

Канд. техн. наук *Н. В. Хлебутин*

МЕСТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ТОНКОСТЕННЫХ БАЛКАХ

В настоящей работе представлены некоторые результаты исследований, имеющих целью облегчить применение метода проф. Ю. Г. Одинокова для расчета на прочность тонкостенных подкрепленных балок с учетом стесненных короблений поперечных сечений и без гипотезы об отсутствии деформации сдвигов в срединной поверхности оболочки. Ю. Г. Одиноквым [2] получена система дифференциальных уравнений в перемещениях стрингеров, разрешение которой определяет напряженное и деформированное состояние балки. При расчете многострингерных балок интегрирование системы дифференциальных уравнений представляет известные технические трудности.

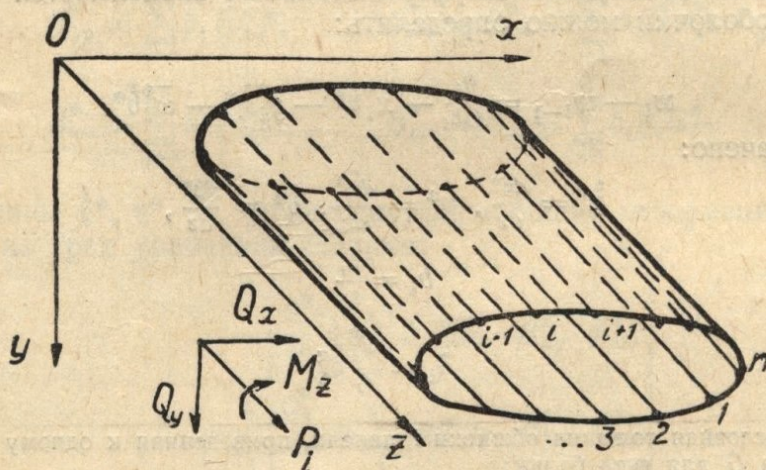


Рис. 1.

В данной работе получены новые выражения для коэффициентов дифференциальных уравнений, удобные для исследований, а интегрирование самых систем уравнений облегчено путем перехода к нормальным координатам. Для таких условий закрепления балки, когда на каждом из ее торцов заданы или одни силы или одни перемещения стрингеров, получены формулы для определения напряжений и деформаций в функции нормальных координат.

Автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность проф. Ю. Г. Одинокovu за ряд ценных указаний при составлении настоящей статьи.

1. Основные уравнения

Рассмотрим однозамкнутую тонкостенную цилиндрическую балку, подкрепленную n стрингерами и непрерывно распределенными по ее длине диафрагмами. Такая балка, положительные направления осей координат и составляющих внешней нагрузки изображены на рис. 1.

В предложенном Ю. Г. Одиноким методом расчета тонкостенных подкрепленных балок сделано допущение о том, что контур поперечного сечения балки не деформируется в плоскости этого сечения. Кроме того, предполагается, что обшивка работает только на сдвиг по всему контуру, за исключением участков, примыкающих к стрингерам. Площади работающих на нормальные напряжения участков обшивки, примыкающих к стрингерам, отнесены к площадям этих стрингеров. Стрингеры считаются работающими только на нормальные напряжения.

Пронумеруем стрингеры, обходя контур сечения балки по часовой стрелке. Участки обшивки, заключенные между двумя смежными стрингерами, называются панелями и нумеруются номером стрингера, которому предшествует данная панель при обходе контура по часовой стрелке.

Выберем в недеформируемой балке связанную с ней произвольную прямую AB , параллельную оси o^*z . После воздействия внешней нагрузки балка продеформируется. Точки, лежащие на выбранной прямой AB до деформации, получают перемещения после деформации. Проекция этих перемещений на оси координат o^*x^* и o^*y^* обозначим соответственно через $\xi^*(z)$ и $\eta^*(z)$. Кроме того, каждое поперечное сечение балки повернется вокруг выбранной прямой относительно своего первоначального положения на угол $\theta^*(z)$. Пользуясь произволом выбора прямой AB , совместим ее с осью o^*z .

Из условий выполнения дифференциальных зависимостей между перемещениями оболочки можно определить:

$$\omega_i - \omega_{i-1} = \frac{q_i}{Gb_i} - \bar{x}_i^* \dot{\xi}^* - \bar{y}_i^* \dot{\eta}^* - \bar{\omega}_i^* \dot{\theta}^*. \quad (1,1)$$

Здесь обозначено:

$$\dot{\xi}^* = \frac{d\xi^*}{dz}, \quad \dot{\eta}^* = \frac{d\eta^*}{dz}, \quad \dot{\theta}^* = \frac{d\theta^*}{dz},$$

$$b_i = \frac{\delta_i}{s_i} \quad (1,2)$$

$$\delta_i = \frac{G_i^g}{G} \delta_i^g \quad (1,3)$$

δ_i — условная толщина обшивки i панели, приведенная к одному модулю сдвига G для всей балки;

G_i^g, δ_i^g — действительные величины соответственно модулю сдвига и толщине обшивки i панели;

s_i — ширина i панели;

$\bar{\omega}_i^*$ — секториальная площадь i панели при полюсе в начале координат o^* ;

q_i — погонная сдвигающая сила в i панели балки;

ω_i и ω_{i-1} — перемещения в направлении оси oz точек, лежащих соответственно на i и $i-1$ стрингерах, ограничивающих i панель;

$$\begin{aligned} \bar{x}_i^* &= x_i^* - x_{i-1}^*, \\ \bar{y}_i^* &= y_i^* - y_{i-1}^*, \\ \bar{\omega}_i^* &= \omega_i^* - \omega_{i-1}^*, \end{aligned} \quad (1,4)$$

x_i^*, y_i^* — координаты центра тяжести площади поперечного сечения i стрингера с приведенной площадью обшивки.

