

*М. А. Зайденварг*

## К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ КОСОУГОЛЬНОЙ ФРОНТАЛЬНОЙ АКСОНОМЕТРИИ

Наиболее распространенным видом инженерно-технических чертежей являются так называемые комплексные\* чертежи, представляющие собой ортогональные проекции оригинала на две или три взаимно перпендикулярные плоскости проекций. При этом проектируемый предмет располагают так, чтобы на его проекциях можно было увидеть натуральные размеры элементов, необходимые для изготовления предмета.

Если трех проекций (видов) недостаточно, прибегают к дополнительным проекциям (видам), на которых уточняется форма и проектируются в натуральную величину размеры того или иного элемента. Таким образом, основная цель, которая преследуется при составлении комплексного чертежа, состоит в том, чтобы сделать чертеж удобоизмеримым.

При этом вопрос о наглядности изображения отодвигается на задний план. Поэтому комплексные чертежи удобоизмеримы, но в большинстве случаев не наглядны.

Между тем наглядность изображения, единое зрительное впечатление о предмете является существенным моментом, облегчающим чтение чертежа. При пользовании комплексным чертежом единое зрительное впечатление о форме и положении предмета в пространстве создается с помощью воображения, для чего требуется достаточно развитая способность пространственного мышления.

Это обстоятельство затрудняет чтение чертежей и в производственной практике иногда приводит к недоразумениям, ошибкам и нередко к браку, особенно при изготовлении сложных неповторяющихся деталей и в процессе освоения производства новых машин.

Повышение уровня культуры производства, усложнение формы деталей и узлов, увеличивающееся с каждым годом количество новых типов машин, производство которых осваивается нашей промышленностью — все это настоятельно требует, чтобы наряду с комплексными чертежами деталей и узлов производство получало также наглядные чертежи.

Метод параллельного аксонометрического проектирования является наиболее простым из существующих методов построения наглядных изображений. И все же получение аксонометрических изображений связано с довольно сложными построениями, что препятствует широкому распространению наглядных чертежей.

Задачей настоящей работы является упрощение и усовершенствование процесса построения косоугольной фронтальной аксонометрии в целях более широкого внедрения этого вида аксонометрии в практику проектирования.

Фронтальная аксонометрия представляет собой косоугольную параллельную проекцию на фронтальную плоскость  $X_1O_1Z_1$  (рис. 1). Показатели искажения ( $p$  и  $r$ ) для осей  $X_1$  и  $Z_1$  равны единице, а все элементы,

\* Термин принадлежит Н. Ф. Четверухину.

расположенные в плоскостях, параллельных фронтальной плоскости проекций, проектируются без искажения. В этом состоит основное преимущество фронтальной аксонометрии перед другими видами аксонометрии\*.

Что касается оси  $Y_1$ , то она может быть расположена под любым углом ( $\gamma$ ) к горизонту, показатель искажения ( $q$ ) для нее может быть выбран произвольно. Действительно, из рисунков 4 и 5 видно, что величина угла  $\gamma$  зависит от положения плоскости  $P$ , проектирующей ось  $Y$  на картинную (фронтальную) плоскость; положение плоскости  $P$  можно выбирать произвольно, лишь бы она проходила через ось  $Y$ , поэтому и угол  $\gamma$  можно получить любой величины.

Величина показателя  $q$  зависит от угла  $\varphi$ , образованного направлением проектирования  $M$  с картинной плоскостью. Угол  $\varphi$  можно выбрать

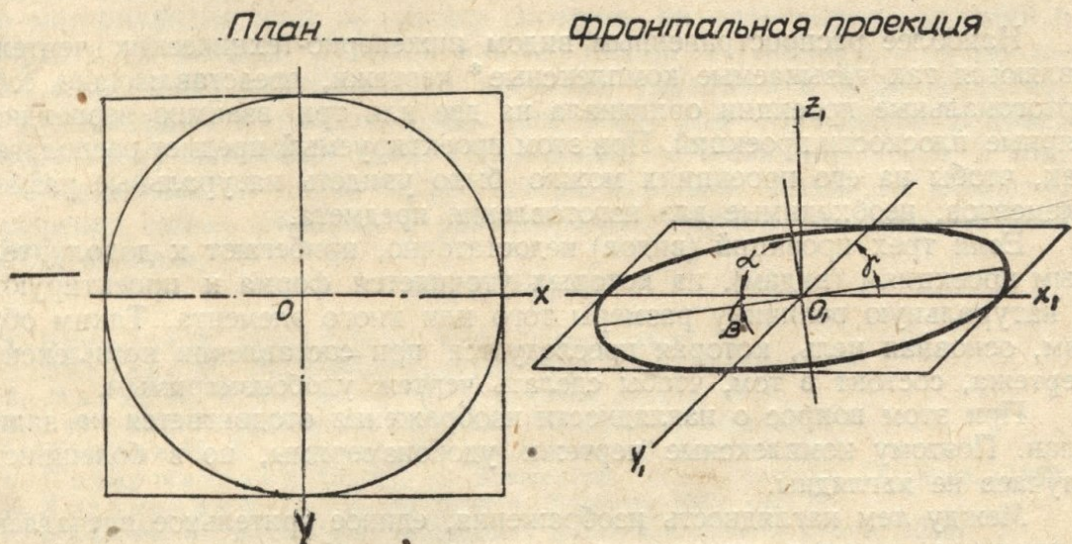


Рис. 1.

