі ймовірності того, що попит протягом місяця буде складати 6, 7, 8 або 9 ящиків, що відповідно дорівнює 0,1; 0,3; 0,5; 0,1.

Компанія продає кожен ящик за ціною 95 грош. од. при витратах на виробництво одного ящика пасти 45 грош. од. Оскільки компанія невелика, то у разі непродажу хоч одного ящика пасти компанія зазнає збитків. Скільки ящиків варто виробити протягом місяця?

Розв'язання. Користуючись вихідними даними, будемо матрицю гри. Стратегіями першого гравця (компанії) є різні кількості ящиків із сирною пастою, які йому слід виробити, другим гравцем виступає величина попиту на пасту (число ящиків).

Обчислимо, наприклад, прибуток компанії при виробництві 8 ящиків і попиті 7 ящиків. Кожен ящик продається по 95 грош. од. Компанія продала 7 ящиків, а зробила 8 ящиків. Виручка дорівнює 95×7 грош. од., а витрати виробництва 8 ящиків – 45×8 грош. од. Прибуток від зазначеного сполучення попиту та пропозиції буде дорівнювати $95 \times 7 - 45 \times 8 = 305$ грош. од. Аналогічно здійснюються розрахунки інших сполучень попиту та пропозиції. Отриману платіжну матрицю в ринковій грі наведено у вигляді табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Виробництво	Попит				Середній очікуваний прибуток
	6 $p = 0,1$	7 $p = 0,3$	8 $p = 0,5$	9 $p = 0,1$	
6	300	300	300	300	300
7	255	350	350	350	340,5
8	210	305	400	400	352,5
9	165	260	355	450	317

Найбільший середній очікуваний прибуток дорівнює 352,5 грош. од. Він відповідає стратегії виробництва 8 ящиків. Для більшості ОПР критерій максимуму середнього очікуваного прибутку є основним і тому таку рекомендацію можна вважати обґрунтованою.

Однак, якщо залучити додаткову інформацію у вигляді розрахунку середньоквадратичного відхилення (СКВ) як ступеня ризику, то можна уточнити прийняте на основі максимального середнього прибутку рішення.

Виконаємо обчислення для виробництва 6, 7, 8 й 9 ящиків за формулами $D(x) = m(x^2) - (mx)^2$; $\sigma = \sqrt{D(x)}$.

6 ящиків:

$$m(x^2) = 300^2 (0,1 + 0,3 + 0,5 + 0,1) = 90000;$$

$$(mx)^2 = 300^2 = 90000;$$

$$D(x) = 90000 - 90000 = 0;$$

$$\sigma = \sqrt{0} = 0.$$

7 ящиків:

$$m(x^2) = 255^2 \cdot 0,1 + 350^2 \cdot 0,9 = 116752,5;$$

$$(mx)^2 = 340,5^2 = 115940,25;$$

$$D(x) = 116752,5 - 115940,25 = 812,25;$$

$$\sigma = \sqrt{812,25} = 28,5.$$

8 ящиків:

$$m(x^2) = 210^2 \cdot 0,1 + 305^2 \cdot 0,3 + 400^2 \cdot 0,6 = 128317,5;$$

$$(mx)^2 = 325,5^2 = 124256,25;$$

$$D(x) = 128317,5 - 124256,25 = 4061,25;$$

$$\sigma = \sqrt{4061,25} \approx 63,73.$$

9 ящиків:

$$m(x^2) = 165^2 \cdot 0,1 + 260^2 \cdot 0,3 + 355^2 \cdot 0,5 + 450^2 \cdot 0,1 = 106265;$$

$$(mx)^2 = 317^2 = 100489;$$

$$D(x) = 106265 - 100489 = 5776;$$

$$\sigma = \sqrt{5776} = 76.$$

Висновок. Результати розрахунків з урахуванням ступеня ризику показують, що виробляти 9 ящиків пасти недоцільно, тому що середній очікуваний прибуток, який дорівнює 317 грош. од., нижче, ніж при виготовленні 8 ящиків, а СКВ – вище. Але ризик при виробництві 8 ящиків пасти більше, ніж при виробництві 7 ящиків і ще більше при виробництві 6 ящиків пасти. Остаточне рішення приймає ОПР.

Задача 3.6. Для котельні необхідно закупити мазут, що влітку коштує дешевше, ніж узимку. Невизначеність полягає в тому, що невідомо, якою буде зима: суворою або м'якою. Довгострокові прогнози неточні й можуть бути використані тільки як орієнтовні для прийняття рішення. Зайві закупівлі небажані. Припустимо, що є дані про кількість і ціну мазуту, а також імовірні показники зим: м'якої – $p = 0,35$, звичайної – $p = 0,5$, холодної – $p = 0,15$ (табл. 3.3).

Таблиця 3.3

Зима	Об'єм мазуту, т	Середня ціна за 1 т, тис. грош. од.
м'яка	4	7
звичайна	5	7,5
холодна	6	8

У табл. 3.3 зазначені зимові ціни. Влітку ціна становить 6 тис. грош. од. за тонну. Скільки слід закласти мазуту влітку (маємо ємність на 6 т)?

Розв'язання. Побудуємо платіжну матрицю (табл. 3.4).

