Выпуск 16 1955

Канд. физико-матем. наук, доцент ***М. Н. Тихов***

ОБОБЩЕННАЯ КРАЕВАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Рассмотрим проблему существования и устойчивости обобщенного решения смешанной задачи для уравнения Лапласа в случае произвольной плоской области D со спрямляемым контуром Γ при смешанных граничных условиях, заданных в классе суммируемых функций L.

Нами доказаны следующие результаты.

Лемма 1.

Для любых функций $F \in L$ и $\Phi_0 \in L$ смешанная задача при граничных условиях:

$$\frac{\partial \Phi(x,0)}{\partial n} = 0,$$

$$\Phi(R, z) = \Phi_0(z),$$

$$\frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial n} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi(0, z)}{\partial n} = F(z),$$

заданных на границе Γ прямоугольной области R:

$$0 < x < R$$

$$0 < z < h$$

допускает единственное ограниченное решение Φ, сколько угодно раз в открытой области R дифференцируемое по x и z, причём почти везде на сторонах $[0, z]$ и $[R, z]$ соответственно имеют место условия:

$$\lim_{(x,\ z) \xrightarrow{c} (0,\ z)} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = F(z),$$

$$\lim_{(x,\ z) \xrightarrow{c} (0,\ z)} \Phi = \Phi_0(z),$$

где c — произвольный некасательный к границе Γ путь, идущий изнутри прямоугольника R в точки, лежащие на сторонах $[0, z]$ и $[R, z]$, $\frac{\partial}{\partial n}$ производная по нормали.

Лемма 2.

Если функции $F_1 \in L$, $\Phi_0^{(1)} \in L$ и $F_2 \in L$, $\Phi_0^{(2)} \in L$, то возможно каждому произвольному положительному числу ε поставить в соответствие такое положительное число δ, зависящее от ε так, что из условий

$$\frac{1}{h}\int_0^h |F_2 - F_1|\, dz < \delta$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h |\Phi_0^{(2)} - \Phi_0^{(1)}|\, dz < \delta$$

будут следовать условия: для открытой области R

$$|\Phi_2 - \Phi_1| < \varepsilon$$

и соответственно на сторонах $[0, z]$, $[R, z]$:

$$\int\limits_0^h \left| \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \right| dz < \varepsilon$$

$$\int\limits_0^h |\Phi_2 - \Phi_1|\, dz < \varepsilon.$$

где через Φ_1 и Φ_2 обозначены обобщенные решения смешанной задачи при соответственно заданных функциях F_1, $\Phi_0^{(1)}$ и F_2, $\Phi_0^{(2)}$ и где интегралы берутся в смысле Лебега.

Лемма 3.

Пусть задана последовательность $\{\Phi_m\}$ гармонических функций Φ_m, определенных в области R и удовлетворяющих на сторонах $[x, 0]$ и $[x, h]$ соответственно граничным условиям:

$$\frac{\partial \Phi_m(x, 0)}{\partial n} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_m(x, h)}{\partial n} = 0.$$

Если на стороне $[0, z]$ последовательность $\left\{\frac{\partial \Phi_m}{\partial n}\right\}$ производных $\frac{\partial \Phi_m(0, z)}{\partial n} \in L$ заданных функций Φ_m и на стороне $[R, z]$ последовательность $\{\Phi_m\}$ этих функций $\Phi_m(R, z) \in L$ сходятся в среднем, то в открытой области R равномерно:

$$\Phi_m \to \Phi$$

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial x} \to \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial z} \to \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

на стороне $[0, z]$ почти везде

$$\Phi_m \to \Phi$$

и в среднем

$$\int\limits_0^h \left| \frac{\partial \Phi_m}{\partial n} - \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right| dz \to 0$$

и на стороне $[R, z]$ в среднем

$$\int\limits_0^h |\Phi_m - \Phi|\, dz \to 0,$$

где через Φ обозначена предельная функция в области $R + \Gamma$ для последовательности $\{\Phi_m\}$, интегралы берутся в смысле Лебега.

Теорема.

Пусть D произвольная односвязная или конечносвязная область, граница Γ которой есть произвольная спрямляемая замкнутая кривая, и пусть на участках Γ^* и Γ^{**} ($\Gamma = \Gamma^* + \Gamma^{**}$, $\Gamma^* = \sum \Gamma_m^*$, $\Gamma^{**} = \sum \Gamma_e^{**}$) границы Γ заданы соответственно условию:

$$\frac{\partial \Phi_{\Gamma^*}}{\partial n} = F$$

$$\Phi_{\Gamma^{**}} = \Phi_0.$$

Если $F \in L$ и $\Phi_0 \in L$, то смешанная задача для уравнения Лапласа допускает единственное ограниченное обобщенное решение.

Области, составленные из сумм $\sum^k R_i$ прямоугольников R_i, назовем областями класса S, если, во-первых, соответственно стороны всех прямоугольников R_i параллельны между собой и, во-вторых, любые два смежные прямоугольника R_i и R_{i+1} имеют либо общую сторону, либо, по крайней мере, общую часть двух сторон.

Очевидно, применяя последовательно к каждому прямоугольнику R_i методы решения обобщенных смешанных задач, построенные нами при доказательстве приведенных лемм, и обобщая процесс Шварца мы построим обобщенное решение смешанной задачи для любой области класса S; при этом, во-первых, мы будем всегда начинать с построения решения для прямоугольника R_k, затем переходить к построению решения для прямоугольников $R_k + R_{k-1}$ и т. д. и, во-вторых, на общих сторонах или их общих частях смежных прямоугольников R_i и R_{i+1} мы будем принимать общие значения либо для самой функции, либо для производной по нормали (в соответствии с особенностями постановки задачи).

Построим на всей плоскости непрерывные подстилающие функции $\varphi_1(p)$ и $\varphi_2(p)$, значения которых на границе Γ соответственно почти всюду совпадают с данными функциями $F \in L$ на Γ^* и $\Phi_0 \in L$ на Γ^{**}, что, как известно (по теореме Лузина о строении измеримых функций), каково бы ни было $\delta > 0$, всегда возможно:

$$\frac{\partial \Phi_{\Gamma^*}}{\partial n} = F = \varphi_1(p_{\Gamma^*}), \ \operatorname{mes} E_1 \left\{ \frac{\partial \Phi_{\Gamma^*}}{\partial n} \neq \varphi_1 \right\} < \delta$$

$$\Phi_{\Gamma^{**}} = \Phi_0 = \varphi_2(p_{\Gamma^{**}}), \ \operatorname{mes} E_2 \{ \Phi_{\Gamma^{**}} \neq \varphi_2 \} < \delta,$$

где p, p_{Γ^*}, $p_{\Gamma^{**}}$ — обозначают точки, лежащие соответственно на плоскости, контуре Γ^* и контуре Γ^{**}.

Приведенные леммы позволяют обобщить процесс Винера, обычно применяемый к задаче Дирихле, на случай обобщенной смешанной задачи и завершить, таким образом, доказательство теоремы.

Полученные теоремы дают возможность обосновать и фактически получить приближенное решение одной задачи об установившемся движении тяжелой несжимаемой жидкости в неизменяемой пористой среде к галерее с прямой щелью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лузин Н. Н. Интеграл и тригонометрический ряд. Под редакцией Н. К. Бари и Д. Е. Меньшова, ГИЗ, ТТЛ, 1951.

2. Келдыш М. Н. О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле. Журнал «Успехи математических наук», вып. 8, 1941.

3. Толстов Г. П. Об ограниченных функциях, удовлетворяющих уравнению Лапласа. Математический сборник, т. 29 (1), № 3, 1951.