произвольно, поэтому  $q$  также может быть любым наперед заданным числом.

Выбирая различные значения угла  $\gamma$  и показателя  $q$ , можно менять наглядность изображений.

Как правило фронтальная аксонометрия дает возможность получить достаточно наглядные изображения, почти не уступающие в этом смысле другим видам аксонометрии, в частности, прямоугольной.

Ниже рассматриваются вопросы построения фронтальной аксонометрии окружностей, лежащих в плоскостях, параллельных плоскостям проекций, а также фронтальной аксонометрии шара.

#### Построение фронтальной аксонометрии окружности, расположенной в плоскости, параллельной плоскости проекций

Аксонометрическая проекция окружности в общем случае представляет собой эллипс.

Вопрос о построении прямоугольной аксонометрии окружности, расположенной в плоскости, параллельной плоскости проекций, решен в том смысле, что точно вычислены параметры, позволяющие построить эллипсы в прямоугольной изометрии ( $p = q = r$ ) и диметрии ( $p = r; q = \frac{1}{2}p$ ).

В косоугольной фронтальной аксонометрии окружности, расположенные во фронтальных плоскостях, проектируются без искаже-

\* Мы отвлекаемся здесь от рассмотрения косоугольной аксонометрии на горизонтальную плоскость («военная перспектива»), обладающей аналогичными свойствами.

ния. Что же касается данных для построения проекций окружностей, расположенных в горизонтальных и профильных плоскостях, то такие данные в литературе приведены лишь для случая фронтальной диметрии с углом  $\gamma = 45^\circ$  (кабинетная проекция) и притом даются без доказательства\*.

Существует графический способ построения аксонометрической проекции окружности (то есть эллипса), как фигуры родственной окружности. Однако этот способ (он будет описан ниже) громоздок и поэтому неудобен для построения аксонометрических чертежей.

Поставим перед собой задачу: вычислить параметры, необходимые для построения эллипса, представляющего собой фронтальную проекцию окружности, расположенной в горизонтальной плоскости (рис. 1).

Таковыми параметрами являются: углы  $\alpha$  и  $\beta$  наклона осей эллипса к горизонту и размеры осей эллипса. Вычислим указанные параметры

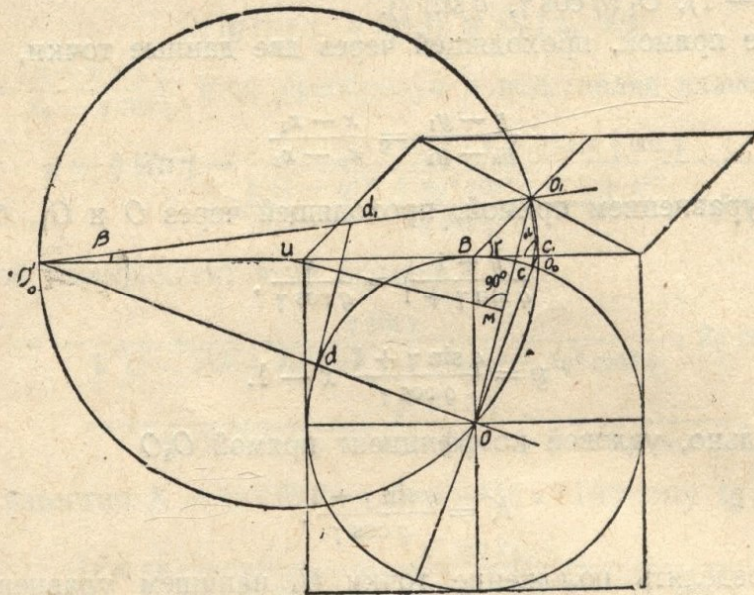


Рис. 2.

в зависимости от угла  $\gamma$  наклона оси  $Y_1$  к горизонту и показателя искажения  $q$  для оси  $Y_1$ .

Для вычислений используем рис. 2, на котором приведен графический способ определения интересующих нас величин.

Эллипс, вписанный в параллелограмм (рис. 1, справа), является аксонометрической, а значит параллельной проекцией окружности, вписанной в квадрат (рис. 1, слева). Поэтому между ними можно установить родственное соответствие (рис. 2).

Осью родства является прямая  $UB$ , пара родственных точек —  $O$  и  $O_1$ .

Определим взаимно перпендикулярные диаметры (оси) эллипса, в которые преобразуются взаимно перпендикулярные диаметры окружности. Построение, как известно, заключается в следующем. В точке  $M$ , делящей пополам расстояние  $O_1O$  (рис. 2), восстанавливаем перпендикуляр к прямой  $O_1O$  до пересечения с осью родства в точке  $U$ . Из точки  $U$  радиусом  $UO$  описываем окружность и засекаем на оси родства точки  $O_0$  и  $O_0'$ .

\* См., например, В. И. Каменев — Аксонометрические проекции, 1946; В. А. Федоренко и А. И. Шошин — Справочник по машиностроительному черчению, Машгиз, 1953.