Таблиця 3.4

Закупівля	Зима			Середня очікувана плата
	м'яка $p = 0,35$	звичайна $p = 0,5$	холодна $p = 0,15$	
4 т	$-(4 \times 6)$	$-(4 \times 6 + 1 \times 7,5)$	$-(4 \times 6 + 2 \times 8)$	-30,15
5 т	$-(5 \times 6)$	$-(5 \times 6)$	$-(5 \times 6 + 1 \times 8)$	-31,2
6 т	$-(6 \times 6)$	$-(6 \times 6)$	$-(6 \times 6)$	-36

Найменша очікувана середня плата припадає на випадок м'якої зими. Якщо не враховувати ступені ризику, то доцільно закупити 4 т мазуту влітку й за необхідності докупити остачу взимку.

Якщо продовжити дослідження і обчислити СКВ плати за мазут у зимовий період, то відповідно одержимо:

– $\sigma = 5,357$ тис. грош. од., якщо зима м'яка;

– $\sigma = 2,856$ тис. грош. од. – звичайна;

– $\sigma = 0$ – холодна.

Мінімальним буде ризик при холодній зимі, однак при цьому очікувана середня плата виявиться максимальною – 36 тис. грош. од.

Висновок. Краще купити мазут, розраховуючи на звичайну зиму, тому що очікувана середня плата порівняно з варіантом м'якої зими зростає всього на 3,5%, а ступінь ризику при цьому виявляється майже в два рази меншим.

Коефіцієнт варіації для звичайної зими становить

$$V = \frac{\sigma(x)}{\bar{x}} = \frac{2,856}{31,2} = 0,0915, \text{ що в два рази нижче, ніж для м'якої -}$$

$$V = \frac{5,357}{30,15} = 0,1777.$$

Задача 3.7. Нафтодобувне підприємство вирішує питання про буріння свердловини. Відомості щодо родовища такі:

- з імовірністю $p_1 = 0,6$ нафти знайдено не буде;
- з $p_2 = 0,1$ запаси родовища складуть 50000 т;
- $p_3 = 0,15$ – 100000 т;
- $p_4 = 0,1$ – 500000 т;
- $p_5 = 0,05$ – 1000000 т.

Якщо нафти не буде знайдено, то підприємство втратить 50000 грош. од.; якщо потужність родовища становитиме 50000 т, то втрати будуть дорівнювати 20000 грош. од.; при запасах нафти 100000 т очікуваний прибуток становитиме 30000 грош. од.; при 500000 т – 430000 грош. од.; при 1000000 т – 930000 грош. од.

Побудуємо дерево рішень (рис. 3.3).

Розрахуємо очікувану грошову оцінку (ОГО), тобто

$$\begin{aligned} \text{ОГО} &= 0,6 \cdot (-50000) + 0,1 \cdot (-20000) + 0,15 \cdot 30000 + \\ &+ 0,1 \cdot 430000 + 0,05 \cdot 930000 = 62000 \text{ грош.од.} \end{aligned}$$

Якщо ОПР у даній організації байдужа до ризику й приймає рішення щодо проведення бурових робіт на основі розрахованої ОГО, то вона сприймає ОГО як очікувану корисність.

Якщо ОПР не байдужа до ризику, то виникає необхідність оцінити значення корисності кожного з можливих результатів, тобто очевидно, що функція корисності може бути індивідуальною. Нейман і Моргенштерн стверджували, що ОПР, відповідаючи на ряд запитань, виявляє при цьому свої індивідуальні переваги, що відображають її відношення до ризику.

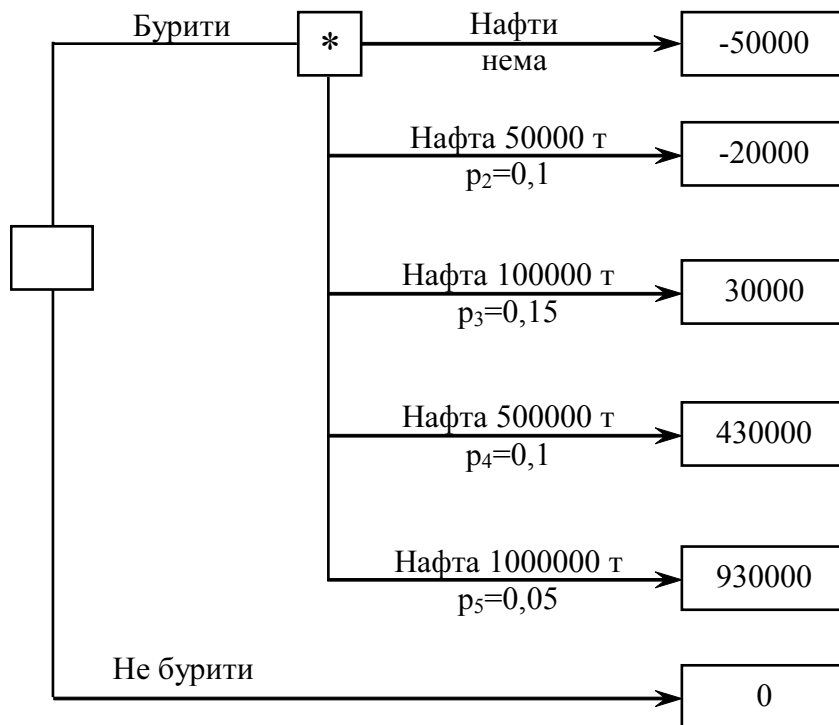


Рис. 3.3. Дерево рішень

Значення корисності можуть бути знайдені у два етапи.

