

Канд. техн. наук *Н. В. Хлебутин*

## О КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ ПРИ СТЕСНЕННОМ КРУЧЕНИИ ТОНКОСТЕННЫХ БАЛОК ЗАМКНУТОГО ПРОФИЛЯ

Эффективный метод расчета нормальных напряжений при стесненном кручении тонкостенных балок разработан А. А. Уманским в двух его работах [7, 8].

Этот метод позволяет также определять касательные напряжения в оболочке, однако сам автор в заключении работы [8] говорит, что в его решении «...точность определения касательных напряжений, сопутствующих нормальным (т. е. вторичных касательных напряжений), повидимому, ниже, чем точность определения нормальных напряжений. Практически, как это предложил в свое время В. Н. Беляев, касательные напряжения вблизи заделки следует рассчитывать по правилам для «сростков Шухова»...».

В данной работе для задачи о стесненном кручении тонкостенных балок замкнутого профиля построено решение, которое не только для нормальных, но и для касательных напряжений в районе заделки балки, дает хорошее совпадение с результатами расчетов по более общим методам [2, 6]. Оно получено путем решения задачи в перемещениях при использовании гипотезы А. А. Уманского о подобии деформации сечений тонкостенной балки при свободном и стесненном кручении.

### 1. Геометрические и статические соотношения тонкостенных балок

Деформации и напряжения упругой тонкостенной балки, подкрепленной стрингерами и диафрагмами, в случае стесненного кручения от поперечной нагрузки определяются на основе безмоментной теории оболочек. При этом нужно выполнить следующие три группы условий:

1) Геометрические соотношения для срединной поверхности оболочки:

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (1,1)$$

$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (1,2)$$

$$\epsilon_s = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{v}{R}, \quad (1,3)$$

$$\kappa_1 = \frac{\partial}{\partial s} \left( -\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u}{R} \right); \quad (1,4)$$

2) Соотношения упругости:

$$\epsilon_z = \frac{1}{E_0} (\sigma_z - \mu \sigma_s), \quad (1,5)$$

$$\epsilon_s = \frac{1}{E_0} (\sigma_s - \mu \sigma_z), \quad (1,6)$$

$$\tau = G\gamma; \quad (1,7)$$



3) Уравнения равновесия, при допущении о недеформируемости контура поперечного сечения и при предложении о постоянстве нормальных и касательных напряжений по толщине оболочки, сводятся к трем интегральным уравнениям

$$\oint \sigma_z x \delta ds + \sum_{i=1}^n \sigma_i f_i x_i = 0, \quad (1,8)$$

$$\oint \sigma_z y \delta ds + \sum_{i=1}^n \sigma_i f_i y_i = 0, \quad (1,9)$$

$$\oint q r ds = M \quad (1,10)$$

и одному дифференциальному уравнению, которое имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial z} (\sigma_z \delta) + \frac{\partial q}{\partial s} = 0 \quad (1,11)$$

для элемента оболочки без стрингера и

$$f_i \frac{d\sigma_i}{dz} + q_{i+1} - q_i = 0$$

для элемента оболочки, примыкающего к  $i$  стрингеру.

В формулах (1,1) — (1,11) приняты следующие обозначения:

- $x, y$  — координаты точки на срединной поверхности оболочки в осях координат  $хоу$ ,
- $x_i, y_i$  — координаты центра тяжести площади поперечного сечения  $i$  стрингера,
- $z, s$  — координаты точки на срединной поверхности оболочки, отсчитываемые по образующей и по ортогональным к ней кривым,
- $\delta$  — толщина оболочки,
- $f_i$  — площадь поперечного сечения  $i$  стрингера,
- $\sigma_i$  — нормальные напряжения в  $i$  стрингере,
- $n$  — число стрингеров,
- $q_i, q_{i+1}$  — внутренние погонные сдвигающие силы в предшествующей  $i$  и последующей  $i + 1$  панелях, примыкающих к  $i$  стрингеру,
- $q$  — внутренняя погонная сдвигающая сила в сечениях  $z = \text{const}$ ,
- $r$  — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную к срединной линии,
- $M$  — крутящий момент в сечении  $z = \text{const}$ ,
- $\sigma_z, \sigma_s$  — нормальные напряжения в сечениях обшивки, перпендикулярных соответственно к направлениям  $z$  и  $s$ ,
- $w$  — перемещения точек срединной поверхности в направлении образующей,
- $u, v$  — перемещения соответственно по касательной и по внешней нормали к дуге срединной линии поперечного сечения оболочки,
- $\epsilon_z, \epsilon_s$  — относительные удлинения срединной поверхности оболочки соответственно в направлении образующей и касательной к дуге поперечного сечения,
- $\gamma$  — угол сдвига срединной поверхности оболочки,
- $\kappa$  — изменение кривизны поперечного сечения оболочки,
- $R$  — радиус кривизны срединной линии поперечного сечения оболочки,
- $E_0$  — модуль нормальной упругости обшивки,
- $\mu$  — коэффициент Пуассона.



Кроме уравнений (1,11), будем еще иметь в виду уравнение равновесия

$$\oint \sigma_z \delta ds + \sum_{i=1}^n \sigma_i f_i = 0 \quad (1,12)$$

Это уравнение выражает равновесие всех сил, действующих в поперечном сечении в направлении образующей оболочки, в то время, как условие (1,11) записывает равновесие всех сил, действующих в том же направлении на элемент оболочки.

В рамках безмоментной теории оболочек (в общем случае соотношений упругости) удовлетворить все статико-геометрические соотношения невозможно. Причины этого подробно освещены в монографии А. Л. Гольденвейзера [3].

Для определения напряжений и деформаций оболочки существуют два приближенных способа решения: 1) решение задачи в перемещениях и 2) решение задачи в усилиях и моментах. При этом в первом способе в общем случае не удастся удовлетворить одно из шести условий статики, а во втором способе не используется и, следовательно, в общем случае не удовлетворяется одно условие совместности деформаций.

В целях упрощения задачи в прикладных методах расчета тонкостенных балок используют обычно дополнительные деформационные гипотезы. При этом удовлетворить все условия (1,1) — (1,12) не удастся.