Соединив эти точки с точкой  $O_1$ , получаем направления:  $O_0O_1$  — малой оси,  $O'_0O_1$  — большой оси эллипса.

Соответственными диаметрами окружности будут  $O_0O$  и  $O'_0O$ . Отметив на них точки  $c$  и  $d$ , можно найти соответственные точки  $c_1$  и  $d_1$  и, таким образом, определить величины полуосей эллипсов:  $c_1O_1$  малой и  $d_1O_1$  — большой\*.

Определение углов наклона ( $\alpha$  и  $\beta$ ) осей эллипса

Вычисления ведем по формулам аналитической геометрии.

Расположим начало координат в точке  $B$ .

Радиус окружности примем равным единице  $OB = 1$ , тогда  $O_1B = q$  ( $q$  — показатель искажения для оси  $Y_1$ ).

Определим координаты точек  $O$  и  $O_1$  непосредственно из чертежа (рис. 2):  $O(0, -1)$ ;  $O_1(q \cos \gamma, q \sin \gamma)$ .

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки, выражается формулой

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Поэтому уравнением прямой, проходящей через  $O$  и  $O_1$ , будет

$$\frac{y + 1}{q \sin \gamma + 1} = \frac{x}{q \cos \gamma},$$

откуда

$$y = \frac{q \sin \gamma + 1}{q \cos \gamma} x - 1.$$

Следовательно, угловой коэффициент прямой  $O_1O$

$$K = \frac{q \sin \gamma + 1}{q \cos \gamma}.$$

Чтобы определить положение точки  $U$ , напишем уравнение прямой, перпендикулярной прямой  $O_1O$  и проходящей через точку  $M$ . Угловой коэффициент этой прямой

$$K_1 = -\frac{1}{K} = -\frac{q \cos \gamma}{q \sin \gamma + 1}.$$

Уравнение такой прямой имеет вид:

$y - y_1 = K_1(x - x_1)$ , где  $x_1$  и  $y_1$  — координаты точки  $M$ , которые нетрудно вычислить по чертежу:

$$x_1 = \frac{q \cos \gamma}{2}; \quad y_1 = \frac{q \sin \gamma - 1}{2}.$$

Подставляя в уравнение, имеем

$$y - \frac{q \sin \gamma - 1}{2} = -\frac{q \cos \gamma}{q \sin \gamma + 1} \left( x - \frac{q \cos \gamma}{2} \right).$$

Полагая  $y = 0$ , найдем значение  $x_u$  для точки  $U$ .

После преобразований получим

$$x_u = -\frac{1 - q^2}{2q \cos \gamma}.$$

\* Обоснование перечисленных построений можно найти в «Курсе начертательной геометрии» Н. А. Попова, Гостехиздат, 1947, стр. 394.

Определяем величину радиуса  $UO$  (координаты точек  $U$  и  $O$  известны):

$$UO = \sqrt{\left(\frac{1-q^2}{2q \cos \gamma}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{(1-q^2)^2 + 4q^2 \cos^2 \gamma}}{2q \cos \gamma}$$

Так как  $UO = UO_0$ , значение  $x$  для точки  $O_0$  определяем как разность

$$\begin{aligned} x_0 = UO - |x_u| &= \frac{\sqrt{(1-q^2)^2 + 4q^2 \cos^2 \gamma}}{2q \cos \gamma} - \frac{1-q^2}{2q \cos \gamma} = \\ &= \frac{\sqrt{(1-q^2)^2 + 4q^2 \cos^2 \gamma} - 1 + q^2}{2q \cos \gamma}. \end{aligned}$$

Значение  $y$  для точки  $O_0$  равно нулю.

Уравнение прямой, проходящей через точки

$$O_1(q \cos \gamma, q \sin \gamma) \text{ и } O_0(x_0, 0)$$

$$\frac{y - q \sin \gamma}{-q \sin \gamma} = \frac{x - q \cos \gamma}{x_0 - q \cos \gamma} \text{ или, преобразуя и подставляя значение } x_0,$$

$$y - q \sin \gamma = \frac{-q \sin \gamma \cdot x + q^2 \sin \gamma \cos \gamma}{\frac{\sqrt{(1-q^2)^2 + 4q^2 \cos^2 \gamma} - 1 + q^2}{2q \cos \gamma} - q \cos \gamma}.$$

Угловой коэффициент этой прямой

$$\begin{aligned} K &= - \frac{q \sin \gamma}{\frac{\sqrt{(1-q^2)^2 + 4q^2 \cos^2 \gamma} - 1 + q^2}{2q \cos \gamma} - q \cos \gamma} \cdot 2q \cos \gamma = \\ &= - \frac{q^2 \sin 2\gamma}{\sqrt{(1-q^2)^2 + 4q^2 \cos^2 \gamma} - 1 + q^2 - 2q^2 \cos^2 \gamma}. \end{aligned}$$

Как известно  $K = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ . Поэтому  $\operatorname{tg} \alpha = -K$

или

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q^2 \sin 2\gamma}{\sqrt{(1-q^2)^2 + 4q^2 \cos^2 \gamma} - 1 + q^2 - 2q^2 \cos^2 \gamma}. \quad (1)$$

Заменяя  $q$  величиной  $\frac{1}{m}$ , получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin 2\gamma}{\sqrt{(m^2 - 1)^2 + 4m^2 \cos^2 \gamma} - m^2 + 1 - 2 \cos^2 \gamma}, \quad (1')$$

где

$$m = \frac{1}{q}.$$

При тех или иных частных значениях угла формула значительно упрощается. Так, при  $\gamma = 45^\circ$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{m^4 + 1} - m^2}. \quad (2)$$

Величина угла  $\beta$  определяется из условия  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Имея значение углов  $\alpha$  и  $\beta$ , можно вычислить размеры осей эллипсов.