Етап 1. Привласнюємо довільні значення корисностей виграшам (ОГО) в разі кращого й гіршого результатів, при цьому гіршому результату відповідає менше значення. В цьому випадку $U(-50000 \text{ грош. од.}) = 0$, а $U(930000 \text{ грош. од.}) = 50$. Корисності проміжних вигравів будуть знаходитися в інтервалі від 0 до 50.

Корисність виходів для індивіда визначається не однозначно, а з точністю до монотонного перетворення, наприклад, n очікуваним значенням вигравів відповідають корисності x_1, x_2, \dots, x_n . Тоді $\alpha + \beta x_1, \alpha + \beta x_2, \dots, \alpha + \beta x_n$, де $\beta > 0$, також будуть корисностями. У даній задачі корисність $U = 62$ (тобто відкидаємо нулі, отримані при розрахунку ОГО), що еквівалентно лінійному перетворенню функції корисності при $\alpha = 0$ й $\beta = 0,001$.

Етап 2. Гравцеві (ОПР) пропонується вибір: одержати деяку гарантовану грошову суму ξ , що знаходиться між кращим і гіршим значеннями H і h , або взяти участь у грі, тобто отримати з імовірністю p грошову суму H і з імовірністю $(1-p)$ грошову суму h . При цьому ймовірність варто змінювати (підвищувати або знижувати), поки ОПР стане байдужою до вибору між одержанням ξ і грою. Якщо це значення ймовірності дорівнює p_0 , то корисність гарантованої суми $U(\xi)$ визначається як математичне сподівання (середнє значення) корисностей найменшої й найбільшої сум, тобто

$$U(\xi) = p_0 U(H) + (1 - p_0) U(h). \quad (3.4)$$

Використовуючи цю формулу, можна розраховувати корисність результатів кожного з можливих розв'язань розглянутої задачі.

Припустимо, що ОПР байдуже – втратити 20000 грош. од. або взяти участь у грі (виграш – 930000 грош. од. з імовірністю $p_5 = 0,05$ або програш 50000 грош. од. з імовірністю $p_1 = 0,6$). Тоді за формулою (3.4) одержимо

$$U(-20) = 0,05U(930) + 0,6U(-50) = 0,05 \cdot 50 + 0,6 \cdot 0 = 2,5 \text{ ютиля.}$$

Ютиль – умовна одиниця корисності.

Тепер, якщо на осях координат відкласти необхідні величини, то можна побудувати функцію корисності ОПР (рис. 3.4).

Таким чином, одержимо опуклу функцію (кожна дуга кривої лежить нижче своєї хорди), що вказує на схильність ОПР до ризику.

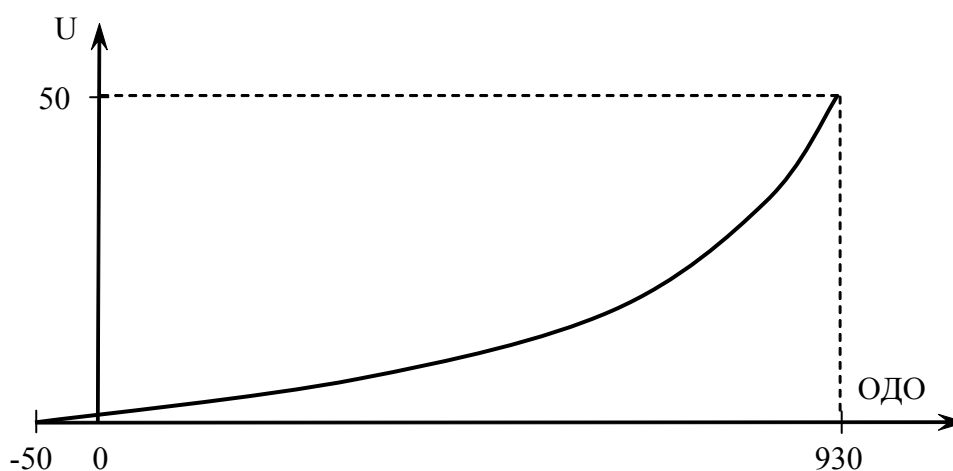


Рис. 3.4. Графік функції корисності

Контрольні запитання і завдання

1. Сформулюйте поняття конфліктної ситуації.
2. Визначте зв'язок між конфліктною ситуацією і грою. Наведіть приклади.
3. Сформулюйте основні поняття теорії ігор: гра, гравець, виграш, програш, стратегія.
4. Поясніть, що таке оптимальна стратегія і якому критерію вона має задовольняти.
5. Назвіть види ігор, які ви знаєте.
6. Поясніть, що таке матрична форма гри.
7. Визначте платіжну матрицю і її структуру.
8. Поясніть, що таке корисність.
9. Дайте назву функції корисності. Наведіть приклади.
10. Сформулюйте аксіому порівнянності.
11. Визначте аксіому транзитивності.
12. Сформулюйте аксіому незалежності.