Для расчета тонкостенных балок на стесненное кручение А. А. Уманским было принято допущение о том, что закон изменения перемещений  $w$  по контуру поперечного сечения балки одинаков при свободном и стесненном кручении. В методе А. А. Уманского при стесненном кручении балки не выполняется соотношение (1,2), в результате чего в районе заделки касательные напряжения, вычисленные по этому методу, отличаются от соответствующих величин, вычисленных по методам [2, 6], построенным без каких-либо гипотез об осевых перемещениях срединной поверхности оболочки.

В. Н. Зайцевым [5] предложен способ уточнения определения касательных напряжений в районе заделки путем наложения дополнительных решений от перемещений  $w$ , найденных определенным способом. Этот метод позволяет более строго удовлетворить условие (1,2), но связан с необходимостью проведения расчета последовательными приближениями.

В настоящей работе предлагается относительно простой прикладной метод расчета тонкостенной балки на стесненное кручение, основанный на точном выполнении соотношения (1,2). По касательным напряжениям в сечении заделки он обеспечивает полное совпадение с результатами расчетов по более общим методам.

## 2. Стесненное кручение балки общего вида

Рассмотрим тонкостенную балку длиной  $l$ , выполненную из обшивки, подкрепленной  $n$  стрингерами, а также поперечными диафрагмами. Балка заделана на одном торце при  $z = 0$  и загружена по всей длине распределенными крутящими моментами интенсивности  $m$  и сосредоточенным крутящим моментом  $M_k$  на свободном конце при  $z = l$ .

Пронумеруем стрингеры, обходя контур по часовой стрелке. Участки обшивки, заключенные между двумя смежными стрингерами, будем называть панелями и нумеровать номером стрингера, которому предшествует панель при обходе контура по часовой стрелке. Толщина обшивки для каждой из панелей считается постоянной, она может меняться лишь при переходе от панели к панели. Полагаем, что нормальные и касательные



напряжения по толщине обшивки постоянны ввиду ее малости. В этом случае обшивка находится в плоском напряженном состоянии и нормальные напряжения в ней при условии  $\epsilon_s = 0$  определяются по формулам (1,5) и (1,6):

$$\sigma = E_0 (1 - \mu) \epsilon = E \epsilon. \quad (2,1)$$

Здесь и далее мы опускаем индекс  $z$  при  $\sigma$  и при  $\epsilon$ .

Таким образом, даже в том случае, когда обшивка и стрингеры выполнены из одного и того же материала, они имеют различные коэффициенты пропорциональности между нормальным напряжением и относительным удлинением. Кроме того, обшивка и стрингеры могут быть выполнены из материалов с различными модулями нормальной упругости. Для упрощения выкладок применим широко распространенный в расчетной практике прием редуцирования толщин обшивки и площадей сечений стрингеров. Будем полагать, что модуль нормальной упругости обшивки и стрингеров одинаков и равен  $E$ , а толщину обшивки, принимаемую в расчет, умножим на редуциционный коэффициент  $\varphi_e = \frac{E_g}{E}$ , полученный из условия статической эквивалентности действительной и редуцированной балки,

$$\delta_e = \varphi_e \delta_g, \quad (2,2)$$

где  $E_g$  и  $\delta_g$  — действительный модуль нормальной упругости и действительная толщина обшивки.

Точно так же поступим и с площадями сечений стрингеров

$$f_i = \varphi_{ei} F_i, \quad (2,3)$$

где  $F_i$  — действительная площадь сечения  $i$  стрингера,

$$\varphi_{ei} = \frac{E_i}{E},$$

где  $E_i$  — модуль нормальной упругости материала  $i$  стрингера.

Для того, чтобы оперировать в расчете с модулем сдвига, не меняющимся по контуру поперечного сечения балки, там, где касается способности обшивки работать на касательные напряжения, будем в расчете пользоваться также толщиной обшивки  $\delta$ , которую считаем приведенной к одному модулю сдвига  $G$ :

$$\delta = \varphi_g \delta_g, \quad (2,4)$$

$$\varphi_g = \frac{G_s}{G},$$

где  $G_s$  — действительный модуль сдвига оболочки в точке с координатой  $s$ .

Заметим, что применение редуцированных коэффициентов удобно также в случае выполнения расчета по предельному состоянию, когда некоторые из элементов балки работают вне предела пропорциональности.

Деформации и напряжения балки при стесненном кручении будем искать, решая задачу в перемещениях. В этом случае в качестве основных неизвестных примем перемещения  $u$ ,  $v$  и  $w$ . Их определение производим, исходя из геометрических и статических соотношений, записанных в предыдущем параграфе.

В теории тонкостенных балок принимают

$$\epsilon_s = \alpha_1 = 0 \quad (2,5)$$

Это соответствует упомянутому выше допущению о том, что контур поперечного сечения в процессе деформации балки не меняет формы. Из



условия (2,5) можно выразить перемещения  $u$  и  $v$  в функции прогибов и углов закручивания балки. В случае одного кручения балки без изгибов подстановка (2,5) в (1,3) и (1,4) приводит к такому выражению для перемещений  $u$ :

$$u = r\theta, \tag{2,6}$$

Перемещения  $v$  мы здесь не записываем, поскольку они не входят в интересующие нас формулы для напряжений и деформаций.