### Определение размеров осей эллипсов

Для вычисления осей эллипсов могут быть выведены соответствующие формулы.

Так как формулы для общего случая оказались бы очень сложными, целесообразно дать формулы для тех или иных частных значений угла  $\gamma$ . Ниже дается вывод формул для вычисления осей эллипсов при  $\gamma = 45^\circ$ .

Из подобных треугольников  $O_1O_0O$  и  $c_1O_0c$  (рис. 2) следует

$$\frac{O_0O}{cO} = \frac{O_0O_1}{c_1O_1},$$

откуда малая полуось  $c_1O_1 = cO \frac{O_0O_1}{O_0O}$ .

Так как мы приняли  $cO = R = 1$ ,

$$c_1O_1 = \frac{O_0O_1}{O_0O}.$$

Вычислим  $O_0O_1$ . По теореме синусов  $\frac{O_0O_1}{\sin \gamma} = \frac{BO_1}{\sin \alpha}$ .

Отсюда

$$O_0O_1 = BO_1 \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = q \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{1}{m} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2m \sin \alpha}.$$

$\sin \alpha$  определяем по формуле  $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$ . Подставляя значение  $\operatorname{tg} \alpha$  по формуле (2), имеем

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{m^4 + 1} - m^2 \sqrt{m^4 + 1}}.$$

Таким образом,

$$O_0O_1 = \frac{\sqrt{2}}{2m \sin \alpha} = \frac{\sqrt{m^4 + 1} - m^2 \sqrt{m^4 + 1}}{m}.$$

Вычислим  $O_0O$ . Из прямоугольного треугольника  $O_0BO$

$$O_0O = \sqrt{O_0B^2 + 1}.$$

Величина  $O_0B$ , обозначенная ранее как  $x_0$ , равна

$$O_0B = \frac{\sqrt{(1-q)^2 + 4q^2 \cos^2 \gamma} - 1 + q^2}{2q \cos \gamma}.$$

Заменяя  $q$  величиной  $\frac{1}{m}$  и полагая  $\gamma = 45^\circ$ , получим (после преобразований):

$$O_0B = \frac{\sqrt{m^4 + 1} + 1 - m^2}{m \sqrt{2}}.$$

Подставляем это значение в выражение

$$O_0O = \sqrt{O_0B^2 + 1}.$$

После преобразований получим

$$O_0O = \frac{\sqrt{m^4 + 1} - (m^2 - 1) \sqrt{m^4 + 1}}{m}.$$

Разделив  $O_0O_1$  на  $O_0O$ , получим (после преобразований) величину малой полуоси (оси) эллипса в долях радиуса (диаметра)

$$c_1O_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{m^4 + 1} - m^2}{\sqrt{m^4 + 1} - m^2 + 1}}. \quad (3)$$

Из подобных треугольников  $OO'_0O_1$  и  $dO'_0d_1$

$$\frac{O'_0O}{dO} = \frac{O'_0O_1}{d_1O_1}.$$

Так как  $dO = 1$ , большая полуось эллипса

$$d_1O_1 = \frac{O'_0O_1}{O'_0O}.$$

Из прямоугольных треугольников  $O'_0O_1O_0$  и  $O'_0OO_0$  следует

$$O'_0O_1 = O_0O_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

$$O'_0O = O_0O \cdot \operatorname{tg} \angle OO_0B,$$

но  $\operatorname{tg} \angle OO_0B = \frac{1}{O_0B}$ . Таким образом,  $O'_0O = \frac{O_0O}{O_0B}$ , а

$$d_1O_1 = \frac{O'_0O_1}{O'_0O} = \frac{O_0O_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\frac{O_0O}{O_0B}} = \frac{O_0O_1}{O_0O} O_0B \operatorname{tg} \alpha = c_1O_1 \cdot O_0B \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

(так как  $\frac{O_0O_1}{O_0O} = c_1O_1$ ).

Подставляем значения  $c_1O_1$ ,  $O_0B$  и  $\operatorname{tg} \alpha$ , вычисленные ранее:

$$\begin{aligned} d_1O_1 &= \sqrt{\frac{\sqrt{m^4+1}-m^2}{\sqrt{m^4+1}-m^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{m^4+1}+1-m^2}{m\sqrt{2}(\sqrt{m^4+1}-m^2)} = \\ &= \frac{1}{m\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{m^4+1}-m^2+1}{\sqrt{m^4+1}-m^2}}. \end{aligned}$$

Помножив числитель и знаменатель (под знаком радикала) на выражение  $\sqrt{m^4+1}+(m^2-1)$ , после преобразований получим величину большой полуоси (оси) эллипса в долях радиуса (диаметра):

$$d_1O_1 = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}-\sqrt{m^4+1}}. \quad (4)$$