13. Дайте визначення аксіомі вимірності.
 14. Сформулюйте аксіому ранжування.
 15. Знайдіть верхню і нижню ціни гри, що задана матрицею

1 \ 2	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	5	2	3	9
A_2	6	3	3	6	4
A_3	3	6	6	5	5
A_4	2	8	5	8	3
A_5	5	9	7	9	2

16. Дайте визначення сідлової точки.
 17. Перевірте платіжну матрицю на наявність сідлової точки

1 \ 2	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	23	25	14	45
A_2	25	36	45	87	56
A_3	32	56	45	45	21
A_4	25	36	54	78	97
A_5	56	32	45	87	25

18. Складіть платіжну матрицю та розв'яжіть задачу аналітично та графічно. Підприємці А і В конкурують на ринку збуту продукції. Кожний з них виробляє два види товарів: А – товари виду a_1 і a_2 , В – товари виду b_1 і b_2 . Товари a_1 і b_1 й товари a_2 і b_2 мають приблизно однакові властивості. Ціна за одиницю товару a_1 і b_1 становить 10 грн, ціна за одиницю товару a_2 – 20 грн, а b_2 – 15 грн. Ринок товарів поділено так: $a_1 : b_1 = 1:1$, $a_2 : b_2 = 1:4$.

Щодня на ринку продається по 2000 одиниць товару a_1 і b_1 , 1000 одиниць – a_2 і 4000 одиниць – b_2 . Від продажу кожної одиниці продукції a_1 і b_1 отримується прибуток 2 грн, a_2 і b_2 – 4 грн

У підприємця А для одержання лідируючого становища на ринку є такі можливості:

1) знизити ціну на виріб a_1 до 9,5 грн – у цьому випадку він витіснить з ринку товар b_1 (A_1);

2) знизити ціну на виріб a_2 до 19 грн – у цьому випадку, якщо ціна b_2 не зміниться, ринок на товари a_2 і b_2 розподілиться у співвідношенні 2:3 (A_2).

Підприємець В на дії підприємця А може відповісти так:

- 1) нічого не робити у відповідь (B_1);
- 2) знизити ціну на виріб b_1 до 9,5 грн (B_2);
- 3) збільшити обсяг продаж виробу b_2 на 25%. У цьому випадку В повністю витисне А з ринку виробів b_2 (B_3).

19. Припустимо, що за умовами контракту можливі два способи дій, що приводять до різних результатів (табл. 3.5). Проранжуйте ці дії: 1) за математичним сподіванням; 2) дисперсією; 3) коефіцієнтом варіації; 4) очікуваною корисністю. Для цього необхідно побудувати функцію корисності на відрізку $[-20; 40]$.

Таблиця 3.5

Виграші		Числові значення			
1	Величина	-20	0	10	40
	Ймовірність	0,2	0,1	0,4	0,3
	Корисність	0	0,2	0,3	1
2	Величина	-10	10	20	40
	Ймовірність	0,2	0,4	0,3	0,1
	Корисність	0,1	0,3	0,4	1

4. ОЦІНКА РИЗИКУ ІНВЕСТИЦІЙНИХ ПРОЕКТІВ

Під інвестиційним проектом розуміють систему заходів, що передбачають здійснення комплексу яких-небудь дій, які забезпечують досягнення певних цілей. Реалізація інвестиційних проектів вимагає відмовитися від коштів сьогодні на користь одержання прибутку в майбутньому.

Здійснення будь-яких інвестиційних проектів передбачає розрив у часі між витратами й доходами, тобто виникає необхідність розрахунку вартості грошей у часі. Відзначимо, що розрахунок вартості грошей у часі – це принцип, згідно з яким внаслідок існування альтернативних можливостей одержання доходу їхня вартість у часі залежить від вартості в той момент, коли очікується їхнє одержання (майбутні гроші дешевше сьогоднішніх не тільки через інфляцію, але й ще з тієї причини, що вони можуть бути вкладені в справу й принести доход, а коли ми їх одержуємо через рік, то упускаємо цю можливість). Наприклад, порівняємо сьогоднішні 10 тис. грн з такою ж сумою, отриманою за рік, якщо процентна ставка по депозиту становить 10% річних:

$$x = 10 + 0,1 \cdot 10 = 11 \text{ тис. грн,}$$

де x – майбутня вартість сьогоднішніх 10 тис. грн

Для інвесторів становить інтерес таке питання: скільки коштують 10 тис. грн, які будуть одержані через рік, за умови, що процентна ставка по депозиту становить 10% річних?

Поточна (сьогоднішня) вартість їх дорівнює тій сумі x , яку слід було б зараз покласти в банк для того, щоб вона через рік виросла до 10 тис. грн. Отже

$$x + 0,1x = 10 \text{ тис. грн};$$
$$x = \frac{10}{1,1} = 9,091 \text{ тис. грн.}$$

Таким чином, вартість 10000 грн, яку буде отримано через рік, становить 9091 грн. Поточна вартість називається ще зведеною вартістю, бо дозволяє визначити, скільки майбутня сума коштує сьогодні.

Розглянемо концепцію майбутньої вартості в загальному випадку.

Яка буде вартість сьогоднішніх інвестицій K_0 через n років, якщо процентна ставка по депозиту становить r % річних?

Через один рік: $K_1 = K_0 + K_0 \cdot r = K_0(1+r)$.

Через два роки: $K_2 = K_1 + K_1 \cdot r = K_1(1+r) = K_0(1+r)^2$.

Через три роки: $K_3 = K_2 + K_2 \cdot r = K_2(1+r) = K_0(1+r)^3$.