Из соотношения (1,1) определяется выражение для погонной касательной силы в i панели:

$$q_i = Gb_i (\omega_i - \omega_{i-1} + \bar{x}_i^* \dot{\xi}^* + \bar{y}_i^* \dot{\eta}^* + \bar{\omega}_i^* \dot{\theta}^*). \quad (1,5)$$

Условия равновесия стрингеров от сил, действующих в направлении оси oz , выражаются в таком виде:

$$b_i \omega_{i-1} - \frac{E}{G} F_i \ddot{\omega}_i + (b_i + b_{i+1}) \omega_i - b_{i+1} \omega_{i+1} - \Delta x_i^* \dot{\xi}^* - \Delta y_i^* \dot{\eta}^* - \Delta \omega_i^* \dot{\theta}^* = \frac{p_i}{G},$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\begin{aligned} \Delta x_i^* &= b_{i+1} \bar{x}_{i+1}^* - b_i \bar{x}_i^*, \\ \Delta y_i^* &= b_{i+1} \bar{y}_{i+1}^* - b_i \bar{y}_i^*, \\ \Delta \omega_i^* &= b_{i+1} \bar{\omega}_{i+1}^* - b_i \bar{\omega}_i^*, \end{aligned} \quad (1,7)$$

где

F_i — площадь поперечного сечения i стрингера с приведенной площадью обшивки,

E — модуль нормальной упругости,

p_i — внешняя погонная осевая сила, приложенная к i стрингеру,

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} B_{xx}^* &= \sum_{i=1}^n b_i (\bar{x}_i^*)^2, & B_{xy}^* &= B_{yx}^* = \sum_{i=1}^n b_i \bar{x}_i^* \bar{y}_i^*, \\ B_{yy}^* &= \sum_{i=1}^n b_i (\bar{y}_i^*)^2, & B_{x\omega}^* &= B_{\omega x}^* = \sum_{i=1}^n b_i \bar{x}_i^* \bar{\omega}_i^*, \\ B_{\omega\omega}^* &= \sum_{i=1}^n b_i (\bar{\omega}_i^*)^2, & B_{y\omega}^* &= B_{\omega y}^* = \sum_{i=1}^n b_i \bar{y}_i^* \bar{\omega}_i^*. \end{aligned} \quad (1,8)$$

Величины $\dot{\xi}^*$, $\dot{\eta}^*$, $\dot{\theta}^*$, характеризующие общие деформации балки, определяются из трех уравнений статики:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^* &= \frac{1}{\Delta^*} \begin{vmatrix} \frac{Q_x^*}{G} + \sum_i \Delta x_i^* \omega_i & B_{xy}^* & B_{x\omega}^* \\ \frac{Q_y^*}{G} + \sum_i \Delta y_i^* \omega_i & B_{yy}^* & B_{y\omega}^* \\ \frac{M_z}{G} + \sum_i \Delta \omega_i^* \omega_i & B_{\omega y}^* & B_{\omega\omega}^* \end{vmatrix}, \\ \dot{\eta}^* &= \frac{1}{\Delta^*} \begin{vmatrix} B_{xx}^* \frac{Q_x^*}{G} + \sum_i \Delta x_i^* \omega_i & B_{x\omega}^* \\ B_{yx}^* \frac{Q_y^*}{G} + \sum_i \Delta y_i^* \omega_i & B_{y\omega}^* \\ B_{\omega x}^* \frac{M_z}{G} + \sum_i \Delta \omega_i^* \omega_i & B_{\omega\omega}^* \end{vmatrix}, \\ \dot{\theta}^* &= \frac{1}{\Delta^*} \begin{vmatrix} B_{xx}^* & B_{xy}^* & \frac{Q_x^*}{G} + \sum_i \Delta x_i^* \omega_i \\ B_{yx}^* & B_{yy}^* & \frac{Q_y^*}{G} + \sum_i \Delta y_i^* \omega_i \\ B_{\omega x}^* & B_{\omega y}^* & \frac{M_z}{G} + \sum_i \Delta \omega_i^* \omega_i \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (1,9)$$

где

$$\Delta^* = \begin{vmatrix} B_{xx}^* & B_{xy}^* & B_{x\omega}^* \\ B_{yx}^* & B_{yy}^* & B_{y\omega}^* \\ B_{\omega x}^* & B_{\omega y}^* & B_{\omega\omega}^* \end{vmatrix} \quad (1,10)$$