Таким же путем могут быть выведены формулы и для других значений угла  $\gamma$ . Так, при  $\gamma = 30^\circ$ ,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{m^4+m^2+1}-2m^2-1}$$

малая ось

$$\sqrt{\frac{2\sqrt{m^4+m^2+1}-2m^2-1}{2\sqrt{m^4+m^2+1}-2m^2+2}}; \quad (5)$$

большая ось

$$\frac{1}{\sqrt{2m^2+2-2\sqrt{m^4+m^2+1}}}. \quad (6)$$

Формулы (3), (4), (5) и (6) неудобны для вычислений вследствие громоздкости. Кроме того, каждая пара формул справедлива лишь для одного значения угла  $\gamma$ . Поэтому для практических расчетов целесообразнее применить другой способ вычисления.

Другой способ вычисления осей эллипса

При выводе формул (3) и (4) было показано, что полуоси эллипса определяются отношениями

$$c_1O_1 = \frac{O_0O_1}{O_0O} \text{ и } d_1O_1 = \frac{O'_0O_1}{O'_0O}.$$

Из треугольника  $O'_0O_1O_0$  следует

$$O_0O_1 = O'_0O_0 \cdot \cos \alpha \text{ и } O'_0O_1 = O'_0O_0 \cdot \sin \alpha.$$

Из треугольника  $O'_0O_0O$  следует

$$O_0O = O'_0O_0 \cdot \cos \mu \text{ и } O'_0O = O'_0O_0 \cdot \sin \mu,$$

где

$$\mu = \angle OO_0B.$$

Следовательно,

$$c_1O_1 = \frac{O_0O_1}{O_0O} = \frac{O'_0O_0 \cdot \cos \alpha}{O'_0O_0 \cdot \cos \mu} = \frac{\cos \alpha}{\cos \mu}. \quad (7)$$

$$d_1O_1 = \frac{O'_0O_1}{O'_0O} = \frac{O'_0O_0 \cdot \sin \alpha}{O'_0O_0 \cdot \sin \mu} = \frac{\sin \alpha}{\sin \mu}. \quad (8)$$

Для определения угла  $\mu$  заметим, что

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{1}{O_0B} = \frac{2q \cos \gamma}{\sqrt{(1-q^2)^2 + 4q^2 \cos^2 \gamma} - 1 + q^2} \quad (9)$$

(величина  $O_0B$  была вычислена ранее на стр. 72).

Заменяя  $q$  через  $\frac{1}{m}$ , получим

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{2m \cos \gamma}{\sqrt{(m^2-1)^2 + 4m^2 \cos^2 \gamma} - m^2 + 1}. \quad (9')$$

Таким образом, ход расчета сравнительно прост: по формуле (1) или (1') определяем  $\operatorname{tg} \alpha$  и из таблиц находим  $\alpha$ ,  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$ ; по формуле (9) или (9') определяем  $\operatorname{tg} \mu$  и по таблицам находим  $\mu$ ,  $\sin \mu$  и  $\cos \mu$ .

Затем по формулам (7) и (8) вычисляем значение малой и большой осей эллипса.

Так, например, для кабинетной проекции  $\gamma = 45^\circ$  и  $q = 1/2$ . Соответственно по формуле (1')

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin(2 \cdot 45^\circ)}{\sqrt{(2^2-1)^2 + 4 \cdot 2^2 \cdot \cos^2 45^\circ} - 2^2 + 1 - 2 \cos^2 45^\circ} = 8,1237;$$

$$\alpha = 82^\circ 59' \sim 83^\circ; \sin \alpha = 0,9925; \cos \alpha = 0,1222;$$

по формуле (9')

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{2 \cdot 2 \cdot \cos 45^\circ}{\sqrt{(2^2-1)^2 + 4 \cdot 2^2 \cdot \cos^2 45^\circ} - 2^2 + 1} = 2,5184;$$

$$\mu = 68^\circ 21'; \sin \mu = 0,9294; \cos \mu = 0,3689.$$

Малая полуось (ось)

$$c_1O_1 = \frac{0,1222}{0,3689} = 0,331.$$

Большая полуось (ось)

$$d_1O_1 = \frac{0,9925}{0,9294} = 1,068.$$

В таблице приведены данные для построения эллипсов при различных значениях  $\gamma$  и  $q$ . Эти данные получены по формулам (1'), (9'), (7) и (8).

Показатель искажения	Угол наклона малой оси к горизонту			Размеры осей эллипса в долях от диаметра окружности					
	$\gamma = 30^\circ$	$\gamma = 45^\circ$	$\gamma = 60^\circ$	малая ось			большая ось		
				$\gamma = 30^\circ$	$\gamma = 45^\circ$	$\gamma = 60^\circ$	$\gamma = 30^\circ$	$\gamma = 45^\circ$	$\gamma = 60^\circ$
1 : 1	75°	67°30'	60°	0,37	0,54	0,71	1,37	1,31	1,22
3 : 4	79°36'	75°20'	72°56'	0,31	0,46	0,59	1,21	1,16	1,10
2 : 3	81°15'	78°	76°50'	0,27	0,42	0,54	1,17	1,13	1,08
1 : 2	84°33'	83°	83°03'	0,23	0,33	0,42	1,10	1,07	1,04
1 : 3	87°24'	86°50'	87°06'	0,16	0,23	0,28	1,04	1,03	1,02



Данные, приведенные в таблице, могут быть использованы и для построения проекций окружности, расположенной в профильной плоскости (рис. 3). В этом случае под углом  $\gamma$  следует подразумевать угол наклона оси  $Y_1$  к вертикали; угол  $\alpha$ —угол наклона малой оси эллипса к вертикали.