Перемещения точек срединной поверхности оболочки  $w$  и перемещения стрингеров  $w_i$  запишем (по выводам А. А. Уманского) в такой форме

$$\begin{aligned} w &= -\beta\omega^*, \\ w_i &= -\beta\omega_i^*. \end{aligned} \tag{2,7}$$

Здесь обозначено:

$\beta$  — неизвестная функция от  $z$ , подлежащая определению,  
 $\omega^*$ ,  $\omega_i^*$  — обобщенная главная секториальная площадь соответственно для точек, лежащих на срединной поверхности и на  $i$  стрингере,

$$\begin{aligned} \omega^* &= \omega_0 - \Omega s^* - K, \\ \omega_i^* &= \omega_{0i} - \Omega s_i^* - K, \end{aligned} \tag{2,8}$$

$$K = \frac{\oint (\omega_0 - \Omega s^*) \delta_e ds + \sum_{i=1}^n (\omega_{0i} - \Omega s_i^*) f_i}{\oint \delta_e ds + \sum_{i=1}^n f_i},$$

где

$\omega_0$ ,  $\omega_{0i}$  — удвоенная секториальная площадь, подсчитанная относительно полюса, расположенного в центре изгиба, соответственно до точки с координатой  $s$  и до  $i$  стрингера,

$\Omega$  — удвоенная площадь, ограниченная контуром поперечного сечения балки,

$s^*$ ,  $s_i^*$  — приведенная относительная длина дуги соответственно до точки с координатой  $s$  и до  $i$  стрингера,

$$s^* = \frac{1}{\rho} \int_0^s \frac{ds}{\delta},$$

$$s_i^* = \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^n \frac{\bar{s}_j}{\delta_j}, \tag{2,9}$$

$$\rho = \oint \frac{ds}{\delta} = \sum_{j=1}^n \frac{\bar{s}_j}{\delta_j},$$

где

$\bar{s}_j$  — ширина  $j$  панели обшивки, заключенной между  $j-1$  и  $j$  стрингерами,

$\delta_j$  — приведенная толщина обшивки  $j$  панели.

Совместим начало координат  $xoy$  с центром сдвига [2] сечения балки.

Дифференцируя (2,6) по  $z$ , а (2,7) по  $s$ , по формуле (1,2), получим относительный угол сдвига  $\gamma$ :

$$\gamma = \beta \left( \frac{\Omega}{\delta\rho} - \rho \right) - r\theta, \tag{2,10}$$

где  $\rho$  — длина перпендикуляра, опущенного из центра изгиба сечения на касательную к точке на контуре поперечного сечения.



Подставляя (2,10) в (1,7), определим касательные напряжения в оболочке.

$$\tau = G \left[ \beta \left( \frac{\Omega}{\delta \rho} - \rho \right) + r \dot{\theta} \right]. \quad (2,11)$$

Имея в виду, что  $q = \tau \delta$ , определим относительный угол закручивания  $\dot{\theta}$  из уравнения равновесия (1,10)

$$\dot{\theta} = \frac{M}{GI_r} + \frac{\beta}{I_r} \left( I_{r\rho} - \frac{\Omega^2}{\rho} \right), \quad (2,12)$$

где обозначено

$$M = M_k + \int_0^l m dz, \quad (2,13)$$

$$I_r = \oint r^2 \delta ds, \quad (2,14)$$

$$I_{r\rho} = \oint r \rho \delta ds. \quad (2,15)$$

Вводя (2,12) в (2,10) и (2,11), получим

$$\gamma = \frac{Mr}{I_r G} + \beta t, \quad (2,16)$$

$$\tau = \frac{Mr}{I_r} + G \beta t, \quad (2,17)$$

где

$$t = \frac{\Omega}{\delta \rho} - \rho + \frac{r}{I_r} \left( I_{r\rho} - \frac{\Omega^2}{\rho} \right). \quad (2,18)$$

Дифференцируя (2,7) по  $z$  и подставляя в (1,1), получим выражения для относительных удлинений оболочки  $\varepsilon$  и стрингеров  $\varepsilon_i$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -\dot{\beta} \omega^*, \\ \varepsilon_i &= -\dot{\beta} \omega_i^*. \end{aligned} \quad (2,19)$$

В формулы для деформаций и напряжений входит неизвестная функция  $\beta$  и ее производная. Для их определения воспользуемся вариационным уравнением Лагранжа.

$$\delta(A + \Pi) = 0, \quad (2,20)$$

где  $A$  — работа внешних сил на возможных перемещениях,  
 $\Pi$  — потенциальная энергия деформации балки.

В рассматриваемой задаче мы пользуемся приближенным вариационным уравнением Лагранжа. В этом случае, как известно, должны быть наперед удовлетворены геометрические соотношения между перемещениями точек оболочки. Статические условия для сил при этом выполняются приближенно из вариационного уравнения.

В нашем случае потенциальная энергия деформации балки может быть выражена такой формулой:

$$\Pi = -\frac{1}{2} \int_0^l \left[ \oint (E \varepsilon^2 \delta_e + G \gamma^2 \delta) ds + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 f_i \right] dz. \quad (2,21)$$

Работа внешних сил

$$A = M_k \theta + \int_0^l m \theta dz$$



или, имея в виду, что  $\theta(0) = 0$ , запишем выражение для  $A$  следующим образом:

$$A = \int_0^l (M_k \dot{\theta} + \int_0^z m \dot{\theta} dz) dz.$$

Принимая во внимание (2,21) и последнюю формулу, вариационное уравнение (2,20) можно расписать так\*:

$$\delta(A + \Pi) = \int_0^l (R_\beta \delta\beta + R_{\dot{\beta}} \delta\dot{\beta}) dz = 0, \quad (2,22)$$

где

$$R = M_k \dot{\theta} + \int_0^z m \dot{\theta} dz - \frac{1}{2} \left[ \oint (E \varepsilon^2 \delta_e + G \gamma^2 \delta) ds + \sum_{i=1}^n E \varepsilon_i^2 f_i \right]. \quad (2,23)$$

При вычислении вариации, как известно, интегрирует по частям второе слагаемое подинтегральной функции (2,21), полагают

$$[R_{\dot{\beta}} \delta\beta]_0^l = 0 \quad (2,24)$$

и, приравнявая нулю вариацию функционала, приходят в конечном счете к уравнению Эйлера:

$$R_\beta - \frac{d}{dz} R_{\dot{\beta}} = 0. \quad (2,25)$$

Для нашей задачи, имея в виду формулы (2,23), (2,12), (2,16) и (2,19), уравнение Эйлера, после выполнения несложных выкладок, выразится в форме обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\ddot{\beta} - \lambda^2 \beta = \kappa \psi, \quad (2,26)$$