Вводя выражения (1,9) в уравнения (1,6), получим основную систему дифференциальных уравнений в перемещениях:

$$G \sum_{k=1}^n a_{ik}^* \omega_k - EF_i \ddot{\omega}_i = R_i^*, \quad (1,11)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь введены обозначения:

$$R_i^* = \frac{\Delta x_i^*}{\Delta^*} \begin{vmatrix} Q_x^* & B_{xy}^* & B_{x\omega}^* \\ Q_y^* & B_{yy}^* & B_{y\omega}^* \\ M_z^* & B_{\omega y}^* & B_{\omega\omega}^* \end{vmatrix} + \frac{\Delta y_i^*}{\Delta^*} \begin{vmatrix} B_{xx}^* & Q_x^* & B_{x\omega}^* \\ B_{yx}^* & Q_y^* & B_{y\omega}^* \\ B_{\omega x}^* & M_z^* & B_{\omega\omega}^* \end{vmatrix} + \frac{\Delta \omega_i^*}{\Delta^*} \begin{vmatrix} B_{xx}^* & B_{xy}^* & Q_x^* \\ B_{yx}^* & B_{yy}^* & Q_y^* \\ B_{\omega x}^* & B_{\omega y}^* & M_z^* \end{vmatrix} + p_i \quad (1,12)$$

$$a_{ik}^* = b_{ik} - \frac{\Delta x_i^*}{\Delta^*} \begin{vmatrix} \Delta x_i^* & B_{xy}^* & B_{x\omega}^* \\ \Delta y_i^* & B_{yy}^* & B_{y\omega}^* \\ \Delta \omega_i^* & B_{\omega y}^* & B_{\omega\omega}^* \end{vmatrix} - \frac{\Delta y_i^*}{\Delta^*} \begin{vmatrix} B_{xx}^* & \Delta x_i^* & B_{x\omega}^* \\ B_{yx}^* & \Delta y_i^* & B_{y\omega}^* \\ B_{\omega x}^* & \Delta \omega_i^* & B_{\omega\omega}^* \end{vmatrix} - \frac{\Delta \omega_i^*}{\Delta^*} \begin{vmatrix} B_{xx}^* & B_{xy}^* & \Delta x_i^* \\ B_{yx}^* & B_{yy}^* & \Delta y_i^* \\ B_{\omega x}^* & B_{\omega y}^* & \Delta \omega_i^* \end{vmatrix}, \quad (1,13)$$

$b_{ik} = 0$ для всех i, k , кроме:

$$\begin{aligned} b_{ii} &= b_i + b_{i+1}, \\ b_{i-1, i} &= -b_i, \\ b_{i, i+1} &= -b_{i+1}. \end{aligned} \quad (1,14)$$

Коэффициенты системы дифференциальных уравнений (1,11), записанные по формулам (1,12) и (1,13), представляют интерес лишь при проведении общих исследований данного метода расчета балок. При решении же практических задач систему уравнений (1,11) выгодно записывать в главных осях сдвига xuz^* . Эти оси характеризуются тем, что для них

$$B_{xy} = 0, \quad (1,15)$$

$$B_{x\omega} = B_{y\omega} = 0. \quad (1,16)$$

Для отыскания главных осей сдвига целесообразно первоначально определить их направление.

Обозначим через $x'o'y'$ оси координат, направление которых параллельно главным осям сдвига, а начало координат находится в точке o^* . Через β обозначим угол между положительным направлением осей $x'o'y'$ и $x^*o^*y^*$.

Условие (1,15) приводит к следующему соотношению для определения угла β :

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2B_{xy}^*}{B_{xx}^* - B_{yy}^*}. \quad (1,17)$$

Для вычисления коэффициентов B_{xx} и B_{yy} относительно главных осей сдвига формулы имеют вид:

$$\begin{aligned} B_{xx} &= B_{xx}^* \cos^2 \beta + B_{yy}^* \sin^2 \beta + B_{xy}^* \sin 2\beta, \\ B_{yy} &= B_{xx}^* \sin^2 \beta + B_{yy}^* \cos^2 \beta - B_{xy}^* \sin 2\beta. \end{aligned} \quad (1,18)$$

* Термин «главные оси сдвига» заимствован из работы Р. А. Ададурова [1]. В работе [2] эти оси названы главными осями искажений.

Координаты центра сдвига x'_c, y'_c в системе осей координат $x'oy'$ определяются из условий (1,16).

$$x'_c = \frac{B'_{\omega y}}{B'_{yy}}, \quad y'_c = -\frac{B'_{x\omega}}{B'_{xx}}, \quad (1,19)$$

где штрихи при коэффициентах означают то, что эти коэффициенты вычисляются для осей координат $x'o^*y'$.

Если теперь принять за оси координат главные оси сдвига, то в этом случае все выше приведенные формулы от (1,1) до (1,8) сохранят свой вид, но без звездочек при буквенных обозначениях.

Формулы (1,9) при этом упростятся и примут вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= \frac{1}{B_{xx}} \left(\frac{Q_x}{G} + \sum_i \Delta x_i \omega_i \right), \\ \ddot{\eta} &= \frac{1}{B_{yy}} \left(\frac{Q_y}{G} + \sum_i \Delta y_i \omega_i \right), \\ \ddot{\theta} &= \frac{1}{B_{\omega\omega}} \left(\frac{M_z}{G} + \sum_i \Delta \omega_i \omega_i \right). \end{aligned} \quad (1,20)$$

Система уравнений (1,11) сохранит свою форму

$$G \sum_k a_{ik} \omega_k - E F_i \ddot{w}_i = R_i, \quad (1,21)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

но коэффициенты этих уравнений вычисляются по более простым формулам*:

$$a_{ik} = b_{ik} - \frac{\Delta x_i \Delta x_k}{B_{xx}} - \frac{\Delta y_i \Delta y_k}{B_{yy}} - \frac{\Delta \omega_i \Delta \omega_k}{B_{\omega\omega}}, \quad (1,22)$$

$$R = \frac{\Delta x_i}{B_{xx}} Q_x + \frac{\Delta y_i}{B_{yy}} Q_y + \frac{\Delta \omega_i}{B_{\omega\omega}} M_z + p_i. \quad (1,23)$$

Выше была получена система дифференциальных уравнений для цилиндрической оболочки однозамкнутого профиля.