На рис. 3 построен эллипс для случая, когда  $q = 3/4$  и угол наклона оси  $Y_1$  к вертикали равен  $60^\circ$ .

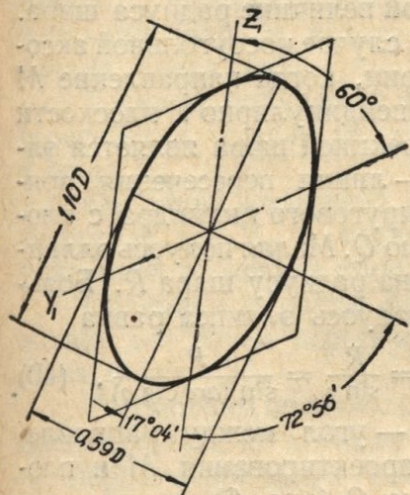


Рис. 3.

### Построение фронтальной проекции шара

Направление аксонометрического проектирования  $M$  проектирует ось  $Y$  на плоскость  $Q$  в виде оси  $Y_1$ . Направление  $M$  и ось  $Y$  (как пересекающиеся прямые) определяют плоскость  $P$  (рис. 4). Эта плоскость проходит, разумеется, через ось  $Y_1$  и является вертикально проектирующей (так как содержит ось  $Y$ ).

Если, например, ось  $Y_1$  расположена под углами  $135^\circ$  к осям  $X_1$  и  $Z_1$  (рис. 4), то плоскость  $P$  делит пополам угол между осями  $X$  и  $Z$ .

Это наглядно видно на рис. 5, где представлена проекция всей системы на плоскость  $P$

(верхняя часть рис. 5) и дана схема проектирования ортогональной системы осей на плоскость  $Q$ .

Оси  $X$  и  $Z$ , как и вся плоскость  $XOZ$ , проектируются без искажения. Угол  $\varphi$  представляет собой

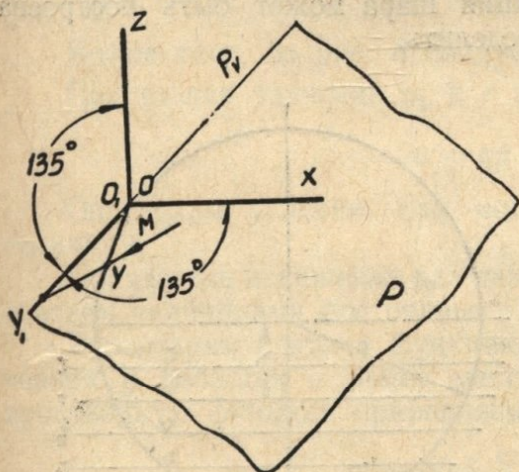


Рис. 4.

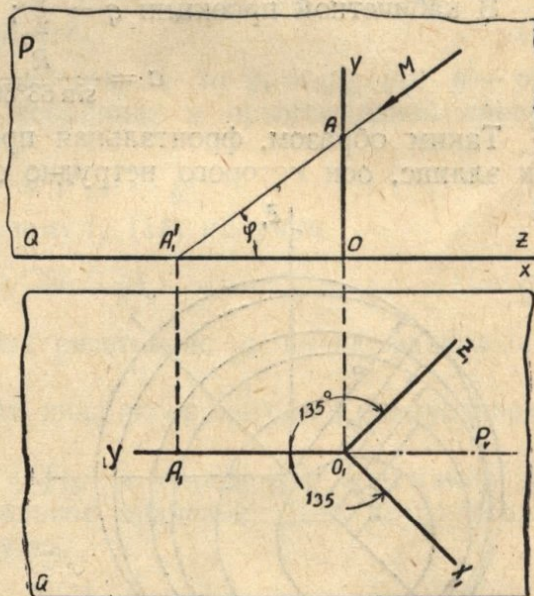


Рис. 5.

угол между направлением проектирования и плоскостью  $Q$ .

Показатель искажения для оси  $Y_1$

$$q = \frac{O_1A_1}{OA} = \frac{OA'}{OA} = \text{ctg } \varphi.$$

Таким образом,  $\varphi = \text{arc ctg } q$ .

При аксонометрическом проектировании шар проектируется пучком параллельных лучей. Поверхность, проектирующая шар, — цилиндрическая, параллельная направлению проектирования  $M$ . Нормальное сечение этой поверхности — окружность радиуса  $R$ , равного радиусу шара.

Аксонметрическая проекция шара представляет собой линию пересечения цилиндрической поверхности с плоскостью аксонметрических проекций  $Q$ . Поэтому, в случае прямоугольной аксонметрии, когда направление  $M$  перпендикулярно плоскости  $Q$ , проекцией шара является окружность, радиус которой  $R$ , равен натуральной величине радиуса шара.