Таким чином, майбутня вартість K_n сьогоднішніх капіталовкладень K_0 становитиме $K_n = K_0(1+r)^n$.

Загальноприйнятою у фінансовому аналізі базовою формулою вартості є

$$FV = PV(1+r)^n, \quad (4.1)$$

де FV – майбутня вартість;

PV – поточна вартість;

n – число років;

$(1+r)^n$ – коефіцієнт майбутньої вартості.

З формули (4.1) майбутньої вартості FV випливає, що поточна вартість

$$PV = FV \frac{1}{(1+r)^n}, \quad (4.2)$$

де $\frac{1}{(1+r)^n}$ – коефіцієнт дисконтування.

Задача 4.1. Запропоновано вкласти в справу 500 тис. грн для того, щоб через 5 років одержати 600 тис. грн. Чи вигідна ця пропозиція?

Визначимо, скільки коштує сьогодні одержати 600 тис. грн через 5 років при депозитній ставці 5% (тобто яку суму варто було б

покласти сьогодні в банк, щоб мати на рахунку через 5 років 600 тис. грн):

$$PV = \frac{600}{(1 + 0,05)^5} = 470,109 \text{ тис. грн.}$$

Таким чином, для одержання 600 тис. грн через 5 років у банк варто було б покласти 470,109 грн, що менше суми передбачуваних інвестицій.

Тепер визначимо дохід, який можна одержати при вкладенні в банк 500 тис. грн на 5 років при депозитній ставці 5%:

$$FV = 500(1 + 0,05)^5 = 638,15 \text{ тис. грн.}$$

Це більше, ніж обіцяють за інвестицію.

Для визначення рентабельності (вигідності) інвестиційного проекту обчислюють чисту дисконтовану вартість NPV . У наведеній задачі дисконтована вартість PV становить 470109 грн. Сьогоднішні вкладення $K_0 = 500$ тис. грн. Таким чином, чиста дисконтована вартість

$$NPV = PV - K_0 = -29891 \text{ грн.}$$

Ця вартість має негативне значення, що свідчить про збитковість цього інвестиційного проекту. Проект буде рентабельним, якщо $NPV \geq 0$.

Часто FV позначають як NCF – чиста готівка у майбутньому вартісному вираженні.

Суть формули (4.2) при різних значеннях депозитної ставки банку r графічно показана на рис. 4.1.

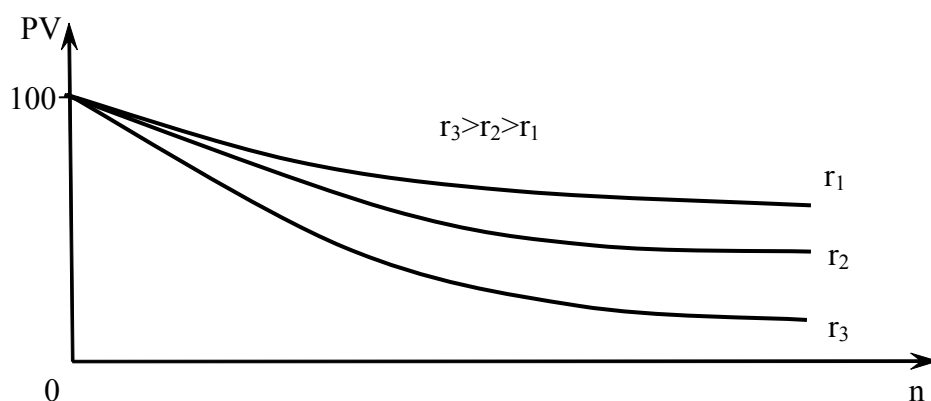


Рис. 4.1. Темпи спаду PV залежно від часу та депозитної ставки

Задача 4.2. На початку 2004 р. керівництву фірми запропонували брати участь у будівництві й експлуатації нового офісу протягом шести років. Доходи від здачі будинку в оренду й витрати відомі (табл. 4.1).

Таблиця 4.1

Рік	Орендні платежі (дохід), тис. грош. од.	Витрати, тис. грош. од.	Чистий прибуток <i>NCF</i> , тис. грош. од.
2005	325	200	125
2006	425	250	175
2007	525	300	225
2008	525	300	225
2009	525	325	200

Наприкінці 2009 р. вартість будинку становила б 1 млн грош. од. Визначить зведену вартість (до початку 2005 р.) проекту наприкінці 2009 р., якщо банківські депозитні ставки будуть відповідати наведеним у табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Рік виплати	2005	2006	2007	2008	2009
Процентна ставка, %	6,00	6,25	6,50	6,75	7,00

Розв'язання.

$$PV = \frac{125000}{1,06^2} + \frac{175000}{1,0625^3} + \frac{225000}{1,065^4} + \frac{225000}{1,0675^5} + \frac{200000}{1,07^6} + \frac{1000000}{1,07^7} =$$

$$= 1393960 \text{ грош. од.}$$

Задача 4.3. Розрахувати чисту зведену вартість проекту *NPV* (див. задачу 4.2).

Вона дорівнює різниці між зведеною вартістю всіх початкових надходжень від проекту та поточною платою за проект:

$$NPV = PV - [\text{плата за проект}] = PV - C.$$

Припустимо, що відповідно до умов задачі 4.2 фірмі запропонували 33% від участі в шестирічній угоді, що становить 450 тис. грош. од. Тоді

$$NPV = 0,33 \cdot 1393960 - 450000 = 10006,8 \text{ грош. од.}$$

Цінність фірми – це сума її чистої зведеної вартості і чистої зведеної вартості портфеля проектів.