где обозначено:

$$\lambda^2 = \frac{G}{E} \frac{I_t}{I_\omega}, \quad (2,27)$$

$$\kappa = \frac{\frac{\Omega^2}{p} - I_{rp}}{EI_r I_\omega}, \quad (2,28)$$

$$\psi = M_k + \int_0^l m dz, \quad (2,29)$$

$$I_t = \oint t^2 \delta ds, \quad (2,30)$$

$$I_\omega = \oint (\omega^*)^2 \delta_e ds + \sum_{i=1}^n (\omega_i^*)^2 f_i. \quad (2,31)$$

Общий интеграл дифференциального уравнения (2,26) имеет вид

$$\beta = C \operatorname{sh} \lambda z + D \operatorname{ch} \lambda z + \frac{\kappa}{\lambda} \int_0^z \psi \operatorname{sh}(z - \zeta) d\zeta. \quad (2,32)$$

Произвольные постоянные интегрирования  $C$  и  $D$  определяются из естественных граничных условий вариационного уравнения. Расписав соотношение (2,24), легко можно установить следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= 0 \text{ при } z = 0 \text{ и} \\ \dot{\beta} &= 0 \text{ при } z = l. \end{aligned} \right| \quad (2,33)$$

\* Здесь толщину оболочки  $\delta$  следует отличать от символа  $\delta$ , стоящего при соответствующих функциях и означающего вариацию.



Первое из этих условий выражает равенство нулю продольных перемещений по заделанному концу балки, а второе условие — равенство нулю нормальных напряжений на свободном торце.

Определив таким образом функцию  $\beta$ , мы можем вычислить все составляющие перемещений, деформаций и напряжений.

Запишем нормальные напряжения в обшивке  $\sigma$  и в стрингерах  $\sigma_i$ , выразив их через  $\beta$ . Для этого подставим (2,19) в (2,1).

$$\begin{aligned} \sigma &= -E\dot{\beta}\omega^*, \\ \sigma_i &= -E\dot{\beta}\omega_i^*. \end{aligned} \quad (2,34)$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, насколько полно в полученном решении удовлетворены исходные статико-геометрические соотношения теории оболочек.

Все геометрические соотношения и соотношения упругости были нами использованы и удовлетворены. Уравнения равновесия (1,8), (1,9) и (1,12) удовлетворяются выбором осевых перемещений по закону обобщенной главной секториальной площади согласно (2,7). Уравнение (1,10) нами также было выполнено.

При построении решения задачи дифференциальное уравнение равновесия элемента оболочки (1,11) не использовалось и поэтому удовлетворяется лишь приближенно на основе вариационного уравнения Лагранжа. Но вместо уравнения (1,11) точно удовлетворено соответствующее ему интегральное уравнение (1,12), которое записывает статическую уравновешенность осевых сил по всему сечению балки.

Как указывалось выше, невыполнение одного уравнения статики при решении в перемещениях безмоментной оболочки в общем случае неизбежно. Это тем более неизбежно для тонкостенных балок при приближенном решении, основанном на дополнительных деформационных гипотезах.

Заметим, что невыполнение уравнений (1,11) следует понимать не в смысле геометрической изменяемости элемента, а в том смысле, что компоненты напряжений определены не точно, а приближенно. Здесь мы наблюдаем явление, аналогичное тому, которое имеет место при решении рассматриваемой задачи в усилиях, но в последнем случае наблюдается невыполнение геометрических соотношений, то есть условий сплошности оболочки. Устранение этого недостатка возможно лишь на пути уточнения решения. Однако уточнение решения неизбежно усложняет его и затрудняет применение в инженерных расчетах.

Произведем теперь сравнение полученных нами формул для деформаций и напряжений с соответствующими формулами более общего метода Р. А. Ададунова.

По этому методу в случае одного кручения без изгиба относительный угол закручивания

$$\dot{\theta} = \frac{M}{GI_r} + \frac{\delta}{I_r} \cdot \oint \frac{\partial w}{\partial s} r ds. \quad (2,35)$$

Касательные напряжения

$$\tau = Gr\dot{\theta} + \frac{\partial w}{\partial s}$$

или, подставляя сюда  $\dot{\theta}$ , получим

$$\tau = \frac{Mr}{I_r} + G \left( \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\delta r}{I_r} \oint \frac{\partial w}{\partial s} r ds \right). \quad (2,36)$$

Нормальные напряжения

$$\sigma = E \frac{\partial w}{\partial z}.$$



В этих формулах  $\omega$  — функция, определяемая из интегро-дифференциального уравнения в частных производных. Для интегрирования этого уравнения выражают  $\omega$  в виде бесконечного ряда.

Из сопоставления формул (2,12) и (2,35), а также (2,17) и (2,36), мы видим, что первые члены в соответствующих формулах для  $\dot{\theta}$  и  $\tau$  в том и другом решениях совпадают. Эти члены в формулах являются основными. Они отвечают кручению балки без деформации. Вторые члены формул связаны с деформацией сечения. В методе Р. А. Ададунова деформация сечения выражена бесконечным рядом функций, в нашем решении — одной функцией. В этом и состоит приближенность и в то же время упрощение нашего решения по сравнению с решением Р. А. Ададунова.

Что же касается оценки точности полученного решения, то на основе общих формул об этом невозможно сделать заключения. Суждение по этому вопросу будет возможно лишь после анализа решений конкретных задач. Но в отношении касательных напряжений уже теперь можно заметить, что структура формулы (2,17) такова, что в сечении заделки, имея в виду, что  $\beta = 0$ , по этой формуле определяются касательные напряжения, полностью совпадающие с решением по более точному методу Р. А. Ададунова.

Выразим теперь компоненты напряжений и деформаций непосредственно через геометрические характеристики балки и составляющие внешней нагрузки.