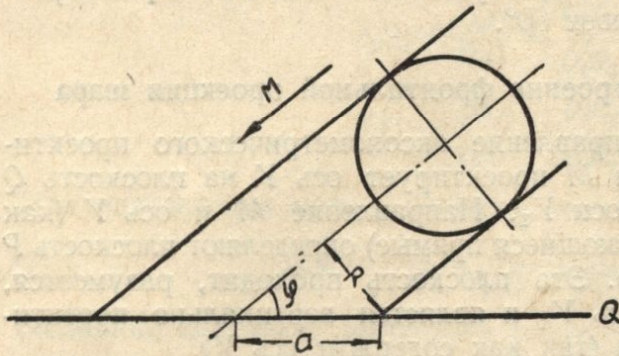


Рис. 6.

В случае косоугольной аксонметрии, когда направление  $M$  не перпендикулярно к плоскости  $Q$ , проекцией шара является эллипс — линия пересечения прямого кругового цилиндра с плоскостью  $Q$ . Малая полуось эллипса равна радиусу шара  $R$ . Большая полуось эллипса равна

$$a = \frac{R}{\sin \varphi} = \frac{R}{\sin (\operatorname{arc} \operatorname{ctg} q)}, \quad (10)$$

где  $\varphi$  — угол между направлением проектирования  $M$  и плоскостью  $Q$  (рис. 6).

Так, например, в кавальерной проекции  $q = 1$ ,  $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} 1 = 45^\circ$

$$a = \frac{R}{\sin (\operatorname{arc} \operatorname{ctg} 1)} = \frac{R}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2} R.$$

В кабинетной проекции  $q = \frac{1}{2}$ ;  $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} = 63^\circ 30'$ .

$$a = \frac{R}{\sin 63^\circ 30'} = 1,12R.$$

Таким образом, фронтальная проекция шара может быть построена как эллипс, оси которого нетрудно определить.

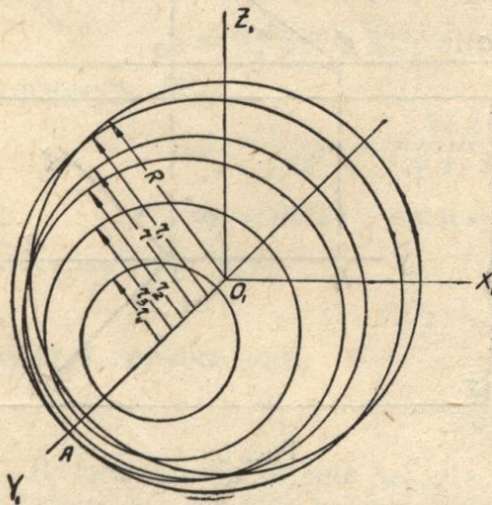


Рис. 7.

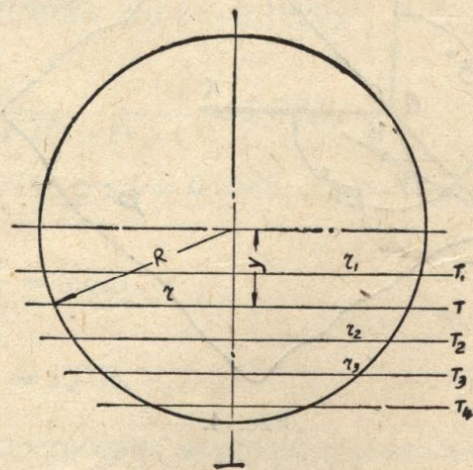


Рис. 8.

Такой способ построения фронтальной аксонметрии шара значительно проще другого, более громоздкого способа, рекомендуемого некоторыми авторами\*. Сущность этого способа состоит в том, что шар пересекают рядом плоскостей ( $T_1, T_2, T_3$  и т. д.), параллельных той плоскости проекций, которая, в свою очередь, параллельна плоскости аксонметрического проектирования  $Q$ . Так, для фронтальной аксонметрии плоскости  $T$  проводятся параллельно плоскости проекций  $XOZ$  (рис. 8),

\* См., например, А. И. Добряков, Курс начертательной геометрии, 1952, стр. 316.

Полученные при пересечении с шаром окружности проектируются в аксонометрии без искажения. Очерк шара строится как плавная кривая, описанная около полученных окружностей (рис. 7).

Помимо громоздкости, при таком способе трудно найти на оси  $Y_1$  точку  $A$ , через которую проходит очерк шара. Эта точка принадлежит проекции шара и вместе с тем является точкой, наиболее удаленной от начала координат.

Точка  $A$  получается в результате пересечения одной из окружностей с осью  $Y_1$ .

Но какая же именно окружность пересечет ось  $Y_1$  в точке, наиболее удаленной от начала координат?

Попытаемся найти точное положение для точек пересечения очерка шара с осью  $Y_1$ .

Рассмотрим произвольную окружность радиуса  $r$ , которая получилась от пересечения шара плоскостью  $T$  (рис. 8). На аксонометрическом чертеже ее центр удален от начала координат на расстояние  $y_1$ , а сама окружность пересекает ось  $Y_1$  в точке, удаленной от начала координат на расстояние  $a$  (рис. 9). Очевидно,

$$a = y_1 + r. \quad (11)$$

Если  $q$  — показатель искажения по оси  $Y_1$  то  $y_1 = qy$ , где  $y$  — расстояние от плоскости  $T$  до начала координат в ортогональной системе (рис. 8).

Кроме того, из рис. 8 следует  $r = \sqrt{R^2 - y^2}$ .

Подставляя значения  $y_1$  и  $r$  в формулу (11) получим

$$a = qy + \sqrt{R^2 - y^2}. \quad (12)$$

Определим условия, при которых расстояние  $a$  имеет наибольшую величину.

Показатель искажения для данного вида аксонометрии и радиус шара  $R$  считаем величинами постоянными.

Рассмотрим поэтому функцию  $a = f(y)$  и определим, при каких значениях  $y$  функция  $a$  имеет максимальное значение. Для этого первую производную функции приравняем нулю.

$$a' = q - \frac{1}{2} \cdot 2y \frac{1}{\sqrt{R^2 - y^2}} = 0.$$

Далее следуют преобразования

$$q = \frac{y}{\sqrt{R^2 - y^2}}; \quad q^2 (R^2 - y^2) = y^2 \text{ и т. д.}$$

В конечном счете получим

$$y = \frac{qR}{\sqrt{1 + q^2}}.$$

Чтобы убедиться, что полученное значение соответствует действительно максимуму функций, рассмотрим вторую производную, которая после преобразований имеет следующий вид:

$$a'' = -\frac{1}{\sqrt{R^2 - y^2}} \left( 1 + \frac{y^2}{R^2 - y^2} \right).$$

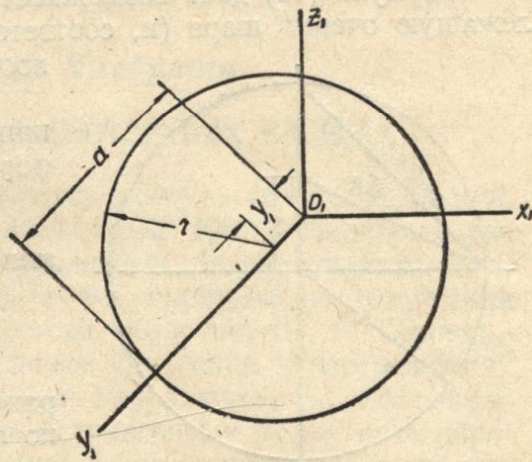


Рис. 9.

Так как  $R \geq y$ , нетрудно убедиться в том, что  $a''$  всегда меньше нуля.

Подставим полученное выше значение  $y$  в формулу (12). После преобразований получим

$$a = \sqrt{1 + q^2} R. \quad (13)$$

Формула (13) дает возможность определить на оси  $Y_1$  точку, принадлежащую очерку шара (и, соответственно, наиболее удаленную от начала координат).

Другой вид формулы получим, если припомним, что  $q = \operatorname{ctg} \varphi$ . Подставляя в формулу (13), имеем

$$a = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi} R$$

или

$$a = \frac{R}{\sin \varphi}. \quad (14)$$

Формула (14) совпадает с полученным ранее выражением для большой оси эллипса по формуле (10).

Таким образом, очерк шара в косоугольной фронтальной аксонометрии представляет собой эллипс и может быть построен по осям. Направление большой оси совпадает с осью  $Y_1$ . Ее величина определяется по формулам (13) или (14).

Малая полуось эллипса равна радиусу шара  $R$ .

Численные значения большой полуоси эллипса в зависимости от показателя искажения  $q$  даны в таблице (в долях от  $R$ ).

$q$	1	3 : 4	2 : 3	1 : 2	1 : 3
$a$	$\sqrt{2} = 1,41$	1,25	$\frac{\sqrt{13}}{3} = 1,20$	$\frac{\sqrt{5}}{2} = 1,12$	$\frac{\sqrt{10}}{3} = 1,05$

Величину большой полуоси эллипса легко получить путем графического вычисления. Если один катет прямоугольного треугольника принять за единицу, а величину второго катета взять  $q$ , то гипотенуза будет равна  $\sqrt{1 + q^2}$ . Поэтому, если на одном из катетов отложить  $R$ , а на втором  $qR$ , то гипотенуза равна большой полуоси эллипса.

На рис. 10 показано определение полуоси эллипса для кавальерной ( $q = 1$ ) и кабинетной ( $q = 1/2$ ) проекций; построения сделаны на ортогональной проекции шара.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Добряков А. И. Курс начертательной геометрии, Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, Москва—Ленинград, 1952.
2. Глаголев Н. А. Начертательная геометрия, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1953.
3. Глазунов Е. А. и Четверухин Н. Ф. Аксонометрия, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1953.
4. Гордон В. и Семенов-Огневский М. Курс начертательной геометрии, Государственное издание технико-теоретической литературы, Москва, 1953.
5. Курдюмов В. И. Курс начертательной геометрии, изд. Петерб. ин-та инженеров путей сообщения, СПб, 1905.
6. Попов Н. А. Курс начертательной геометрии, Гостехиздат М.—Л., 1947.
7. Четверухин Н. Ф. Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии. Учпедгиз, 1946.