Якою має бути лінія поведінки керівництва фірми, що бажає максимізувати зведену вартість? Чиста зведена вартість фірми збільшиться, якщо гранична вигода (зведена вартість додаткового проекту, якщо фірма з метою збагачення придбає (n+1)-й проект) буде більше граничних витрат (того, що вона заплатила за додатковий

проект), тобто фірма стане багатшою, якщо чиста зведена вартість додаткового проекту позитивна.

Фірма може виграти від зменшення портфеля проектів, продавши проекти (капітал), які мають негативну чисту зведену вартість (те, що не вигідно нам, може бути вигідно іншим).

Отже, в умовах невизначеності, щоб максимізувати цінність (вартість) фірми, варто нагромадити капітал (тобто проекти) з позитивним значенням NPV .

Чим вище ступінь ризикованості проекту (премія за ризик), тим більше значення знаменника в рівнянні (4.2) і відповідно менше значення зведеної вартості PV проекту, а інвестори менш схильні вкладати капітали в такі проекти.

Задача 4.4. Оцінка перспективності проекту.

У попередніх задачах було встановлено, що «сьогоднішні гроші завжди дорожче завтрашніх» і внаслідок того, що призведена до початкового моменту часу вартість проекту знижується, коефіцієнт дисконтування має збільшуватися за рахунок «премії за ризик». Розглянемо тепер, які проекти варто приймати за умови можливого вибору.

Правило:

– якщо чиста зведена вартість NPV_i (або її математичне сподівання $M(NPV_i)$) позитивна, то i -й проект варто прийняти;

– якщо чиста зведена вартість NPV_i (або її математичне сподівання $M(NPV_i)$) негативна, то i -й проект слід відхилити.

Опишемо процес реалізації цього правила:

1. Прогнозуємо попит й оцінюємо очікуваний виторг від i -го проекту $M(B_{it})$ в період t .

2. Оцінюємо витрати й одержуємо $M(C_{it})$, де C_{it} – витрати i -го проекту в період t .

3. Розраховуємо $M(FV_{it}) = M(NCF_{it}) = M(B_{it}) - M(C_{it})$.

4. Використовуючи таблицю премій за ризик (табл. 4.2), визначаємо процентну ставку r_{it} .

5. Одержуємо очікувану зведену вартість i -го проекту $M(PV_i)$.

6. Віднімаємо поточну ціну i -го проекту (зведені витрати проекту) і за формулою $NPV = PV - C$ одержуємо чисту зведену вартість.

Задача 4.5. Розглядається питання про придбання фірмою нового обладнання на суму 5,3 млн грош. од. [8]. Передбачається використати це устаткування протягом п'яти років, а потім продати по залишковій ринковій вартості. Прийняти цей проект або відхилити?

Розв'язання. Менеджери фірми підготували таку інформацію. Середні (A) і загальні (T) витрати фірми на одиницю продукції описуються формулами

$$AVC = 20 - 3Q + 0,25Q^2,$$

$$TVC = AVC \cdot Q,$$

де Q – випуск продукції, млн одиниць у рік.

Прогноз ціни (оптимістичний, найбільш імовірний і песимістичний) на продукцію фірми по рокам реалізації проекту з урахуванням ймовірностей її виникнення наведено у табл. 4.3.

Таблиця 4.3

Рік	Ціна продукції, грош. од.		
	Оптимістична $p_1 = 0,3$	Найбільш імовірна $p_2 = 0,5$	Песимістична $p_3 = 0,2$
1-й	20	15	7
2-й	20	15	10
3-й	24	20	10
4-й	24	20	15
5-й	24	20	15

Оптимальний випуск продукції по роках і очікуваний виторг при реалізації проекту наведено в табл. 4.4.

Очікуваний виторг розраховується як математичне сподівання з урахуванням імовірних результатів відповідно до табл. 4.3.

Таблиця 4.4

Рік	Оптимальний випуск продукції (100 тис. од), її ціна			Виторг, млн грош. од. на рік			Очікуваний виторг, млн грош. од. на рік
	Максималь- на (20 грош.од.)	Серед- ня (15 грош.од.)	Мінімаль- на (7 грош.од.)	Максималь- ний	Серед- ній	Мінімаль- ний	
1-й	8	7,1	0	16	10,7	0	10,2
2-й	8	7,1	0	16	10,7	0	10,2
3-й	8,6	8	0	20,6	16	0	14,2
4-й	8,6	8	7,1	20,6	16	10,7	16,3
5-й	8,6	8	7,1	20,6	16	10,7	16,3

Знаючи обсяг випуску, можна оцінити повні змінні витрати та, додаючи щорічні фіксовані витрати, визначити повні щорічні витрати.

Припустимо, що витрати складають 3,5 млн грош. од. В табл. 4.5 наведено повні витрати за різними цінами та при різних імовірних результатах.