Подставляя первое граничное условие (2,33) в (2,32), находим

$$D = 0.$$

Отсюда

$$\beta = C \operatorname{sh} \lambda z + \frac{z}{\lambda} \int_0^z \psi \operatorname{sh} \lambda (z - z_1) dz_1. \quad (2,37)$$

Вид произвольной постоянной  $C$  определяется по второму граничному условию (2,33) в зависимости от характера внешней нагрузки. Так, например, для консольной балки, загруженной сосредоточенным моментом  $M_k$  на свободном конце, имеем

$$C = -\frac{z}{\lambda} M_k \operatorname{th} \lambda l.$$

Подставляя это значение  $C$  в (2,31), определяем

$$\beta = \frac{z}{\lambda} M_k (\operatorname{ch} \lambda z - \operatorname{th} \lambda l \operatorname{sh} \lambda z - 1). \quad (2,38)$$

Продифференцируем (2,38) по  $z$

$$\dot{\beta} = \frac{z}{\lambda} M_k (\operatorname{sh} \lambda z - \operatorname{th} \lambda l \operatorname{ch} \lambda z). \quad (2,39)$$

Вводя последние два выражения в (2,12), (2,17) и (2,34), получим формулы для определения углов закручивания, касательных и нормальных напряжений, возникающих при стесненном кручении балки.

$$\dot{\theta} = \frac{M_k}{GI_r} \left[ 1 - G \frac{z}{\lambda} \left( \frac{Q^2}{p} - I_{rp} \right) (\operatorname{ch} \lambda z - \operatorname{th} \lambda l \operatorname{sh} \lambda z - 1) \right] \quad (2,40)$$

$$\tau = \frac{M_k r}{I_r} + G \frac{z t}{\lambda^2 I_r} (\operatorname{ch} \lambda z - \operatorname{th} \lambda l \operatorname{sh} \lambda z - 1). \quad (2,41)$$

$$\sigma = -E \frac{z}{\lambda} M_k \omega^* (\operatorname{sh} \lambda z - \operatorname{th} \lambda l \operatorname{ch} \lambda z),$$

$$\sigma_i = -E \frac{z}{\lambda} M_k \omega_i^* (\operatorname{sh} \lambda z - \operatorname{th} \lambda l \operatorname{ch} \lambda z). \quad (2,42)$$



Для достаточно длинных балок имеет место

$$\operatorname{th} \lambda l = 1.$$

В этом случае формулы (2,40) — (2,42) упрощаются и принимают вид:

$$\dot{\theta} = \frac{M_k}{GI_r} \left[ 1 - G \frac{z}{\lambda} \left( \frac{\Omega^2}{p} - I_{rp} \right) (e^{-\lambda z} - 1) \right], \quad (2,43)$$

$$\tau = \frac{M_k r}{I_r} + G \frac{\lambda t}{\lambda^2 I_r} (e^{-\lambda z} - 1), \quad (2,44)$$

$$\sigma = -E \frac{z}{\lambda} M_k \omega^* e^{-\lambda z},$$

$$\sigma_i = -E \frac{z}{\lambda} M_k \omega_i^* e^{-\lambda z}. \quad (2,45)$$

Из формулы (2,44) мы видим, что первым членом ее правой части записываются касательные напряжения, которые возникают в сечениях, остающихся плоскими. Вторым членом этой формулы выражаются касательные напряжения, которые связаны с деформацией поперечного сечения. В сечении заделки второй член формулы обращается в нуль.

Нормальные напряжения, согласно формуле (2,45), имеют максимальную величину в сечении заделки. С ростом координаты  $z$  они быстро убывают, стремясь к нулю. В достаточном удалении от заделки балка работает в условиях свободного кручения, при котором нормальные напряжения практически равны нулю.

### 3. Подкрепленная балка с обшивкой, не работающей на нормальные напряжения

При расчете конструкций, выполненных из тонкой обшивки, подкрепленной стрингерами, зачастую принимается такая расчетная схема, для которой предполагается, что нормальные напряжения воспринимаются только стрингерами, а обшивка работает на сдвиг и не воспринимает нормальных напряжений.

Полученные выше формулы для балок более общего вида в данном случае могут быть упрощены. Поскольку обшивка не воспринимает нормальных напряжений, — в этом случае  $E = 0$  и, следовательно,  $\delta_e = 0$ . Приравняв нулю  $\delta_e$  повсюду, где встречается эта величина, последовательно получим все необходимые для расчета формулы в том виде, в котором это удобно при данной расчетной схеме. При этом целесообразно все интегралы заменить суммами. За начало отсчета длины дуги и секториальной площади примем стрингер  $n$ .

Формула (2,8) для обобщенных главных секториальных площадей сохранит свой вид, но постоянная  $K$  будет выражаться проще

$$K = \frac{\sum_{i=1}^n (\omega_{oi} - \Omega S_i^*) f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}, \quad (3,1)$$

а  $\omega_{oi}$  удобнее вычислять в таблицах по формуле

$$\omega_{oi} = \sum_{j=1}^{j=i} \bar{\omega}_{oj}, \quad (3,2)$$

где  $\bar{\omega}_{oj}$  — удвоенная секториальная площадь  $j$  панели, подсчитанная с плюсом в центре изгиба.



Применяя уравнение равновесия (1,11), можно убедиться в том, что касательные напряжения  $\tau_i$  и погонные сдвигающие силы  $q_i = \tau_i \delta_i$  по ширине каждой  $i$  панели не меняются по величине.

Используя формулу (2,17), легко получаем следующее выражение для погонной сдвигающей силы в  $i$  панели.

$$q_i = \frac{b_i \bar{\omega}_i}{B_\omega} M - G_\beta t_i, \quad (3,3)$$

где обозначено:

$$B_\omega = \sum_{i=1}^n b_i \bar{\omega}_i^2, \quad (3,4)$$

$$b_i = \frac{\delta_i}{s_i}, \quad (3,5)$$

$$t_i = \frac{b_i \bar{\omega}_i}{B_\omega} \left( B_{\omega\omega_0} - \frac{\Omega^2}{\rho} \right) - \bar{\omega}_{0i} b_i + \frac{\xi}{\rho}, \quad (3,6)$$

$$B_{\omega\omega_0} = \sum_{i=1}^n b_i \bar{\omega}_i \bar{\omega}_{0i}, \quad (3,7)$$

$\bar{\omega}_i$  — удвоенная секториальная площадь  $i$  панели, подсчитанная для полюса в центре сдвига.