Для цилиндрических оболочек с многозамкнутым профилем вывод исходных дифференциальных уравнений производится аналогичным образом. В этом случае отличие результатов вывода состоит лишь в форме записи коэффициентов (1,7) и (1,14) для тех стрингеров (значений i, k), к которым примыкают не 2, а 3 панели. Подробно такие оболочки рассмотрены в другой работе [2]. Оболочка же открытого профиля является частным видом однозамкнутой оболочки, у которой одна из панелей имеет толщину обшивки, равную нулю.

Интегрирование системы дифференциальных уравнений (1,21) сводится, как известно, к выполнению следующих трех этапов:

1) Определение общего интеграла однородной системы дифференциальных уравнений, соответствующей системе (1,21). Этот этап приводится к решению систем алгебраических уравнений вида

$$\sum_k a_{ik} h_k - \frac{E}{G} F_i \lambda^2 h_i = 0, \quad (1,24)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

* Аналогичное выражение коэффициентов получено Ю. Г. Одиноквым [4] путем преобразования соответствующих коэффициентов сложной структуры [2].

где искомыми являются корни характеристического уравнения λ и соотношения $h_1:h_2:\dots:h_n$. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \frac{E}{G} F_1 \lambda^2 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \frac{E}{G} F_2 \lambda^2 & a_{23} & \dots & a_{23} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \frac{E}{G} F_n \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (1,25)$$

Решение системы уравнений (1,24) удобнее всего производить матричным или релаксационным способом.

2) Отыскание частного интеграла системы неоднородных дифференциальных уравнений (1,21).

3) Определение произвольных постоянных общего интеграла, исходя из условий закрепления балки по концам.

Ниже изложен прием выполнения двух последних этапов решения поставленной задачи для определенных краевых условий балки.

2. Нормальные координаты. Интегрирование основных уравнений

Предположим, что решение системы (1,24) известно. Тогда для интегрирования системы дифференциальных уравнений (1,21) и определения напряжений и деформаций балки оказывается выгодным перейти к нормальным координатам и использовать способ интегрирования систем дифференциальных уравнений, изложенный в работе Ю. Г. Одинокова [3].

Введем n новых переменных φ_μ , связанных со старыми переменными ω_i , следующими линейными зависимостями:

$$\varphi_\mu = E \sum_{i=1}^n F_i h_i^{(\mu)} \omega_i, \quad \mu = 1, 2, \dots, n. \quad (2,1)$$

Если коэффициенты $h_i^{(\mu)}$ являются решениями системы (1,24), то новые переменные φ_μ представляют собой нормальные координаты. В этом случае система (1,21), состоящая из n совместных уравнений, в новых переменных преобразуется к системе n изолированных уравнений.

$$\ddot{\varphi}_\mu - \lambda^2 \varphi_\mu = \psi_\mu(z), \quad \mu = 1, 2, \dots, n, \quad (2,2)$$

где, принимая во внимание тождества:

$$\begin{aligned} \sum_i \Delta x_i h_i^{(\mu)} &= - \sum_i b_i \bar{x}_i \bar{h}_i^{(\mu)} = - B_{xh}^{(\mu)}, \\ \sum_i \Delta y_i h_i^{(\mu)} &= - \sum_i b_i \bar{y}_i \bar{h}_i^{(\mu)} = - B_{yh}^{(\mu)}, \\ \sum_i \Delta \omega_i h_i^{(\mu)} &= - \sum_i b_i \bar{\omega}_i \bar{h}_i^{(\mu)} = - B_{\omega h}^{(\mu)}, \end{aligned} \quad (2,3)$$

$$\bar{h}_i^{(\mu)} = h_i^{(\mu)} - h_{i-1}^{(\mu)},$$

имеем

$$\psi_\mu = \frac{B_{xh}^{(\mu)}}{B_{xx}} Q_x + \frac{B_{yh}^{(\mu)}}{B_{yy}} Q_y + \frac{B_{\omega h}^{(\mu)}}{B_{\omega\omega}} M_z - \sum_i \rho_i h_i^{(\mu)}, \quad (2,4)$$

при этом

λ_μ — корень характеристического уравнения (1,25),

μ — номер корня,

$h_i^{(\mu)}$, $i = 1, 2, \dots, n$ — совокупность решений системы (1,24) для μ корня.

Предположим сперва, что все корни характеристического уравнения различны и отличны от нуля. В этом случае общий интеграл системы дифференциальных уравнений (2,2) запишется так:

$$\varphi_{\mu} = C_1^{(\mu)} \operatorname{sh} \lambda_{\mu} z + C_2^{(\mu)} \operatorname{ch} \lambda_{\mu} z + \frac{1}{\lambda_{\mu}} \int_0^z \psi_{\mu} \operatorname{sh} \lambda_{\mu} (z-t) dt, \quad (2,5)$$

$$\mu = 1, 2, \dots, n.$$

Произвольные постоянные интегрирования $C_1^{(\mu)}$ и $C_2^{(\mu)}$ определяются из условий закрепления балки по концам.