Таблиця 4.5

Рік	Повні витрати за відповідними цінами, млн грош. од. на рік			Очікувані повні витрати, млн грош. од. на рік
	Максимальна $P_1 = 0,3$	Середня $P_2 = 0,5$	Мінімальна $P_3 = 0,2$	
1-й	13,1	11,5	3,5	10,4
2-й	13,1	11,5	3,5	10,4
3-й	14,4	13,1	3,5	11,6
4-й	14,4	13,1	11,5	13,2
5-й	14,4	13,1	11,5	13,2

Таблиці 4.5 і 4.6 ілюструють очікувані виручку і витрати, що дозволяє визначити очікувані чисті надходження по роках (тобто $M(NCF_t)$), млн грош. од. (табл. 4.6).

Таблиця 4.6

Рік	Очікувані надходження	Очікувана виручка від продажу обладнання	Очікувані повні витрати	Очікувані чисті надходження
1-й	10,2	-	10,4	-0,2
2-й	10,2	-	10,4	-0,2
3-й	14,2	-	11,6	2,6
4-й	16,3	-	13,2	3,1
5-й	16,3	3,5	13,2	6,6

Тепер задамо коефіцієнт дисконтування, вважаючи проект середнім між ризикованим та високо ризикованим (приймаємо винагороду за ризик у розмірі 7,5%). Отримаємо зведену вартість проекту (табл. 4.7).

Таблиця 4.7

Рік	Гарантова- ний відсоток, r_t	Винагоро- да за ризик, %	Дисконт, %	$M(NCF_t)$, млн грош. од. на рік	Зведена вартість проекту, млн грош. од. на рік
1-й	5,75	7,5	13,25	-0,2	$-\frac{0,2}{1,1325} = -0,177$
2-й	6,0	7,5	13,5	-0,2	$-\frac{0,2}{1,135^2} = -0,155$
3-й	6,25	7,5	13,75	2,6	$\frac{2,6}{1,1375^3} = 1,766$
4-й	6,5	7,5	14,0	3,1	$\frac{3,1}{1,14^4} = 1,835$
5-й	6,75	7,5	14,25	6,6	$\frac{6,6}{1,142^5} = 3,39$

За п'ять років зведена вартість проекту складатиме

$$-0,177 - 0,155 + 1,766 + 1,835 + 3,39 = 6,659 \text{ млн грош. од.}$$

Чиста зведена його вартість

$$M(NPV) = 6,659 - 5,3 = 1,359 \text{ млн грош. од. } > 0.$$

Можна зробити висновок, що проект слід прийняти.

Окрім описаного методу прийняття інвестиційного рішення використовують й інші методи, що визначаються такими критеріями:

- термін окупності – це час, протягом якого фірма поверне початкові капітальні вкладення; якщо термін окупності менше нормативного терміна, то проект приймається;

- прибуток на капітал – середньорічний прибуток, поділений на суму інвестицій у проект; прийняти або відхилити проект визначається шляхом порівняння прибутку на капітал із заданою його величиною;

- внутрішня норма прибутку – це вимір прибутковості, тобто дисконтна ставка, при якій сьогоднішня вартість грошових потоків дорівнює початковим інвестиціям. .

Задача 4.6. Припустимо, що для інвестиційного проекту (див. задачу 4.4) встановлено нормативний термін окупності капітальних вкладень три роки, а початкові вкладення дорівнюють 5,3 млн грош. од. На основі табл. 4.7 побудуємо табл. 4.8.

Таблица 4.8

Рік	Очікувані чисті надходження $M(NCF_t)$	Нагромаджені очікувані чисті надходження, млн грош. од.
1-й	-0,2	-0,2
2-й	-0,2	-0,4
3-й	2,6	2,2
4-й	3,1	5,3
5-й	6,6	11,9

Оскільки заплановані капіталовкладення дорівнюють 5,3 млн грош. од., то проект окупиться тільки за чотири роки, а нормативний термін окупності – три роки. Тому проект необхідно відхилити.

Однак зауважимо, що було задано умовний термін окупності – три роки, тобто якщо б задали чотири роки, то проект слід було б прийняти.

Задача 4.7. Припустимо, що необхідна середня норма прибутку проекту дорівнює 60%. Сумарні чисті надходження від реалізації проекту становлять 11,9 млн грош. од. (див. табл. 4.8) протягом п'яти років, тобто середньорічний прибуток

$$\frac{11,9}{5} = 2,38 \text{ млн грош. од.}$$

Інвестиції проекту дорівнюють 5,3 млн грош. од., тому прибуток проекту

$$\frac{2,38}{5,3} \cdot 100\% = 44,9\%,$$

що менше потрібної норми прибутку, яка дорівнює 60%, тобто проект необхідно відхилити.

В цій ситуації багато уваги приділяємо пізнім надходженням (оскільки надходження не дисконтуються, а віддалені за часом надходження розглядаються як поточні, то порушується встановлене правило – "сьогоднішні гроші є дорожчими за завтрашні".)

Задача 4.8. Розглянемо одноперіодний інвестиційний проект: інвестиції – 100000 грош. од., чисті надходження в кінці року – 108000 грош. од.

Норма прибутку при цьому

$$N = \frac{108000 - 100000}{100000} = 0,08 = 8\%.$$

Проект слід прийняти, якщо відсоток на капітал $r < 8\%$. Пояснення: замість прийняття проекту з інвестиціями 100000 грош. од. для одержання прибутку $r = 8\%$ вигідніше покласти гроші у банк під $v\%$ річних, якщо $v > r$.

