МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

АДАПТАЦІЙНИЙ КУРС ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2011

УДК 51(075.8)
А31

Автори:

О.Г. Ніколаєв, К.П. Барахов, І.В. Брисіна, О.В. Головченко, Н.В. Драшпуль,
Т.В. Рвачова, Є.П. Томілова, В.В. Хоменко, Ю.А. Щербакова

Рецензенти: канд. фіз.-мат. наук, доц. О.В. Макарічев,
канд. фіз.-мат. наук, доц. В.О. Афанасьєв

Адаптаційний курс елементарної математики [Текст]: навч. посіб.
А31 / О.Г. Ніколаєв, К.П. Барахов, І.В. Брисіна та ін.– Х.: Нац. аерокосм. ун-т ім. М.Є. Жуковського «Харк. авіац. ін-т», 2011. - 64 с.

Навчальний посібник складено з розділів шкільної програми з математики, які використовуються в курсі вищої математики. Наведено велику кількість змістовних прикладів і задач для самостійного розв'язання.

Для студентів першого курсу всіх напрямів підготовки. Може бути корисним слухачам фізико-математичної школи та учням ліцею.

УДК 51(075.8)

Іл. 47. Табл. 7. Бібліогр.: 5 назв

ЗМІСТ

Розділ 1. АЛГЕБРАЇЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

1.1. Многочлени від однієї змінної. Ділення многочленів з остачею. Теорема Безу

Загальний вигляд многочлена:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

де P – ім'я; n – степінь; x – аргумент; $a_i(i = \overline{0,n})$ – коефіцієнт; a_0 – старший коефіцієнт (якщо $a_0 = 1$ – многочлен зведений); a_0x^n – старший член; a_n – вільний член.

Зв'язок між компонентами при діленні многочленів:

$$\underbrace{P_n(x)}_{\text{ділене}} = \underbrace{\overline{P_k}(x)}_{\text{дільник}} \cdot \underbrace{Q_{n-k}(x)}_{\text{частка}} + \underbrace{R_s(x)}_{\text{остача}}.$$

Завжди $s < k$; якщо $R_s(x) = 0$, то многочлен $P_n(x)$ ділиться на многочлен $\overline{P_k}(x)$ (пишуть $P_n(x) \vdots \overline{P_k}(x)$). Зокрема, $P_n(x) = (x-a)Q_{n-1}(x) + R$, де R – число; якщо $R = 0$, то $P_n(x) \vdots (x-a)$.

Теорема Безу. Остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на $x-a$ дорівнює значенню многочлена при $x = a\,(R = P_n(a))$.

Теорема (ознака подільності многочлена на $x-a$). Для подільності многочлена $P_n(x)$ на $x-a$ необхідно і достатньо, щоб a було коренем многочлена $P_n(x)$, тобто $P_n(a) = 0$.

Висновок. Якщо $x_1, x_2, \ldots, x_k$ $(k < n)$ - корені многочлена $P_n(x)$, то $P_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)Q_{n-k}(x)$, де $Q_{n-k}(x)$ – многочлен степеня $n-k$; a_0x^{n-k} – його старший член.

Приклад 1.1. Розділити многочлен $P_4(x) = 3x^4 - 2x + 3 - 4x^2 + x^3$ на многочлен $P_2(x) = 5 - 2x + x^2$.

Розв'язання. Зобразимо ці многочлени в канонічних формах:

$$P_4(x) = 3x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 3,\ \ P_2(x) = x^2 - 2x + 5.$$

Виконаємо ділення стовпчиком:

$$\begin{array}{l|l}
3x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 3 & x^2 - 2x + 5 \\
\underline{-\,3x^4 - 6x^3 + 15x^2} & \overline{3x^2 + 7x - 5} \\
\qquad 7x^3 - 19x^2 - 2x + 3 & \\
\qquad \underline{-\,7x^3 - 14x^2 + 35x} & \\
\qquad\qquad -5x^2 - 37x + 3 & \\
\qquad\qquad \underline{-\,(-5x^2 + 10x - 25)} & \\
\qquad\qquad\qquad -47x + 28. &
\end{array}$$

Частка – $Q_2(x) = 3x^2 + 7x - 5$, остача – $R_1(x) = -47x + 28$.

Зауваження. Справедливі рівності

$3x^4+x^3-4x^2-2x+3=\left(x^2-2x+5\right)\left(3x^2+7x-5\right)-47x+28$, або

$\frac{3x^4+x^3-4x^2-2x+3}{x^2-2x+5}=3x^2+7x-5+\frac{-47x+28}{x^2-2x+5}$.

Розглянемо ділення многочленів від декількох аргументів. Виберемо один із цих аргументів і умовно будемо вважати многочлени залежними тільки від цього аргументу, інші аргументи умовно о вважатимемо параметрами. Запишемо многочлени в канонічних формах і виконаємо ділення стовпчиком.

Приклад 1.2. Розділити многочлен $P'(x,y,z)=x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+$ $+yz^2+3xyz$ на многочлен $P''(x,y,z)=xy+xz+yz.$

Розв'язання. Будемо вважати ці многочлени многочленами відносно аргументу x. Запишемо їх в канонічних формах:

$$P'(x,y,z)=P_2(x)=(y+z)x^2+\left(y^2+3yz+z^2\right)x+y^2z+yz^2,$$

$$P''(x,y,z)=P_1(x)=(y+z)x+yz;$$

$$\begin{array}{r|l}
_{-}\begin{array}{l}(y+z)x^2+(y^2+3yz+z^2)x+y^2z+yz^2\\(y+z)x^2+xyz\end{array} & \underline{(y+z)x+yz}\\
\hline
_{-}\begin{array}{l}(y^2+2yz+z^2)x+y^2z+yz^2\\(y^2+2yz+z^2)x+y^2z+yz^2\end{array} & x+y+z\\
\hline
0. &
\end{array}$$