В том случае, когда на одном из торцов балки заданы одни перемещения или связь между ними, а на другом конце известны силы или связь между ними, граничные условия для нормальных координат φ_{μ} записываются непосредственно из соотношений (2,1).

Получив решение в новых φ_{μ} , необходимо вернуться к первоначальным переменным w_i . Для этой цели выразим переменные w_i через φ_{μ} , решив уравнения системы (2,1) относительно w_i . Получим:

$$w_i = \sum_{\mu=1}^n d_i^{(\mu)} \varphi_{\mu}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2,6)$$

Из условия ортогональности коэффициентов уравнений систем (2,1) и (2,6) определяем:

$$d_i^{(\mu)} = \frac{h_i^{(\mu)}}{EI_{\mu}}, \quad i, \mu = 1, 2, \dots, n, \quad (2,7)$$

где

$$I_{\mu} = \sum_{k=1}^n F_k [h_k^{(\mu)}]^2. \quad (2,8)$$

Введем обозначение:

$$w_i^{(\mu)} = d_i^{(\mu)} \varphi_{\mu} = \frac{h_i^{(\mu)}}{EI_{\mu}} \varphi_{\mu}. \quad (2,9)$$

Тогда формулу (2,6) можно переписать так:

$$w_i = \sum_{\mu=1}^n w_i^{(\mu)} = \sum_{\mu=1}^n \frac{h_i^{(\mu)}}{EI_{\mu}} \varphi_{\mu}. \quad (2,10)$$

Перемещения $w_i^{(\mu)}$, определяемые формулой (2,10) (по аналогии с задачей о малых колебаниях систем с сосредоточенными массами), назовем главными перемещениями или главными типами (формами) перемещений стрингеров балки. Условимся, что наличие индекса (μ) у какого-либо параметра означает, что величина этого параметра определена для (μ) корня характеристического уравнения и, следовательно, для (μ) главного перемещения.

Таким образом, общие перемещения точек стрингеров состоят из наложения главных перемещений, каждое из которых определяется независимо от других и соответствует определенному корню характеристического уравнения.

Полученные выше формулы для главных перемещений справедливы для различных и неравных нулю корней. В действительности характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений (1,21) имеет шестикратный нулевой корень (трехкратный для λ^2) для балок замкнутого профиля и восьмикратный нулевой корень для балок открытого профиля.

При этом главные перемещения и нормальные напряжения, соответствующие этим корням, определяются из расчета на изгиб по известным формулам сопротивления материалов для балок замкнутого профиля [4] и из расчета на изгиб и стесненное кручение по методу В. З. Власова для балок открытого профиля.

Если среди корней характеристического уравнения окажутся кратные корни, отличные от нуля, то в этом случае коэффициенты $a_i^{(\mu)}$ вычисляются по формулам, приведенным в работе [3]. Здесь случай кратных корней не рассматривается. Установлено, что кратные корни характеристического уравнения системы (1,21) имеют место для некоторых балок, имеющих поперечное сечение с двумя осями симметрии. Но для таких балок система дифференциальных уравнений, для рассмотренных здесь граничных условий, распадается на более простые системы дифференциальных уравнений, каждая из которых уже не имеет кратных корней.

3. Компоненты деформаций и напряжений

Вводя (2,10) в (1,20), для балок замкнутого профиля запишем выражения общих деформаций в такой форме:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{Q_x}{GB_{xx}} + \dot{\xi}_0 - \sum_{\mu} \dot{\xi}_{\mu}, \\ \dot{\eta} &= \frac{Q_y}{GB_{yy}} + \dot{\eta}_0 - \sum_{\mu} \dot{\eta}_{\mu}, \\ \dot{\theta} &= \frac{M_z}{GB_{\omega\omega}} - \sum_{\mu} \dot{\theta}_{\mu}, \end{aligned} \quad (3,1)$$

где обозначено:

- ξ, η — прогибы линии, проходящей через центр сдвига профиля,
- θ — угол поворота сечения относительно центра сдвига,
- ξ_0, η_0 — компоненты прогибов, соответствующие нулевым корням характеристического уравнения*,
- $\xi_{\mu}, \eta_{\mu}, \theta_{\mu}$ — компоненты прогибов и углов поворота сечения, соответствующие (μ) главному перемещению.

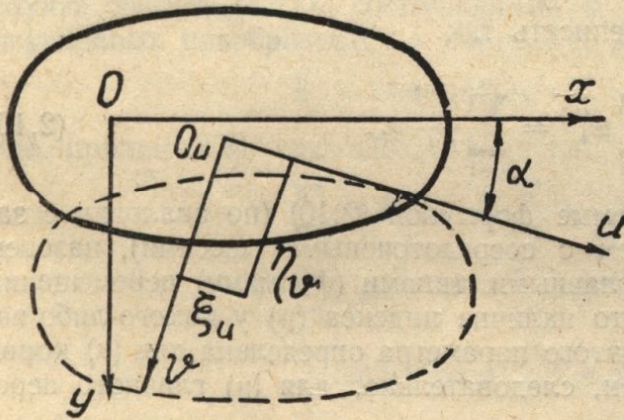


Рис. 2.

- xoy — главные оси сдвига,
- uo_v — главные оси инерции,
- α — угол между положительными направлениями главных осей сдвига и главных осей инерции,

* Для балок открытого профиля от перемещений, соответствующих нулевым корням характеристического уравнения, будет иметь место еще поворот сечения на некоторый угол θ_0 .

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{\mu} &= \frac{B_{xh}^{(\mu)} \varphi_{\mu}}{B_{xx} EI_{\mu}}, \\ \dot{\eta}_{\mu} &= \frac{B_{yh}^{(\mu)} \varphi_{\mu}}{B_{yy} EI_{\mu}}, \\ \dot{\theta}_{\mu} &= \frac{B_{\omega h}^{(\mu)} \varphi_{\mu}}{B_{\omega\omega} EI_{\mu}}. \end{aligned} \quad (3,2)$$

Из рассмотрения рис. 2 проекции прогибов упругой линии балки на главные оси сдвига можно выразить через прогибы упругой линии в направлении главных осей инерции. На рис. 2 обозначено:

ξ_u, η_v — прогибы упругой линии балки в направлении главных осей инерции, определяющиеся из расчета балки на изгиб.

$$\begin{aligned}\xi_0 &= \xi_u \cos \alpha + \eta_v \sin \alpha, \\ \eta_0 &= -\xi_u \sin \alpha + \eta_v \cos \alpha,\end{aligned}$$

а отсюда

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_0 &= \dot{\xi}_u \cos \alpha + \dot{\eta}_v \sin \alpha, \\ \dot{\eta}_0 &= -\dot{\xi}_u \sin \alpha + \dot{\eta}_v \cos \alpha.\end{aligned}\quad (3,3)$$

Формулу для определения погонных касательных сил в обшивке можно получить, подставляя в (1,5) выражения (2,10) и (3,1).

$$q_i = q_i^0 + \sum_{\mu} q_i^{(\mu)}.\quad (3,4)$$

Первым членом правой части этой формулы записаны погонные касательные силы, которые имеют место в сечениях, остающихся плоскими при деформации балки.

$$q_i^0 = b_i \left(\frac{\bar{x}_i}{B_{xx}} Q_x + \frac{\bar{y}_i}{B_{yy}} Q_y + \frac{\bar{\omega}_i}{B_{\omega\omega}} M_z \right).\quad (3,5)$$

Эта формула была получена Ю. Г. Одиноким [4].

Для оболочек, работающих на нормальные напряжения, аналогичная формула была получена Р. А. Ададуриным [1].

Членами, стоящими под знаком суммы в формуле (3,4), определяются погонные касательные силы, соответствующие главным перемещениям ($\mu = 4, 5, \dots, n$), которые вызывают коробление поперечного сечения балки:

$$q_i^{(\mu)} = \frac{G}{E} \frac{b_i k_i \varphi_{\mu}}{I_{\mu}},\quad (3,6)$$

где

$$k_i = \bar{h}_i^{(\mu)} - \bar{x}_i \frac{B_{xh}^{(\mu)}}{B_{xx}} - \bar{y}_i \frac{B_{yh}^{(\mu)}}{B_{yy}} - \bar{\omega}_i \frac{B_{\omega h}^{(\mu)}}{B_{\omega\omega}}.\quad (3,7)$$

Касательные напряжения в обшивке i панели будут:

$$\tau_i = \frac{q_i}{\delta_i^g}.\quad (3,8)$$

Нормальные напряжения в i стрингере выражаются формулой:

$$\sigma_i = E \dot{\omega}_i.$$

Подставляя сюда выражение (2,10), предварительно продифференцировав его по z , получим:

$$\sigma_i = \sigma_i^0 + \sum_{\mu=4}^n \sigma_i^{(\mu)},\quad (3,9)$$

где первым членом правой части формулы обозначены нормальные напряжения, меняющиеся по поперечному сечению балки по закону плоскости и определяющиеся формулой:

$$\sigma_i^0 = \frac{N}{\sum_k F_k} - \frac{M_v u_i}{I_v} + \frac{M_u v_i}{I_u},\quad (3,10)$$

где N — равнодействующая осевых сил.

Эти напряжения соответствуют перемещениям, определяющимся нулевыми корнями характеристического уравнения.

Как и в формуле для погонных касательных сил, в формуле (3,9) членами, стоящими под знаком суммы, определяются нормальные напряжения, соответствующие главным перемещениям ($\mu = 4, 5 \dots n$), которые вызывают коробление поперечного сечения балки.

$$\sigma_i^{(\mu)} = \frac{\dot{\varphi}_\mu h_i^{(\mu)}}{I_\mu}, \quad \mu = 4, 5, \dots n. \quad (3,11)$$

Заметим, что формулы для определения дополнительных нормальных напряжений имеют ту же структуру, что и формулы для определения нормальных напряжений при простом изгибе (или растяжении), а именно: напряжение в стрингере прямо пропорционально обобщенному силовому фактору (при изгибе — изгибающему моменту), обобщенной координате (при изгибе — линейной координате) и обратно пропорционально обобщенному моменту инерции сечения (при изгибе — осевому моменту инерции).

При этом обобщенные силовые факторы имеют и одинаковую структуру выражения через нормальные напряжения в стрингерах, а именно: при растяжении

$$N = \sum_{i=1}^n F_i \sigma_i,$$

при изгибе в плоскости uoz

$$M_u = \sum_{i=1}^n F_i \sigma_i u_i,$$

при изгибе в плоскости voz

$$M_v = \sum_{i=1}^n F_i \sigma_i v_i,$$

при деформации балки с короблением сечений, дифференцируя выражение (2,1), получим

$$\dot{\varphi}_\mu = \sum_{i=1}^n F_i \sigma_i h_i^{(\mu)}.$$

Отсюда следует, что функция $\dot{\varphi}_\mu$ имеет природу силового фактора, подобного изгибающему моменту. В задаче о стесненном кручении стержней открытого профиля такой новый фактор был назван бимоментом. В данной задаче функции $\dot{\varphi}_\mu$ ($\mu = 4, 5, \dots n$) уместно назвать четвертыми, пятыми и n -м полимоментами.

Обозначая полимомент через Π_μ , формулу (3,9) можно переписать еще так:

$$\sigma_i = \sum_{\mu=1}^n \frac{\Pi_\mu h_i^{(\mu)}}{I_\mu}.$$

При этом членами суммы выражаются нормальные напряжения, возникающие при различных видах деформации, а именно: при равномерном растяжении

$$\Pi_1 = N, \quad h_i^{(1)} = 1, \quad I_1 = \sum_{i=1}^n F_i l^2;$$

при изгибе в плоскости uoz

$$\Pi_2 = -M_v, \quad h_i^{(2)} = u_i, \quad I_2 = I_v = \sum_{i=1}^n F_i u_i^2;$$

при изгибе в плоскости voz

$$P_3 = M_u, \quad h_i^{(3)} = v_i, \quad I_3 = I_u = \sum_{i=1}^n F_i v_i^2,$$

при деформации балки с короблением поперечного сечения

$$P_\mu = \dot{\varphi}_\mu, \quad I_\mu = \sum_{i=1}^n F_i [h_i^{(\mu)}]^2, \quad \mu = 4, 5, \dots, n,$$

$h_i^{(\mu)}$ определяются из решения системы алгебраических уравнений (1,24).

В соответствии с формулой (2,5), напряжения, связанные с короблением поперечных сечений, по длине балки меняются по законам sh и ch и имеют обычно характер местных напряжений.

4. Пример.

Для иллюстрации полученных выше формул рассмотрим пример расчета балки прямоугольного сечения со стрингерами по углам (рис. 3). Пример этот взят из работы [2]. Выпишем исходные данные задачи.

$$\begin{aligned} \delta_1 = \delta_3, \quad s_1 = s_3, \quad b_1 = b_3 = \frac{\delta_1}{s_1}, \quad G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = G, \\ \delta_2 = \delta_4, \quad s_2 = s_4, \quad b_2 = b_4 = \frac{\delta_2}{s_2}, \quad F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F, \end{aligned}$$

l — длина балки.

Будем полагать, что в сечении $z = 0$ все стрингеры заделаны. Следовательно, при $z = 0$

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 0. \quad (4,1)$$

На другом конце балки к стрингеру 2 приложена осевая сила P . Следовательно, при $z = l$ имеем:

$$\dot{w}_1 = \dot{w}_3 = \dot{w}_4 = 0, \quad \dot{w}_2 = \frac{P}{EF}. \quad (4,2)$$

Поперечное сечение балки имеет две оси симметрии, через которые проходят и главные оси симметрии и главные оси сдвига.

Система дифференциальных уравнений (1,21) в нашем случае имеет вид:

$$\begin{aligned} w_1 - k\ddot{w}_1 - w_2 + w_3 - w_4 &= 0, \\ -w_1 + w_2 - k\ddot{w}_2 - w_3 + w_4 &= 0, \\ w_1 - w_2 + w_3 - k\ddot{w}_3 - w_4 &= 0, \\ -w_1 + w_2 - w_3 + w_4 - k\ddot{w}_4 &= 0, \end{aligned} \quad (4,3)$$

где

$$k = \frac{EF}{2G} \frac{\delta_1 s_2 + \delta_2 s_1}{\delta_1 \delta_2}$$

Коэффициенты $h_i^{(\mu)}$ легко определяются, если записать систему (1,24)

$$\begin{aligned} (1 - k\lambda^2) h_1 - h_2 + h_3 - h_4 &= 0, \\ -h_1 + (1 - k\lambda^2) h_2 - h_3 + h_4 &= 0, \\ h_1 - h_2 + (1 - k\lambda^2) h_3 - h_4 &= 0, \\ -h_1 + h_2 - h_3 + (1 - k\lambda^2) h_4 &= 0. \end{aligned} \quad (4,4)$$

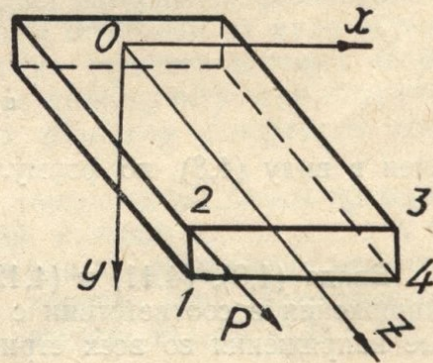


Рис. 3.

и три линейных зависимости между коэффициентами $h_i^{(\mu)}$, являющиеся следствием наличия в системе (4,4) трехкратного корня для $\lambda^2 = 0$.

$$\begin{cases} h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 0, \\ h_1 + h_2 - h_3 - h_4 = 0, \\ h_1 - h_2 - h_3 + h_4 = 0. \end{cases} \quad (4,5)$$

Из (4,5) сразу находим

$$h_2 = -h_1, \quad h_3 = h_1, \quad h_4 = -h_1. \quad (4,6)$$

Подставляя (4,6) в первое уравнение системы (4,4), получаем:

$$(4 - k\lambda^2)h_1 = 0.$$

Откуда

$$\lambda^2 = \frac{4}{k} = \frac{8G}{EF} \frac{\delta_1 \delta_2}{\delta_1 s_2 + \delta_2 s_1}. \quad (4,7)$$

Принимая $h_1^{(\mu)}$, из (4,6) имеем

$$h_1^{(4)} = -h_2^{(4)} = h_3^{(4)} = -h_4^{(4)} = 1. \quad (4,8)$$

Граничные условия для определения φ_4 получим, подставляя (4,1) и (4,2) в (2,1).

При $z = 0$

$$\varphi_4 = 0.$$

При $z = e$

$$\dot{\varphi}_4 = EF h_2^{(4)} \dot{w}_2 = -P. \quad (4,9)$$

Используя эти условия, из (2,5) находим

$$\varphi_4 = -\frac{P}{\lambda} \frac{\text{sh } \lambda_4 z}{\text{ch } \lambda_4 l} \quad (4,10)$$

и

$$\dot{\varphi}_4 = -P \frac{\text{ch } \lambda_4 z}{\text{ch } \lambda_4 l}. \quad (4,11)$$

Имея в виду (4,8), по формуле (2,8) определяем

$$I_4 = 4F. \quad (4,12)$$

Вводя (4,8), (4,11) и (4,12) в формулу (3,11) и вычисляя нормальные напряжения в соответствии с формулой (3,10), находим полные нормальные напряжения во всех стрингерах

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{P}{4F} \left(1 - \frac{\text{ch } \lambda_4 z}{\text{ch } \lambda_4 l} \right), \\ \sigma_2 = \frac{P}{4F} \left(3 + \frac{\text{ch } \lambda_4 z}{\text{ch } \lambda_4 l} \right), \\ \sigma_3 = \frac{P}{4F} \left(1 - \frac{\text{ch } \lambda_4 z}{\text{ch } \lambda_4 l} \right), \\ \sigma_4 = \frac{P}{4F} \left(-1 + \frac{\text{ch } \lambda_4 z}{\text{ch } \lambda_4 l} \right). \end{cases} \quad (4,13)$$

Погонные касательные усилия в обшивке определяем по формуле (3,4). При этом отлично от нуля в нашем случае лишь слагаемое $q_i^{(4)}$, определяемое формулой (3,6) и (3,7):

$$q_1 = -\frac{GP}{EF \lambda} \frac{\delta_1 \delta_2}{\delta_1 s_2 + \delta_2 s_1} \frac{\text{sh } \lambda_4 z}{\text{ch } \lambda_4 l}, \quad (4,14)$$

$$q_1 = -q_2 = q_3 = -q_4.$$

При этом попутно определяется

$$\frac{B_{\omega h}^{(4)}}{B_{\omega\omega}} = \frac{4(\delta_1 s_2 - \delta_2 s_1)}{s_1 s_2 (\delta_1 s_2 + \delta_2 s_1)}. \quad (4,15)$$

Вводя (4,10), (4,12) и (4,15) в третью формулу (3,2), находим

$$\dot{\theta} = -\frac{P}{EF} \frac{\delta_1 s_2 - \delta_2 s_1}{s_1 s_2 (\delta_1 s_2 + \delta_2 s_1)} \frac{\operatorname{sh} \lambda_4 z}{\operatorname{ch} \lambda_4 l}. \quad (4,16)$$

Полученные формулы для определения напряжений и деформаций совпадают с теми, которые получены Ю. Г. Одиноквым, если их привести к принятой у нас форме.

ВЫВОДЫ

1. Использование нормальных координат значительно упрощает применение метода Ю. Г. Одиноква для расчета тонкостенных балок.

2. Для таких условий закрепления тонкостенной балки, когда на одном из ее торцов заданы перемещения или связь между ними, а на другом — известны приложенные к стрингерам силы или связь между ними, все деформации и напряжения в данной работе представлены в виде суммы составляющих, каждая из которых определяется независимо от других и соответствует определенному корню характеристического уравнения или, иными словами, определенной нормальной координате.

3. Нулевым корням характеристического уравнения, как известно, соответствуют нормальные напряжения, меняющиеся в поперечном сечении балки по закону плоскости. Эти напряжения определяют из расчета на растяжение и изгиб по формулам сопротивления материалов. Дополнительные нормальные напряжения, соответствующие отличным от нуля корням характеристического уравнения, имеют обычно характер местных напряжений, которые, как показывают примеры расчетов, практически затухают на длине порядка одного-двух наибольших размеров поперечного сечения балки.

4. Касательные напряжения в обшивке тонкостенной балки представлены в виде суммы касательных напряжений, которые имеют место в сечениях, остающихся плоскими, и дополнительных касательных напряжений, соответствующих отличным от нуля корням характеристического уравнения и связанных с короблением поперечного сечения балки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ададуров Р. А. Определение касательных напряжений в тонкостенных конструкциях вблизи заделки. Труды ЦАГИ, № 614, 1947.
2. Одинок Ю. Г. Расчет тонкостенных конструкций типа крыла, фюзеляжа и оперения самолетов. Труды КАИ, XVIII, 1946.
3. Одинок Ю. Г. К вопросу интегрирования систем обыкновенных линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами. Труды КАИ, XXIII, 1949.
4. Одинок Ю. Г. К расчету тонкостенных балок. Труды КАИ, XXV, 1951.