Цей критерій достатньо часто використовують на західному ринку під час купівлі багатьох товарів, внаслідок чого значна частина суспільства живе в кредит, хоча це не свідчить про їхню бідність. Наприклад, автомобіль можна придбати в кредит під 6% річних, а гроші покласти в банк під 9% річних. У даному випадку відсоток на капітал $r = 6\% < 9\%$. Якщо б коефіцієнт r став більшим ніж 9%, то заможні люди купували б автомобілі за готівку, а інші верстви суспільства не купувала б їх взагалі. Попит на автомобілі знизився б, а це невигідно виробникам.

Контрольні запитання і завдання

1. Поясніть, що таке інвестиційний проект і наведіть приклади.
2. Розкажіть, як змінюється вартість грошей у часі.
3. Поясніть, як обчислюється вартість грошей у часі.
4. Наведіть визначення поточної і майбутньої вартості грошей.
5. Визначте рентабельність інвестиційного проекту.
6. Визначте залежність поточної вартості від часу та депозитної ставки. Проілюструйте графічно.
7. Запропоновано вкласти у справу 200 тис. грн для того, щоб за три роки одержати 250 тис. грн при депозитній ставці 3%. Поясніть, чи вигідна дана пропозиція.
8. Визначте цінність фірми.
9. Визначте премію за ризик.

11. Поясніть, як можна максимізувати цінність фірми в умовах невизначеності.

12. Прокоментуйте правило вибору проекту в умовах невизначеності на основі показника чистої зведеної вартості.

13. Опишіть процедуру реалізації правила, наведеного вище.

14. Виберіть найбільш вигідний інвестиційний проект. При виборі проекту А необхідно вкласти: в перший рік – 25 млн грн, в другий рік – 35 млн грн; при виборі проекту Б: в перший рік – 55 млн грн, в другий рік – 10 млн грн. Норма прибутковості 10%.

Потоки очікуваних доходів від проектів складають:

а) проект А: 1-й рік – 27 млн грн, 2-й рік – 20 млн грн, 3-й рік – 12 млн грн, 4-й рік – 9 млн грн, 5-й рік – 7 млн грн.

б) проект Б: 1-й рік – 40 млн грн, 2-й рік – 35 млн грн, 3-й рік – 10 млн грн, 4-й рік – 5 млн грн.

15. Необхідно вибрати найменш ризикований інвестиційний проект на основі показника чистого зведеного доходу. Перші інвестиції в проекти А і Б однакові й становлять 30000 грн. Тривалість процесу інвестування – один рік. Потоки очікуваних доходів наведено в табл. 4.9. Норма доходності інвестицій – 10%.

Таблиця 4.9

Роки	Доходи	
	Проект А	Проект Б
1	10000	0
2	10000	0
3	10000	0
4	10000	0
5	10000	70000

16. За допомогою внутрішньої норми прибутку порівняйте можливі шляхи інвестування (табл. 4.10) і проранжуйте їх за ступенем привабливості.

Таблиця 4.10

Шляхи інвестування проекту	Початкові інвестиції, тис. грн	Сьогоднішня вартість грошового потоку, тис. грн
1	100	120
2	150	180
3	200	220
4	300	320
5	400	420
6	100	20

Таблиця 4.11

Роки	Грошовий потік, тис. грн
1	790
2	200
3	380

17. За допомогою методу підбору визначте внутрішню норму прибутку проекту, який приносить грошові потоки, наведені у табл. 4.11. Початкові інвестиції в проект становлять 630 тис. грн.

Бібліографічний список

1. Фон Нейман Д., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970. – 184 с.
2. Кейнс Дж. М. Общая теория занятости, процента и денег. – М.: Наука, 1948. – 154 с.
3. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. – М.: Наука, 1978. – 244 с.
4. Шумпетер Й. Теория экономического развития: Пер. с нем. – М.: Прогресс, 1982. – 185 с.
5. Райзберг Б.А. Предпринимательство и риск. – М.: Знание, 1992. – 64 с.
6. Балабанов Н.Т. Риск-менеджмент. – М.: Финансы и статистика, 1996. – 156 с.
7. Лившиц Н.А., Пугачев В.Н.. Вероятностный анализ систем автоматического управления. – М.: Сов. радио, 1963. – 887 с.
8. Самуэльсон П. Экономика. – М.: МГП «Алгон», ВНИИСИ, 1992. – 405 с.
9. Машина Н.І.. Економічний ризик та методи його вимірювання: Навч. посібник – К.: Центр навч. літ-ри, 2003. – 188 с.
10. Клебанова Т.С., Раевнева Е.В. Теория экономического риска: Учеб. пособие. – Х.: Изд. Дом "ИНЖЭК", 2003. – 156 с.

Бондарєва Тетяна Іванівна
Красніков Володимир Миколайович
Романенков Юрій Олександрович

АНАЛІЗ І ОЦІНКА РИЗИКІВ У ПІДПРИЄМНИЦЬКІЙ ДІЯЛЬНОСТІ

Редактор В.М. Коваль

Зв. план, 2007

Підписано до друку 04.04.2007

Формат 60x84 1/16. Папір офс. №2. Офс. друк.

Ум. друк. арк. 2,6. Обл.-вид. арк. 2,88. Наклад 100 прим.

Замовлення 141. Ціна вільна

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
<http://www.khai.edu>
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu