УДК 539.3

Синюков В.П.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПРИВЕДЕННЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СОТОВОГО ЗАПОЛНИТЕЛЯ

В современной технике большое распространение получили различного рода жесткие и легкие заполнители, структура которых представляет собой периодически повторяющуюся ячейку - представительный элемент (ПЭ). К ним относятся сотовые заполнители (СЗ), заполнители со сплошными и полыми сферическими включениями и т.д.

На этапе проектирования конструкции с заполнителем перед конструктором стоит задача оптимального выбора его структуры, исходя из требований, предъявляемых к проектируемой конструкции. При этом конструктор оперирует интегральными (приведенными) механическими характеристиками (ПМХ) заполнителя как некоторой, в общем случае анизотропной, сплошной среды. В связи с этим представляется актуальной постановка задачи вычисления ПМХ, исходя из механических и геометрических характеристик ПЭ СЗ.

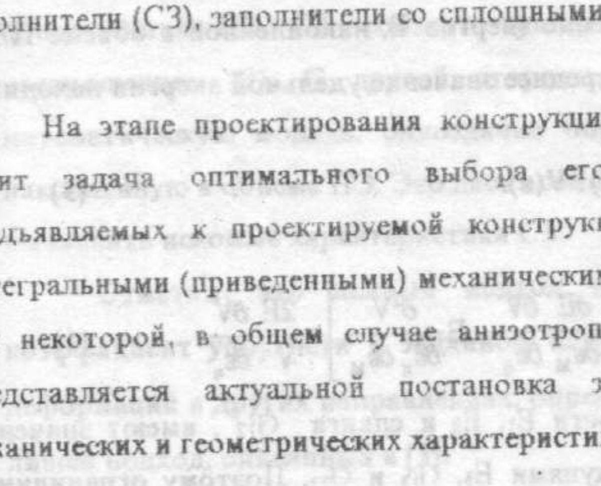

Рис. 1

Рассмотрим ПЭ СЗ толщиной h и объемом V. Отнесем его к прямоугольной декартовой системе координат XYZ (см. Рис.1).

Введем основное допущение:

В процессе деформации СЗ ведет себя как некоторая нелинейно-упругая среда, подчиняющаяся в окрестности каждой точки диаграммы "напряжение-деформация" закону Гука для линейно-упругого тела.

Используя это допущение, можно записать:

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}\varepsilon_{ijkl}, \qquad (1)$$

где обозначено:

σ_{ij} - тензор напряжений,

ε_{kl} - тензор деформаций,

A_{ijkl} - тензор коэффициентов упругости.

В выражении (1) используется обычное соглашение о суммировании по повторяющемуся индексу.

Из теории упругости [1] известно:

$$A_{ijkl} = \frac{\partial^2 e}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}, \tag{2}$$

здесь e представляет собой удельную энергию деформации.

Допустим, что построив некоторую математическую модель ПЭ СЗ, мы имеем возможность вычислять абсолютное значение энергии E, накопленной в объеме ПЭ V при заданном тензоре деформации. Тогда среднее значение удельной энергии находится отношением:

$$e(\varepsilon) = E(\varepsilon) / V(\varepsilon). \tag{3}$$

С учетом (3) выражение (2) принимает вид:

$$A_{ijkl} = \frac{1}{V}\frac{\partial^2 E}{\partial \varepsilon_{ij}\,\partial \varepsilon_{kl}} - \frac{1}{V^2}\left[\frac{\partial E}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{kl}} + \frac{\partial E}{\partial \varepsilon_{kl}}\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{ij}} - E\frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_{ij}\,\partial \varepsilon_{kl}}\right] + \frac{2E}{V^3}\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{ij}}. \tag{4}$$

Как показано в [2], модули упругости E_1, E_2 и сдвига G_{12}, имеют значения пренебрежимо малые по сравнению с модулями E_3, G_{13} и G_{23}. Поэтому ограничимся определением только последних трех характеристик.

Кроме того, в предположении несжимаемости СЗ, второй и третий члены в выражении (4) становятся равными нулю. В результате формула (4) принимает вид:

$$A_{ijkl} = \frac{1}{V}\frac{\partial^2 E}{\partial \varepsilon_{ij}\,\partial \varepsilon_{kl}}. \tag{5}$$

Согласно [1], искомые технические упругие постоянные связаны с компонентами тензора упругости A_{ijkl} следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} E_3 &= A_{3333}, \\ G_{13} &= A_{1313}, \\ G_{23} &= A_{2323}. \end{aligned} \tag{6}$$

Таким образом, задавшись тензором деформации и используя принятую математическую модель, становится возможным вычисление искомых характеристик.

Как показано в [3], в силу нелинейного поведения пластин ПЭ при деформировании, построение математической модели, позволяющей в аналитическом виде выразить энергию E через тензор деформаций, становится невозможным. Это приводит к необходимости привлечения численных методов для решения поставленной задачи. В этом случае производные, входящие в выражения (4) и (5), могут быть вычислены при помощи конечных разностей в координатах ($\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}$).

Используя предположения [3] о параллельности поверхностей Z=0 и Z=h (рис.1) при сдвигах $\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}$ и удлинении ε_{33} в процессе деформирования, можно записать следующее приближенное выражение:

$$\varepsilon_{i3} = \frac{u_i^{(h)} - u_i^{(0)}}{h}, \ (i=1,2,3); \qquad (7)$$

где $u_i^{(a)}$ - перемещение поверхности Z=a вдоль направления i.

Таким образом, задаваясь перемещениями верхней (Z=h) и нижней (Z=0) поверхностей ПЭ СЗ, соответствующие приведенные деформации определяются соотношением (7). С другой стороны, заданные перемещения, через принятую математическую модель, однозначно определяют энергию деформации пластин Е, накопленную в объеме ПЭ. Это даст возможность, воспользовавшись соотношением (5), вычислить искомые характеристики СЗ.

Отметим, что данный подход позволяет определить не только искомый коэффициент упругости в заданном направлении, но и степень его зависимости от деформаций в других направлениях, определяемых значениями A_{ijkl} ($i \neq k$ и $j=l$), чего был лишен подход, описанный в [3].

Литература

1. Duvaut Georges, "Mecanique des milieux continus".-Paris: Maçon, 1992, - 320 p.

2. Сливинский В.И., Контсруктивно-технологические решения и технология производства сотов с регулируемыми механическими характеристиками и сотовых конструкций для летательных аппаратов.: Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук.- Харьков: ХАИ, 1992 г., 340с.

3. Синюков В.П., Сливинский В.И. Определение механических характеристик сотового заполнителя с ячейкой общего вида из композиционных материалов. - Материалы XIII научно-технической конференции "Конструкции и технология получения изделий из неметаллических материалов". - Обнинск, ОНПО "Технология", 24-26 ноября 1992 года.