Относительный угол закручивания балки при этом выражается так:

$$\dot{\theta} = \frac{M}{GB_\omega} + \frac{\beta}{B_\omega} \left( B_{\omega_0} - \frac{\Omega^2}{\rho} \right), \quad (3,8)$$

где

$$B_{\omega_0} = \sum_{i=1}^n b_i \bar{\omega}_{0i}^2 \quad (3,9)$$

Нормальные напряжения в стрингерах будут определяться по второй формуле (2,34). Дифференциальное уравнение для определения функции  $\beta$  имеет форму (2,26), но коэффициенты его выразятся несколько иначе.

$$\lambda = \frac{G}{E} \frac{D_t}{I_\omega}, \quad (3,10)$$

$$D_t = \sum_{i=1}^n \frac{t_i^2}{b_i}, \quad (3,11)$$

$$\chi = \frac{\frac{\Omega^2}{\rho} - B_{\omega\omega_0}}{EI_\omega B_\omega}, \quad (3,12)$$

Вид  $\beta$  и  $\dot{\beta}$  останется прежний.

В заключение выпишем формулы для погонных касательных сил в  $i$  панели балки, защемленной с конца  $z = 0$  и нагруженной крутящим моментом на конце  $z = e$ .

$$q_i = \frac{b_i \bar{\omega}_i}{B_\omega} M_k + G \frac{t_i}{\lambda^2} M_k (e^{-\lambda z} - 1). \quad (3,13)$$

Нормальные напряжения в  $i$  стрингере при этом будут

$$\sigma_i = E \frac{\chi}{\lambda} M_k \omega_i^* e^{-\lambda z} \quad (3,14)$$

В формуле (3,13) первым членом правой части представлены погонные касательные силы, которые возникают в сечениях, остающихся плоскими.



Вторым членом правой части этой формулы выражены погонные сдвигающие силы, связанные с деформацией сечения. При этом в сечении заделки второй член обращается в нуль и по формуле (3,13) определяются погонные сдвигающие силы в точности совпадающие с таковыми, вычисленными по методу [6].

#### 4. Расчет балки прямоугольного профиля

В качестве примера рассмотрим балку прямоугольного профиля, изображенную на рис. 1. Толщина обшивки балки по всему контуру принята постоянной. Балка не имеет стрингеров и является частным видом балки, рассмотренной во втором параграфе. Поэтому полученные выше результаты остаются применимыми и в данном случае, но во всех формулах, в которые входят площади стрингеров, их следует полагать равными нулю, то есть  $f = 0$ . Кроме того, в нашем случае  $\delta_e = \delta$ . Поперечное сечение балки имеет размеры  $a$  и  $b$ . Для такой балки центр изгиба и центр сдвига совпадают и находятся на пересечении осей симметрии прямоугольника. Введем нумерацию панелей (как изображено на рис. 1). В этом случае по отдельным участкам контура имеем

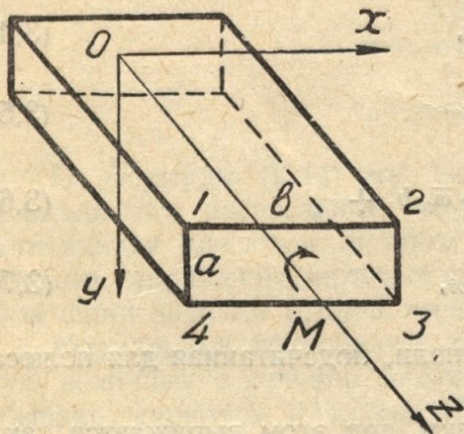


Рис. 1.

$$\rho = r, \quad r_{1-2} = r_{3-4} = \frac{a}{2}, \quad r_{2-3} = r_{4-1} = \frac{b}{2}. \quad (4,1)$$

По формулам (2.9) и (2.15) определяем:

$$\rho = \frac{2}{\delta} (a + b), \quad (4,2)$$

$$I_{rp} = I_r = \frac{\delta}{2} ab (a + b). \quad (4,3)$$

Удвоенная площадь поперечного сечения балки

$$\Omega = 2ab. \quad (4,4)$$

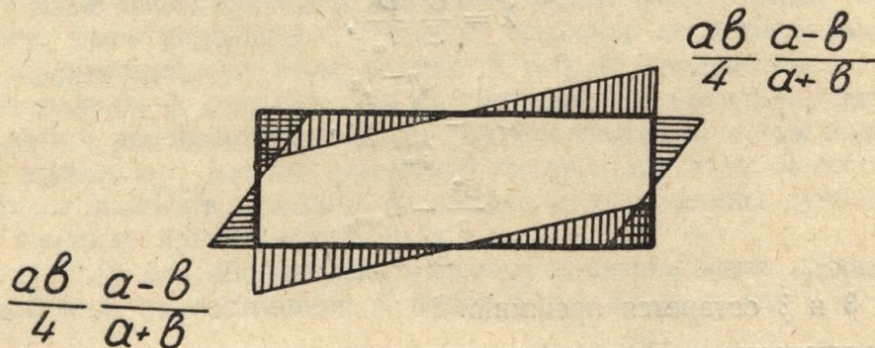


Рис. 2.

Подставляя эти выражения в формулу (2,18), получим

$$t_{1-2} = -t_{2-3} = t_{3-4} = -t_{4-1} = \frac{ab(b-a)}{(a+b)^2}. \quad (4,5)$$

Обобщенная главная секториальная площадь, определяемая в соответствии с формулой (2,7), меняется по контуру поперечного сечения по закону, изображенному на эпюре рис. 2 [4] (стр. 128).

$$\omega^* = \omega_0 - \Omega s^* - \frac{ab(a-b)}{4(a+b)}. \quad (4,6)$$



Имея выражения обобщенных координат  $t$  и  $\omega^*$ , применяя способ Верещагина без большого труда определим

$$I_t = \oint t^2 \delta ds = 2\delta a^2 b^2 \frac{(a-b)^2}{(a+b)^3},$$

$$I_\omega = \oint (\omega^*)^2 \delta ds = \frac{\delta a^2 b^2 (a-b)^2}{24(a+b)}.$$

Воспользовавшись полученными величинами, вычислим коэффициенты  $\lambda$  и  $\kappa$  по формулам (2,27) и (2,28).

$$\lambda = \sqrt{\frac{G}{E}} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{a+b}, \quad (4,7)$$

$$\kappa = -\frac{24}{E\delta a^2 b^2 (a+b)}. \quad (4,8)$$

Подсчитаем напряжения в балке, заделанной на одном конце и нагруженной моментом на другом. Подставляя выражения (4,1), (4,3), (4,5), (4,7) и (4,8) в формулу (2,44), определим величины касательных напряжений по панелям

$$\left. \begin{aligned} \tau_{1-2} = \tau_{3-4} \frac{M_k}{2\delta ab} \left( 1 + \frac{a-b}{a+b} e^{-\lambda z} \right), \\ \tau_{2-3} = \tau_{4-1} = \frac{M_k}{2\delta ab} \left( 1 - \frac{a-b}{a+b} e^{-\lambda z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4,9)$$

Нормальные напряжения получим, вводя (4,7) и (4,8) в (2,45)

$$\sigma = -\sqrt{\frac{E}{G}} \frac{2\sqrt{3}}{\delta a^2 b^2} \omega^* M_k e^{-\lambda z}. \quad (4,10)$$

Произведем теперь сравнение полученных формул для касательных и нормальных напряжений с соответствующими формулами, определяющимися при решении этой задачи по методу А. А. Уманского.

Касательные напряжения в последнем случае имеют вид [4]:

$$\tau = \frac{M_k}{2\delta ab} \left[ 1 - \frac{40(a+b)}{\delta ab(3a^2 + 2ab + 3b^2)} \bar{S}_\omega e^{-\lambda z} \right], \quad (4,11)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{40}{3a^2 + 2ab + 3b^2}, \quad (4,12)$$

$\bar{S}_\omega$  — обобщенный секториальный статический момент, изменяющийся по параболическому закону по каждой стороне прямоугольника сечения балки и определяющийся формулами:

а) для участков 1—2 и 3—4:

$$\bar{S}_\omega = -\frac{\delta a(a-b)}{4(a+b)}(bs - s^2) - \frac{\delta ab(a-b)^2}{48(a+b)}, \quad (4,13)$$

при  $0 < s < b$ ;

б) для участков 2—3 и 4—1:

$$\bar{S}_\omega = \frac{\delta b(a-b)}{4(a+b)}(as - s^2) - \frac{\delta ab(a-b)^2}{48(a+b)}, \quad (4,14)$$

при  $0 < s < a$ .

Нормальные напряжения при расчете данной балки по методу А. А. Уманского

$$\sigma = -\sqrt{\frac{E}{G}} \frac{2}{\delta a^2 b^2} \sqrt{\frac{10(a+b)^2}{3a^2 + 2ab + 3b^2}} \omega^* M_k e^{-\lambda z}. \quad (4,15)$$



Подсчитаем напряжения для балки, имеющей следующие соотношения модулей материала и сторон прямоугольника поперечного сечения:

$$\frac{E}{G} = 2,6; \quad \frac{b}{a} = \alpha = 3. \quad (4,16)$$

Касательные напряжения по методу А. А. Уманского

$$\tau = \frac{M_k}{6\delta a^2} \left( 1 + \frac{5}{54} S_\omega e^{-\lambda z} \right), \quad (4,17)$$

где

$$\begin{aligned} S_\omega &= \frac{2s^2}{a^2} - \frac{6s}{a} + 1 \text{ при } 0 < s < b, \\ S_\omega &= -\frac{6s^2}{a^2} + \frac{6s}{a} + 1 \text{ при } 0 < s < a. \end{aligned} \quad (4,18)$$

Касательные напряжения по нашему методу

$$\begin{aligned} \tau_{1-2} &= \frac{M_k}{6\delta a^2} \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda z} \right); \\ \tau_{2-3} &= \frac{M_k}{6\delta a^2} \left( 1 + \frac{1}{2} e^{-\lambda z} \right). \end{aligned} \quad (4,19)$$

Нормальные напряжения по методу А. А. Уманского

$$\sigma = -\frac{0,755}{\delta a^4} \omega^* M_k e^{-\lambda z}. \quad (4,20)$$

Нормальные напряжения по нашему методу

$$\sigma = -\frac{0,62}{\delta a^4} \omega^* M_k e^{-\lambda z}. \quad (4,21)$$

Корень характеристического уравнения стесненного кручения  $\lambda$ , характеризующий скорость затухания дополнительных напряжений, вызванных стеснением деформаций в заделке, по методу А. А. Уманского

$$a\lambda = 0,665. \quad (4,22)$$

Этот же корень по нашему методу

$$a\lambda = 1,07. \quad (4,23)$$

При решении рассматриваемой задачи по методу Р. А. Ададунова [4] (стр. 192) характеристические числа собственных функций разложения  $\omega$  в ряд имеют вид:

$$\lambda_n = \frac{\pi}{a+b} \gamma_n, \quad (4,24)$$

где  $\gamma_n \cong n$  и точнее определяется таблицей.

Первые два характеристические числа при условиях, принятых у нас,

$$\begin{aligned} a\lambda_1 &= \frac{\pi}{4} 0,918 = 0,72, \\ a\lambda_2 &= \frac{\pi}{4} 1,926 = 1,52. \end{aligned} \quad (4,25)$$

Сравнивая выражения (4,7) и (4,12), (4,9) и (4,11), (4,10) и (4,15), мы видим, что формулы нашего метода проще соответствующих формул метода А. А. Уманского.

Что касается величин напряжений, то для рассматриваемой задачи можно сделать следующие заключения.

Формулы (4,17) и (4,19) определяют различные величины касательных напряжений в сечении заделки как по величине, так и по закону распределения по контуру сечения. На рис. 3 изображена эпюра распре-



деления касательных напряжений, подсчитанных по формулам (4,17) и (4,19) для сечения заделки. При этом принято обозначение  $K = \frac{M_k}{12\delta a^2}$ . Сплошными линиями изображена эпюра касательных напряжений, подсчитанных по нашему методу. Результаты этого расчета совпадают с решением Р. А. Ададунова. Пунктирной линией изображено распределение касательных напряжений в сечении заделки, вычисленных по методу А. А. Уманского. Последнее решение отличается от решения по методу Р. А. Ададунова по меньшей стороне прямоугольника на 18—27%, а по большей стороне примерно в два раза.

В достаточном удалении от сечения заделки по формулам (4,17) и (4,19) получаются одинаковые величины касательных напряжений, совпадающие с напряжениями свободного кручения.

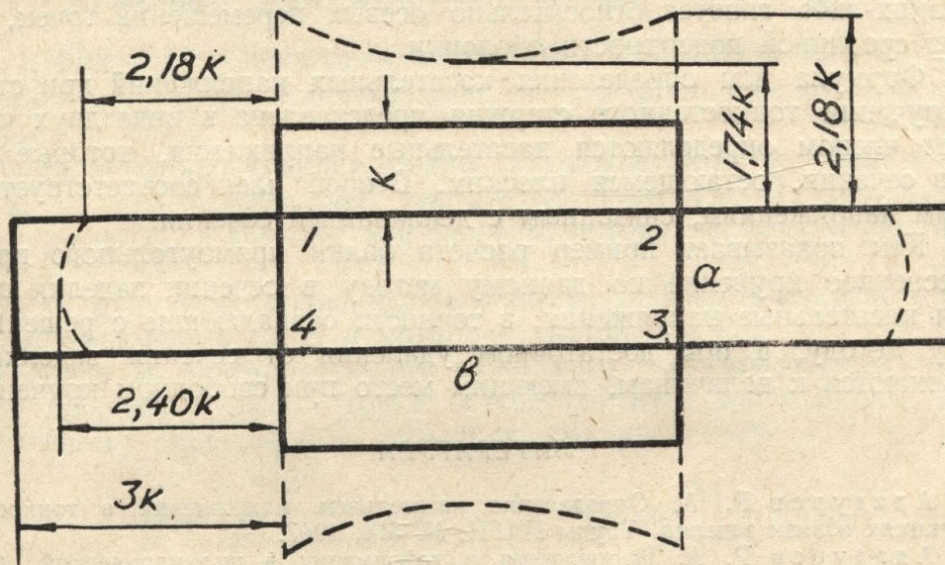


Рис. 3.

Нормальные напряжения выражаются формулами (4,20) и (4,21). Величины напряжений, вычисленные по этим формулам для сечения заделки, отличаются на постоянный множитель. Причем по методу А. А. Уманского получаются напряжения на 18% больше по сравнению с нормальными напряжениями, подсчитанными по нашему методу.

Величина касательных и нормальных напряжений в районе заделки в значительной мере определяется значением коэффициента  $\lambda$ , являющегося корнем характеристического уравнения стесненного кручения (2,26). Из сопоставления формул (4,22)—(4,25) можно сделать заключение о том, что корень характеристического уравнения  $\lambda$  метода А. А. Уманского оказывается меньше минимального характеристического числа решения задачи по методу Р. А. Ададунова. В нашем методе корень характеристического уравнения по своей величине лежит между первым и вторым минимальными характеристическими числами решения Р. А. Ададунова.

Кроме того, у нас самая формула для определения коэффициента  $\lambda$  имеет тот же вид, что и в методе Р. А. Ададунова, так как выражение (4,7) можно представить в форме аналогичной (4,24), а именно:

$$\lambda = \frac{\pi}{a+b} 1,37.$$

Это свидетельствует о том, что полученное нами решение достаточно близко к тем двум членам решения Р. А. Ададунова, которым соответствуют два минимальные собственные числа.



## ВЫВОДЫ

1. В целях уточнения и упрощения касательных напряжений в зоне заделки при расчете на стесненное кручение тонкостенной балки прикладным методом, касательные напряжения целесообразно определять не из условия равновесия элементарных площадок оболочки, а из геометрических соотношений деформированного состояния оболочки, решая задачу в перемещениях.

2. Исходя из такого положения, в настоящей работе построен метод расчета тонкостенной балки на стесненное кручение. По этому методу в сечении заделки определяются касательные напряжения, которые точно совпадают с величинами касательных напряжений, определяющихся по общему методу, то есть по такому методу, который построен без использования каких-либо гипотез относительно осевых перемещений точек, лежащих на срединной поверхности оболочки.

3. Формула для определения касательных напряжений при стесненном кручении тонкостенного стержня представлена в виде двух членов. Первым членом определяются касательные напряжения, которые возникают в сечении, остающемся плоским. Вторым членом соответствует касательным напряжениям, связанным с деформацией сечения.

4. Как показывает пример расчета балки прямоугольного профиля на стесненное кручение по данному методу в сечении заделки определяются касательные напряжения, в точности совпадающие с решением по общему методу, а при достаточном удалении от сечения заделки они приближаются к величинам, имеющим место при свободном кручении.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ададуров Р. А. Определение касательных напряжений в тонкостенных конструкциях вблизи заделки. Труды ЦАГИ, № 614, 1947.
2. Ададуров Р. А. Напряжения и деформации в цилиндрической оболочке с жестким поперечным сечением. ДАН, 62, № 2, 1948.
3. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. ГИТТЛ, 1953.
4. Джанелидзе Г. Ю. и Пановко Я. Г. Статика упругих тонкостенных стержней. Госстройиздат, 1948.
5. Зайцев В. Н. Напряженное состояние тонкостенных цилиндрических конструкций. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук, 1951.
6. Одинокоев Ю. Г. Расчет тонкостенных конструкций типа крыла, фюзеляжа и оперения самолетов. Труды КАИ, XVIII, 1946.
7. Уманский А. А. Кручение и изгиб тонкостенных авиаконструкций. Оборонгиз, 1939.
8. Уманский А. А. О нормальных напряжениях при кручении крыла самолета. Техника воздушного флота, № 12, 1940.