Частка – $Q(x,y,z)=x+y+z,$ остача – $R(x,y,z)=0.$

Розглянемо ділення многочлена на двочлен $x-a.$

Приклад 1.3. Знайти остачу від ділення многочлена $P_3(x)=4x^3+5x-36$ на $x-2.$

Розв'язання. За теоремою Безу $R=P_3(2)=32+10-36=6.$

Приклад 1.4. Перевірити подільність многочлена $P_3(x)=x^3+x^2-4x-4$ на $x-1,\ x+1,\ x-2,\ x+2,\ x+3.$

Розв'язання. Оскільки $P_3(1)=-6\neq 0,$ то $P_3(x)$ не ділиться на $x-1.$ Далі $P_3(-1)=0 \Rightarrow P_3(x)\vdots(x+1); P_3(2)=0 \Rightarrow P_3(x)\vdots(x-2); P_3(-2)=0 \Rightarrow P_3(x)\vdots(x+2);$ $P_3(-3)=-10\neq 0 \Rightarrow$ $P_3(x)$ не ділиться на $x+3$.

Зауваження. Справедлива рівність $P_3(x)=(x+1)(x-2)(x+2).$

Завдання для самостійної роботи

1.01. Розділити многочлен $5x^4-3x^5+3x-1$ на многочлен $1+x-x^2.$

1.02. Розділити многочлен $1-x-5x^2+x^3+2x^4$ на многочлен $x^2-x.$

1.03. Многочлен $x^4+3x^3+ax^2+bx$ ділиться на многочлен $2x^2-4x.$ Знайти a і b.

1.04. Многочлен $x^4+6x^3+3x^2+ax+b$ ділиться на многочлен $x^2+4x+3.$ Знайти a і b.

1.05. Розділити $2x^3+2x^2y-4xz^2+x^2z+xyz-2z^3$ на $2x+z$.

1.06. Розділити $x^3+2y^3-3xy^2$ на $(x-y)^2$.

1.07. Знайти остачу від ділення многочлена $2x^3-x^2-5x+4$ на: $1) x-3; \quad 2) x+2$.

1.08. Знайти остачі від ділення многочлена $2x^4-4x^3-x+1$ на: $1)\ x+2; \quad 2)\ x-1$.

1.09. Чи ділиться многочлен x^3-3x^2-x+3 на:
$1)\ x-1; \quad 2)\ x-2; \quad 3)\ x-3; \quad 4)\ x+1; \quad 5)\ x+2; \quad 6)\ x+3?$

1.10. Чи ділиться многочлен x^3+x^2-4x-4 на:
$1)\ x-1; \quad 2)\ x-2; \quad 3)\ x-3; \quad 4)\ x+1; \quad 5)\ x+2; \quad 6)\ x+3?$

1.2. Корені многочлена. Теорема Вієта

Теорема (про раціональні корені многочлена). Якщо раціональне число $\dfrac{l}{m}$ (l, m – цілі взаємно прості числа) – корінь многочлена $P_n(x)$ з цілими коефіцієнтами, то l – дільник вільного члена, m – дільник старшого коефіцієнта.

Висновок 1. Раціональні корені зведеного многочлена – цілі.

Висновок 2. Цілі корені – дільники вільного члена.

Теорема Вієта. Якщо $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ - корені многочлена $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$, то

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+...+x_n=-\dfrac{a_1}{a_0}, \\ x_1x_2+x_2x_3+...+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_2}{a_0}, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ., \\ x_1x_2x_3\cdots x_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0}. \end{cases}$$

При $n=2$ одержимо многочлен $P_2(x)=ax^2+bx+c$, і для його коренів x_1, x_2 справедливо, що

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Для зведеного многочлена $P_2(x)=x^2+px+q$ будемо мати

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1x_2=q. \end{cases}$$

Приклад 1.5. Знайти корені многочлена $P_4(x)=2x^4+x^3+9x^2+5x-5$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку раціональні корені. Оскільки $-5\vdots\pm1,\pm5;\ 2\vdots\pm1,\pm2,$ то раціональними коренями можуть бути тільки числа $\pm1,\pm5,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{5}{2}.$

Одержані числа перевіряємо на можливість бути коренями многочлена: $P_4(1)=12,\ P_4(-1)=0,$ отже, $x=1$ не є корінь, а $x=-1$ – корінь многочлена.

Розділимо многочлен на $x+1$ (кажуть: виділимо корінь $x=-1$):

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l}2x^4+x^3+9x^2+5x-5\\ 2x^4+2x^3\end{array} & \begin{array}{l}x+1\\ \hline 2x^3-x^2+10x-5\end{array}\\
\hline
-\begin{array}{l}-x^3+9x^2+5x-5\\ -x^3-x^2\end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{l}10x^2+5x-5\\ 10x^2+10x\end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{l}-5x-5\\ -5x-5\end{array} & \\
\hline
0. &
\end{array}
$$

Задачу зведено до знаходження коренів многочлена $\overline{P_3}(x)=2x^3-x^2+10x-5.$ Якщо крайні коефіцієнти одержаного многочлена прості, то складають нову послідовність чисел, які можуть бути коренями. Одне і те ж число може бути коренем декілька раз, тому перевіримо: $\overline{P_3}(-1)=-18,$ отже, $x=-1$ є коренем тільки один раз. Продовжимо перевірку інших чисел: $\overline{P_3}(5)=260,\ \overline{P_3}(-5)=-320,\ \overline{P_3}(\frac{1}{2})=0.$ Виділимо знайдений корінь $x=\frac{1}{2}$:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l}2x^3-x^2+10x-5\\ 2x^3-x^2\end{array} & \begin{array}{l}x-\frac{1}{2}\\ \hline 2x^2+10\end{array}\\
\hline
-\begin{array}{l}10x-5\\ 10x-5\end{array} & \\
\hline
0. &
\end{array}
$$

Одержаний многочлен $\overline{\overline{P_2}}(x)=2x^2+10$ коренів не має. Корені цього многочлена: $-1;\ \frac{1}{2}.$

Приклад 1.6. Знайти корені многочлена $x^4-2x^3-11x^2+12x+36.$

Розв'язання. Оскільки многочлен зведений, то його раціональні корені – цілі. Цілі корені – дільники вільного члена, а саме: $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm9,\pm12,\pm18,\pm36.$ Маємо:

$$P_4(x)=x^4-2x^3-11x^2+12x+36,\ P_4(1)=36,\ P_4(-1)=16,\quad P_4(2)=16,\ P_4(-2)=0;$$

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} x^4-2x^3-11x^2+12x+36 \\ x^4+2x^3 \end{array} & \begin{array}{l} x+2 \\ \hline x^3-4x^2-3x+18 \end{array} \\
\hline
-\begin{array}{l} -4x^3-11x^2+12x+36 \\ -4x^3-8x^2 \end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{l} -3x^2+12x+36 \\ -3x^2-6x \end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{l} 18x+36 \\ 18x+36 \end{array} & \\
\hline
0, &
\end{array}
$$

$\overline{P_3}(x)=x^3-4x^2-3x+18,$ претендентів на корені стало менше: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 18.$

Вилучені раніше числа перевіряти не треба, а $x=-2$ потрібно перевірити ще раз: $\overline{P_3}(-2)=0,$

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} x^3-4x^2-3x+18 \\ x^3+2x^2 \end{array} & \begin{array}{l} x+2 \\ \hline x^2-6x+9 \end{array} \\
\hline
-\begin{array}{l} -6x^2-3x+18 \\ -6x^2-12x \end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{l} 9x+18 \\ 9x+18 \end{array} & \\
\hline
0. &
\end{array}
$$

Отже, $x_1=-2, x_2=-2.$

Після знаходження кратного кореня -2 одержимо рівняння $x^2-6x+9=0.$ Розв'язуючи його, знаходимо $x_3=x_4=3.$

Завдання для самостійної роботи

1.11. Розв'язати квадратні рівняння за теоремою Вієта:

1) $x^2-x-6=0;$ 2) $x^2+3x-10=0;$ 3) $x^2-8x+15=0;$ 4) $x^2+6x+8=0;$

5) $x^2-x-2=0;$ 6) $x^2-2x-15=0;$ 7) $x^2-10x+21=0;$ 8) $x^2+11x+18=0.$

1.12. Знайти дійсні корені многочленів:

1) $P_3(x)=2x^3+3x^2-11x-6;$ 2) $P_4(x)=2x^4+5x^3-13x^2-25x+15;$

3) $P_3(x)=3x^3-4x^2-17x+6;$ 4) $P_4(x)=2x^4-3x^3-8x^2+9x+6.$

1.13. Розв'язати рівняння в області дійсних чисел:

1) $x^4+2x^3-25x^2-26x+120=0;$ 2) $6x^5+19x^4+7x^3-13x^2+x-6=0;$

3) $x^4+x^3-16x^2-4x+48=0;$ 4) $6x^5+11x^4+20x^3+40x^2-16x-16=0.$

1.3. Елементарні формули алгебри. Спрощення алгебраїчних виразів. Раціональні дроби. Розкладання правильних раціональних дробів на прості дроби

Означення 1. Дріб вигляду $\dfrac{P_m(x)}{\overline{P}_n(x)}$, де $P_m(x), \overline{P}_n(x)$ – многочлени, називається раціональним; якщо $m<n$, то раціональний дріб є правильним.

Означення 2. Раціональні дроби $\frac{A}{x-a}$, $\frac{A}{\left(x-a\right)^k}$, $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, де $A,B,a,p,q\in R,\ k\in N,\ \ p^2-4q<0,$ називаються елементарними.

Має місце твердження: правильний раціональний дріб можна зобразити у вигляді суми елементарних дробів. Зокрема, справедливо,що

$$\frac{P_l\left(x\right)}{\left(x-a\right)^k\left(x^2+px+q\right)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{\left(x-a\right)^2}+...+\frac{A_k}{\left(x-a\right)^k}+\frac{Bx+C}{x^2+px+q},\ l<k+2.$$

Для знаходження коефіцієнтів $A_1, A_2,..., A_k, B, C$ праву частину зводять до загального знаменника і порівнюють чисельники дробів у лівій і правій частинах одержаної рівності, потім комбінують методи:

1) підставляють ліворуч і праворуч одні і ті ж числа (зазвичай корені знаменника);

2) прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях x ліворуч і праворуч рівності і розв’язують отриману систему.

Формули скороченого множення і ділення:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\qquad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2);$$

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\qquad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2);$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),\quad a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-ba^{2n-1}+b^2a^{2n-2}-\ldots+b^{2n});$$

$$a^{2n+1}-b^{2n+1}=(a-b)(a^{2n}+ba^{2n-1}+b^2a^{2n-2}+\ldots+b^{2n}),\quad a^{2n}-b^{2n}=(a^n-b^n)(a^n+b^n);$$

$$a^{2n}-b^{2n}=(a-b)(a^{2n-1}+ba^{2n-2}+b^2a^{2n-3}+\ldots+b^{2n-1});$$

$$a^{2n}-b^{2n}=(a+b)(a^{2n-1}-ba^{2n-2}+b^2a^{2n-3}-\ldots-b^{2n-1});$$

$$(a_1+a_2+a_3+\ldots a_n)^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2+2a_1a_2+2a_1a_3+\ldots+2a_1a_n+\ldots+2a_{n-1}a_n;$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2;$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b);$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b).$$

Формула бінома Ньютона:

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\ldots+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2b^{n-2}+nab^{n-1}+b^n,$$

$$(a-b)^n=a^n-na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\ldots+(-1)^{n-2}\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2b^{n-2}+(-1)^{n-1}nab^{n-1}+(-1)^nb^n,$$

де $1, n, \frac{n(n-1)}{1\cdot 2},\ldots$ – біноміальні коефіцієнти, які знаходяться в n–му рядку «трикутника Паскаля».

Алгоритм побудови «трикутника Паскаля» (табл. 1.1): кожний елемент наступного рядка, окрім його крайніх елементів, дорівнює сумі двох сусідніх з ним елементів попереднього рядка; крайні елементи кожного рядка є одиниці.

Таблиця 1.1

Номер рядка	Біноміальні коефіцієнти
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1

Приклад 1. 7. Знайти $(a-b)^5$.

Розв'язання. Коефіцієнти беремо з 5-го рядка, знаки "+", "–" чергуємо: $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$.

Формула виділення повного квадрата:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Приклад 1.8. Спростити $\dfrac{(x+1)^2-4x}{x^2-1}$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \neq \pm 1$.

$$\frac{(x+1)^2-4x}{x^2-1} = \frac{x^2+2x+1-4x}{x^2-1} = \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1},$$ якщо $x \neq \pm 1$.

Приклад 1.9. Спростити вираз $f(a;b;x) = \dfrac{2x^2+ax+4bx+2ab}{3x^2+2ax+6bx+4ab}$.

Розв'язання. $f(a;b;x) = \dfrac{(2x^2+4bx)+(ax+2ab)}{(3x^2+6bx)+(2ax+4ab)} =$

$$= \frac{2x(x+2b)+a(x+2b)}{3x(x+2b)+2a(x+2b)} = \frac{(x+2b)(2x+a)}{(x+2b)(3x+2a)} = \frac{2x+a}{3x+2a}.$$

ОДЗ: $x \neq -2b,\ x \neq -\dfrac{2a}{3}$. $f(a;b;x) = \dfrac{2x+a}{3x+2a}$, якщо $x \neq -2b,\ x \neq -\dfrac{2a}{3}$.

Приклад 1.10. Спростити $\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}} \cdot \left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) : \dfrac{(a-b-c)^2}{bc}$.

Розв'язання. Позначимо цей вираз через $f(a;b;c)$:

$$f(a;b;c) = \frac{b+c-a}{b+c+a} \cdot \frac{(b+c)^2-a^2}{2\cancel{bc}} \cdot \frac{\cancel{bc}}{(a-b-c)^2} = \frac{b+c-a}{b+c+a} \cdot \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2(a-b-c)^2} = \frac{1}{2}.$$

ОДЗ перетворень: $\begin{cases} a \neq 0, \\ b+c \neq 0, \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c} \neq 0, \\ b \neq 0, \\ c \neq 0, \\ a-b-c \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} abc \neq 0, \\ b+c \neq 0, \\ a \neq \pm(b+c). \end{cases}$

Приклад 1.11. Спростити вираз $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x\sqrt{x}-y^{\frac{3}{2}}}{x-y}$.

Розв'язання. $f(x;y)=\dfrac{\cancel{(\sqrt{x}-\sqrt{y})}\,(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{y}}}-\dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{x-y}=$

$$=\sqrt{x}+\sqrt{y}-\frac{\cancel{(\sqrt{x}-\sqrt{y})}\,(x+\sqrt{xy}+y)}{\cancel{(\sqrt{x}-\sqrt{y})}\,(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{x+2\sqrt{xy}+y-x-\sqrt{xy}-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}},$$

якщо $x \geq 0 \ \cap \ y \geq 0 \ \cap \ x \neq y$ (це ОДЗ перетворень).

Приклад 1.12. Спростити вираз

$$f(a)=\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right):\left(1+\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right).$$

Розв'язання. ОДЗ: $\begin{cases} a>1, \\ \sqrt{a} \neq \sqrt{a-1}, \end{cases} \quad \begin{cases} a>1, \\ a \neq a-1, \end{cases} \quad a>1.$

Звільнимося від ірраціональності в знаменнику спочатку першого, а потім другого дробу. Маємо:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}{(\sqrt{a}+\sqrt{a+1})(\sqrt{a}-\sqrt{a+1})}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}{a-(a+1)}=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}.$

2) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}{(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}{a-(a-1)}=\sqrt{a}+\sqrt{a-1}.$

3) $(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})+(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})=\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}$.

4) $1+\sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}}=\dfrac{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}.$

5) $(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}):\dfrac{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}=\sqrt{a-1}.$

Отже, $f(a)=\sqrt{a-1}$, якщо $a>1$.

Приклад 1.13. Знаючи табличні інтеграли

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + c, \qquad \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c, \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c,$$

знайти інтеграл $J = \int \frac{2x^2-7}{(x+1)(x^2+4)} dx.$

Розв'язання. Розкладемо підінтегральний дріб на елементарні дроби:

$$\frac{2x^2-7}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Маємо: $2x^2 - 7 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x+1)$. Покладемо $x=-1$, тоді $2-7=5A$ і $A=-1$.

Порівняємо коефіцієнти при однакових степенях:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 2 = A + B, \qquad B = 2 - A = 3, \\ x^0 & -7 = 4A + C, \quad C = -7 - 4A = -3. \end{array}$$

Тоді $J = \int \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{3x-3}{x^2+4} \right) dx = -\int \frac{dx}{x+1} + \frac{3}{2} \int \frac{2xdx}{x^2+4} - 3\int \frac{dx}{x^2+4} = -\ln|x+1| +$

$$+\frac{3}{2}\ln(x^2+4) - \frac{3}{2} arctg \frac{x}{2} + c.$$

<u>**Завдання для самостійної роботи**</u>

1.14. Спростити:

a) $f(x) = \frac{x^2-(x-1)^2}{2x^2+x-1}$; b) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$; c) $f(x;y) = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y(x-y)^2}{x^4-y^4}$;

d) $f(a;b) = \frac{a^2-b^2}{a-b} - \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$; e) $f(a;b;x) = \frac{x^2-ax+3bx-3ab}{2x^2+ax+6bx+3ab}$;

f) $f(x;y) = \frac{2x^2+3xy-2y^2}{4x^2+4xy-3y^2}$; g) $f(a;x) = \left(1 + a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{x}{a^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}$;

h) $f(x;y) = \left(\frac{x}{y} + y^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}\right) : \left(x^{\frac{1}{2}} y^{-1} - y^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)$;

i) $f(a;b) = \left(\frac{\sqrt[4]{ab} - \sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}} + \frac{1-\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right) : \frac{\sqrt[4]{ab}}{1+\sqrt[4]{a^3b^3}} - \frac{1-\sqrt[4]{ab}-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$;

j) $\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{b}{a-\sqrt{ab}} - \frac{a}{\sqrt{ab}+b}\right)$.

1.15. Розкласти дріб $\frac{x+3}{(x+1)^2(x^2+1)}$ на суму елементарних дробів.

1.16. Розкласти дріб $\dfrac{3x^2-1}{(2x-1)(x^2+x+1)}$ на суму елементарних дробів.

Розділ 2. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

2.1. Тригонометричні функції числового аргументу

Наведемо означення тригонометричних функцій числового аргументу.

Синусом числа α ($\sin\alpha$) називається ордината точки C, яка утворюється в результаті повороту радіус-вектора $\overrightarrow{OA}$ = {0,1} на кут α радіан. Якщо $\alpha > 0$, то поворот здійснюється проти ходу годинникової стрілки і вважається додатним, а якщо $\alpha < 0$, то поворот – від'ємний і здійснюється за ходом годинникової стрілки.

Косинусом числа α ($\cos\alpha$) називається абсциса точки C.

Тангенсом числа α ($tg\alpha$) називається ордината точки B, яка розташована на перетині продовження радіус-вектора $\overrightarrow{OC}$ з віссю тангенсів (пряма, проведена через точку A(1,0) перпендикулярно до осі OX).

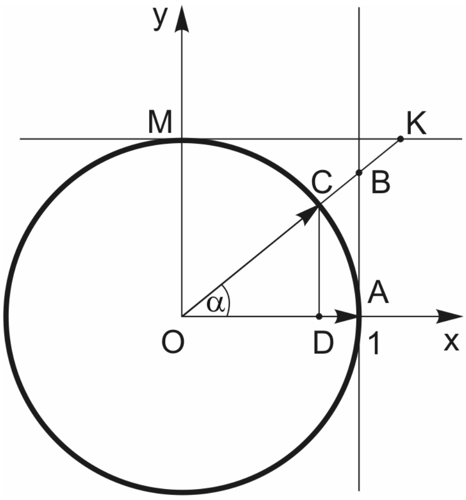


Рис. 2.1

Котангенсом числа α ($ctg\alpha$) називається абсциса точки K, яка лежить на перетині продовження радіус-вектора $\overrightarrow{OC}$ з віссю котангенсів (пряма, проведена через точку M(0,1) перпендикулярно до осі OY).

Іноді використовуються ще дві тригогонометричні функції, а саме секанс числа α ($\sec\alpha$) і косеканс числа α ($\operatorname{cosec}\alpha$). Ці функції вводяться таким чином:

$$\sec\alpha = 1/\cos\alpha, \ \operatorname{cosec}\alpha = 1/\sin\alpha.$$

Між тригонометричними функціями кута α існують прості співвідношення:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \qquad tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} \pm \pi n;$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \ \alpha \neq \pi n; \qquad ctg^2\alpha = 1/\left(1 + tg^2\alpha\right), \ \alpha \neq \frac{\pi}{2} \pm \pi n;$$

$$tg\alpha ctg\alpha = 1, \ \alpha \neq \frac{\pi n}{2}; \qquad \sin^2\alpha = 1/\left(1 + ctg^2\alpha\right), \ \alpha \neq \pi n.$$

$S\text{in}\,\alpha$ набуває додатних значень у першій ($\alpha \in (0; \pi/2)$) та другій ($\alpha \in (\pi/2; \pi)$) чвертях і від'ємних – у третій ($\alpha \in (\pi; 3\pi/2)$) та четвертій ($\alpha \in (3\pi/2; 2\pi)$); $\cos\alpha$ набуває додатних значень у першій та четвертій чвертях і від'ємних – у другій та третій; $tg\alpha$ і $ctg\alpha$ – додатних у першій та третій чвертях і від'ємних – у другій та четвертій (рис. 2.2).

Згідно з означенням тригонометричних функцій мають місце такі формули:

$$\sin(\alpha \pm 2\pi) = \sin\alpha, \qquad \cos(\alpha \pm 2\pi) = \cos\alpha, \qquad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$

$$\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin\alpha, \qquad \cos(\alpha \pm \pi) = -\cos\alpha, \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

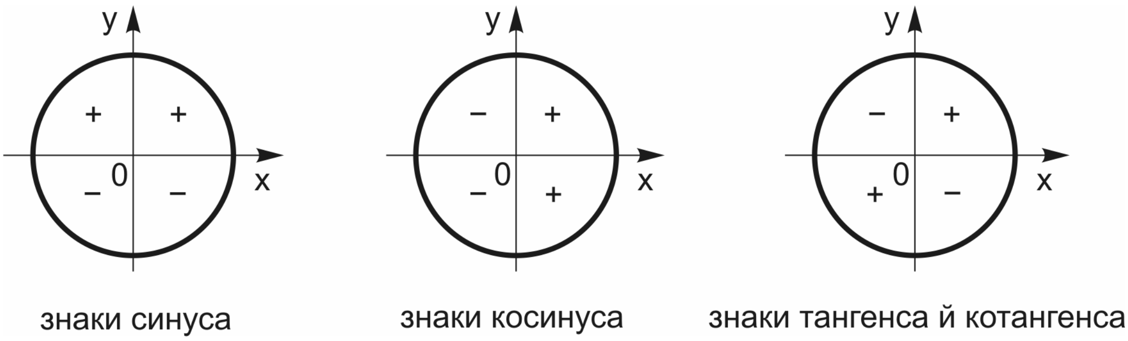


Рис. 2.2

для будь-якого значення α і

$$tg(\alpha \pm \pi) = tg\alpha,\ ctg(\alpha \pm \pi) = ctg\alpha,\ tg(-\alpha) = -tg\alpha,\ ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$$

для будь-якого допустимого значення α.

Табличні значення тригонометричних функцій гострих кутів наведено в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Функція	Кут α: радіани (градуси)				
	$0(0^\circ)$	$\frac{\pi}{6}(30^\circ)$	$\frac{\pi}{4}(45^\circ)$	$\frac{\pi}{3}(60^\circ)$	$\frac{\pi}{2}(90^\circ)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\mathrm{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Приклад 2.1. Визначити знаки таких виразів: а) $\sin(4\pi/5)$; б) $\cos(34^\circ)$; в) $tg(3\pi/2-\alpha)$, де $\alpha \in (0;\ \pi/2)$.

Розв'язання: а) кут $4\pi/5$ належить другій чверті, тому $\sin(4\pi/5) > 0$; б) кут 34° належить першій чверті, тому $\cos(34^\circ) > 0$; в) значення кута α не перевищує $\pi/2$, тому вираз $3\pi/2-\alpha$ належить другій чверті. Синус і косинус кутів другої чверті мають різні знаки, тому $tg(3\pi/2-\alpha) < 0$.

Приклад 2.2. Обчислити $\cos^2(\pi/3)\left(3\sin^2(\pi/4)+1\right)ctg(\pi/6)$.

Розв'язання. Аргументи тригонометричних функції – табличні. Значення тригонометричних функцій від цих аргументів – відомі, а саме:

$$\cos(\pi/3) = 1/2,\ \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2,\ ctg(\pi/6) = \sqrt{3}.$$

Тому $\cos^2(\pi/3)\left(3\sin^2(\pi/4)+1\right)ctg(\pi/6) = \dfrac{1}{4}\cdot\left(3\cdot\dfrac{1}{2}+1\right)\cdot\sqrt{3} = \dfrac{5\sqrt{3}}{8}.$

Приклад 2.3. Обчислити $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $ctg\alpha$, якщо $tg\alpha = -3/4$ і $\alpha \in (\pi/2;\ \pi)$.

Розв'язання. Оскільки $\cos^2\alpha = 1/\left(1+tg^2\alpha\right) = 16/25$, то $\cos\alpha = 4/5$ або $\cos\alpha = -4/5$. Оскільки $\alpha \in (\pi/2;\ \pi)$, то $\cos\alpha = -4/5$, $\sin\alpha = \cos\alpha tg\alpha = 3/5$, $ctg\alpha = 1/tg\alpha = -4/3$.

Завдання для самостійної роботи

2.01.Побудувати кут: 1) синус якого дорівнює: a) $1/2$; b) $-1/2$; c) $2/5$; 2) косинус якого дорівнює: a) $-1/2$; b) $\sqrt{2}/2$; c) $\sqrt{3}/2$; 3) тангенс якого дорівнює: a) 1; b) -1; c) $1/\sqrt{3}$; котангенс якого дорівнює: a) -1; b) $-1/\sqrt{3}$; c) $\sqrt{3}$.

2.02. Визначити знаки таких виразів: a) $\sin(6\pi/5)$; b) $tg(95°)$; c) $tg(3\pi/5)$; d) $\cos(155°)$; e) $\cos(\pi/2+\alpha)$, де $\alpha\in(\pi/2;\pi)$; f) $\sin(3\pi/2+\alpha)$, де $\alpha\in(0;\pi/2)$; g) $\sin 200°\cos 300°$; h) $\sin 3\cos 2tg5$.

2.03.Обчислити: a) $\cos(4\pi/3)\left(2\sin^2(\pi/3)-1\right)tg(\pi/6)$; b) $cos45°ctg135°$; c) $\sin135°ctg60°$; d) $2\sin(3\pi/2)+3\cos(2\pi)-4tg(\pi/4)+ctg(5\pi/4)$; e) $3\cos(3\pi/4)+5\sin(3\pi/2)+4tg\pi+ctg(\pi/2)$; f) $tg(4\pi/3)\left(3ctg^2(\pi/3)-1\right)\sin(\pi/6)$.

2.04. Для яких чвертей проміжку $(0;2\pi)$ виконуються нерівності: a) $ctgx\cos x>0$; b) $\sin x\cos x<0$; c) $tgx\sin x>0$; d) $\cos x/tgx<0$?

2.05. До яких чвертей належить кут, якщо: a) $tg\alpha>0$; b) $0<\cos\alpha<1$; c) $ctg\alpha<0$; d)$-1<\sin\alpha<0$?

2.06. Чи існує таке значення $x\in[0;2\pi]$, щоб: a) $3\sin(\pi/2-x)+2cos x=5$; b) $2\sin x+3\cos(\pi/2-x)=5$; c) $4\sin x+\cos x=5$; d) $\sin x+4\cos x=5$?

2.07. Обчислити $\sin\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$, якщо: a) $\cos\alpha=-1/2$ і $\alpha\in(\pi/2;\pi)$; b) $ctg\alpha=1$ і $\alpha\in(\pi;3\pi/2)$.

2.2. Основні формули тригонометрії. Формули зведення. Перетворення тригонометричних виразів

У процесі перетворення тригонометричних виразів широко застосовуються такі формули.

1. Формули додавання:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;\quad cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$$

$$tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha tg\beta},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\alpha\pm\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi m;n,k,m\in Z.$$

2. Формули кратних аргументів:

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;\qquad \cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha},\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},n,k\in Z;$$

$$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;\quad \cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$$

3. Формули половинного аргументу:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2};\qquad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2};$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},\alpha\neq\pi+2\pi n,n\in Z;\qquad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\alpha\neq\pi n,n\in Z.$$

4. Формули перетворення суми і різниці в добуток:

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2};\quad \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

5. Формули перетворення добутку в суму і різницю:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta));\quad \sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta));$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)).$$

6. Співвідношення між $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\frac{\alpha}{2}$:

$$\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq\pi+2\pi n,n\in Z .$$

Також мають місце формули зведення. Формули зведення перетворюють тригонометричні функції від аргументів $\frac{\pi n}{2}\pm\alpha, n\in N$ до функцій з аргументом α .

Для зручності у користуванні формулами зведення використовують такі правила:

а) кут α завжди вважається гострим;

б) ціле число періодів завжди можна відкинути;

в) якщо кут α відкладається від горизонтального діаметра $(\pi\pm\alpha,2\pi\pm\alpha)$, то назва функції зберігається; якщо кут α відкладається від вертикального діаметра $(\frac{\pi}{2}\pm\alpha,\frac{3\pi}{2}\pm\alpha)$, то назва функції змінюється (синус – на косинус, косинус – на синус, тангенс – на котангенс, котангенс – на тангенс).

Приклад 2.4. Спростити вираз $f(\alpha)=\frac{\sin^3(\alpha-270^0)\cos(360^0-\alpha)}{tg^3(\alpha-90^0)\cos^3(270^0-\alpha)}$.

Розв'язання. Для отримання розв'язку скористаємося формулами зведення (див. табл. 2.1) та властивостями парності й непарності тригонометричних функцій. Маємо

$$f(\alpha)=\frac{-\sin^3(270^0-\alpha)\cos(360^0-\alpha)}{-tg^3(90^0-\alpha)\cos^3(270^0-\alpha)}=\frac{\cos^3\alpha\cos\alpha}{-ctg^3\alpha(-\sin^3\alpha)}=\cos\alpha .$$

Приклад 2.5. Обчислити число $A=\frac{\sin 22^0\cos 8^0+\cos 158^0\cos 98^0}{\sin 23^0\cos 7^0+\cos 157^0\cos 97^0}$.

Розв'язання. Для отримання розв'язку скористаємося формулами зведення (див. табл. 2.1) та формулами додавання. Маємо

$$A=\frac{\sin 22^0\cos 8^0+\cos 158^0\cos 98^0}{\sin 23^0\cos 7^0+\cos 157^0\cos 97^0}=\frac{\sin 22^0\cos 8^0+(-\cos 22^0)(-\sin 8^0)}{\sin 23^0\cos 7^0+(-\cos 23^0)(-\sin 7^0)}=\frac{\sin 30^0}{\sin 30^0}=1.$$

Приклад 2.6. Обчислити $tg\left(\beta/4\right)$, якщо $\cos\beta=-0{,}6$ і $\beta\in(\pi,3\pi/2)$.

Розв'язання. Скористаємося формулами $1-\cos\alpha=2\sin^2\left(\alpha/2\right)$, $1+\cos\alpha=2\cos^2\left(\alpha/2\right)$, і візьмемо $\beta=\alpha/2$. Маємо $tg^2\dfrac{\beta}{4}=\dfrac{1-\cos(\beta/2)}{1+\cos(\beta/2)}$, і задача зводиться до обчислення $\cos(\beta/2)$. Проведемо ці обчислення:

$\cos^2(\beta/2)=\dfrac{1+cos\beta}{2}=\dfrac{1-0{,}6}{2}=\dfrac{1}{5}$; оскільки $\beta\in(\pi,3\pi/2)$, то $\beta/2\in(\pi/2,3\pi/4)$ і тому $\cos(\beta/2)<0$. Значить, $\cos(\beta/2)=-\sqrt{5}/5$. Таким чином, $tg^2\dfrac{\beta}{4}=\dfrac{1+\sqrt{5}/5}{1-\sqrt{5}/5}=\dfrac{(5+\sqrt{5})^2}{20}$. Кут $\beta/4\in(\pi/4,3\pi/8)$, тому $tg\dfrac{\beta}{4}>0$ і $tg\dfrac{\beta}{4}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.$

Приклад 2.7. Обчислити $16\sin(\alpha/2)\sin(3\alpha/2)$, якщо $\cos\alpha=3/4$.

Розв'язання. Скористаємося формулою перетворення добутку тригонометричних функцій $\sin\alpha\sin\beta$ в суму і формулою подвійного аргументу для $\cos 2\alpha$. Маємо

$$16\sin(\alpha/2)\sin(3\alpha/2)=8(\cos\alpha-\cos 2\alpha)=8(\cos\alpha-2\cos^2\alpha+1)=8(3/4-9/8+1)=5.$$

Приклад 2.8. Довести рівність $\sin 47^0+\sin 61^0-\sin 11^0-\sin 25^0=\cos 7^0$.

Розв'язання. Скористаємося формулами для перетворення суми і різниці синусів $\sin\alpha\pm\sin\beta$ у добуток, а також формулами подвійного аргументу для $\sin 2\alpha$ і $\cos 2\alpha$. Маємо

$$(\sin 47^0+\sin 61^0)-(\sin 11^0\sin 25^0)=2\sin 54^0\cos 7^0-2\sin 18^0\cos 7^0=$$

$$=2\cos 7^0(\sin 54^0-\sin 18^0)=4^0\cos 7^0\sin 18^0\cos 36^0=\frac{4\cos 7^0\sin 18^0\cos 36^0\cos 18^0}{\cos 18^0}=$$

$$=\frac{2\cos 7^0\sin 36^0\cos 36^0}{\cos 18^0}=\frac{\cos 7^0\sin 72^0}{\cos 18^0}=\frac{\cos 7^0\cos 18^0}{\cos 18^0}=\cos 7^0.$$

Приклад 2.9. Обчислити $\sin 75^0$.

Розв'язання. Скористаємося формулою для синуса суми двох аргументів і табличними значеннями тригонометричних функцій. Маємо

$$\sin 75^0=\sin(30^0+45^0)=\sin 30^0\cos 45^0+\sin 45^0\cos 30^0=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}.$$

Приклад 2.10. Довести тотожність $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)+1=0.$

Розв'язання. У лівій частині наведеної рівності виділимо повний куб і квадрат. Маємо

$$2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)+1=2[(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^3-3\sin^4\alpha\cos^2\alpha-$$

$$-3\sin^2\alpha\cos^4\alpha]-3[(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha]+1=$$

$$=2-6\sin^4\alpha\cos^2\alpha-6\sin^2\alpha\cos^4\alpha-3+6\sin^2\alpha\cos^2\alpha+1=6\sin^2\alpha\cos^2\alpha(1-1)=0.$$

Приклад 2.11. Довести тотожність $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha+\sin 2\alpha=\sqrt{2}\cos(2\alpha-\frac{\pi}{4})$.

Розв'язання. До лівої частини рівності застосуємо формулу різниці квадратів, а до правої – формулу косинуса різниці двох аргументів. Маємо

$$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha+\sin 2\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+\sin 2\alpha,$$

$$\sqrt{2}\cos(2\alpha-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}(\cos 2\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\sin 2\alpha\sin\frac{\pi}{4})=\cos 2\alpha+\sin 2\alpha.$$

Ліву та праву частини запропонованої рівності зведено до однакового вигляду, тому вони рівні.

Приклад 2.12. Довести тотожність $\dfrac{\cos^2 2\alpha}{ctg\alpha-tg\alpha}=\dfrac{1}{4}\sin 4\alpha$.

Розв'язання. $$\frac{\cos^2 2\alpha}{ctg\alpha-tg\alpha}=\frac{\cos^2 2\alpha}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos^2 2\alpha}{\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}}=$$

$$=\frac{\cos^2 2\alpha\sin\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{\cos 2\alpha\sin 2\alpha}{2}=\frac{1}{4}\sin 4\alpha.$$

У перетвореннях тригонометричних виразів застосовувалися формули подвійного аргументу для $\sin 2\alpha$ і $\cos 2\alpha$. Слід звернути увагу на те, що наведені дії можливі лише тоді, коли $\cos\alpha\neq 0$, $\sin\alpha\neq 0$, $\cos 2\alpha\neq 0$, тобто $\alpha\neq\pi n/2, \alpha\neq\pi/4+\pi k/2, n,k\in Z$, або $\alpha\neq\pi n/4,\ n\in Z$.

Приклад 2.13. Довести тотожність $\dfrac{tg^2 2\alpha-tg^2\alpha}{1-tg^2 2\alpha\, tg^2\alpha}=tg3\alpha tg\alpha$.

Розв'язання. Розкладемо на множники ліву частину рівності та застосуємо формули тангенса суми і різниці двох аргументів. Маємо

$$\frac{tg^2 2\alpha-tg^2\alpha}{1-tg^2 2\alpha\, tg^2\alpha}=\frac{(tg2\alpha-tg\alpha)(tg2\alpha+tg\alpha)}{(1-tg2\alpha\, tg\alpha)(1+tg2\alpha\, tg\alpha)}=tg(2\alpha-\alpha)tg(2\alpha+\alpha)=tg3\alpha tg\alpha.$$

Доведена тотожність виконується, якщо $\cos\alpha\neq 0$, $\cos 2\alpha\neq 0$, $\cos 3\alpha\neq 0$, $tg2\alpha\, tg\alpha\neq\pm 1$, тобто $\alpha\neq\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}n, \alpha\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k,\ n,k\in Z$.

Приклад 2.14. Довести числову рівність $\cos\dfrac{\pi}{9}\cos\dfrac{2\pi}{9}\cos\dfrac{4\pi}{9}=\dfrac{1}{8}$.

Розв'язання. Помножимо та поділимо ліву частину рівності на $2\sin\dfrac{\pi}{9}$ і скористаємося формулами подвійного аргументу. Маємо

$$\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{2\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}}{2\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{\sin\frac{2\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}}{2\sin\frac{\pi}{9}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{4\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}}{4\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{\sin\frac{8\pi}{9}}{8\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{\sin(\pi-\frac{\pi}{9})}{8\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{\sin\frac{\pi}{9}}{8\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{1}{8}.$$

Завдання для самостійної роботи

Обчислити значення тригонометричних виразів:

2.08. $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=-2$. 2.09. $\frac{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}$, якщо $\cos\alpha=\frac{1}{5}$.

2.10. $\operatorname{ctg}\alpha-2\operatorname{ctg}2\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha=5$. 2.11. $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\cos\alpha=\frac{12}{13}$ і $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

Спростити:

2.12. $\frac{(\sin 10^\circ+\sin 80^\circ)(\cos 80^\circ-\cos 10^\circ)}{\sin 70^\circ}$. 2.13. $\frac{\sin\left(2\pi+\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}-\cos\left(2\pi+\frac{\alpha}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{4}-3\pi\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}+\cos\left(\frac{7\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)}$.

2.14. $4\cos\alpha\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(a+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos 3a$.

2.15. $\cos^{-2}4\alpha-\operatorname{tg}^2(3\pi+4\alpha)-2\cos^2\alpha-\sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2a\right)$.

2.16. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)[0,1]$. 2.17. $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{a}{2}\right)\sin\frac{a}{2}$.

Довести тотожності:

2.18. $\frac{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5a}=\operatorname{ctg}3a$. 2.19. $\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\sin\alpha-\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}+\cos(\pi-\alpha)=1$.

2.20. $\cos^2\alpha-\sin^2 2\alpha=\cos^2\alpha\cos 2\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

2.21. $\frac{1+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\sin\alpha$. 2.22. $\sin 4\alpha+\cos 4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}$.

2.23. $\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+a\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-a\right)$. 2.24. $\operatorname{tg}\alpha+\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$.

2.25. $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+a\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-a\right)=\frac{3}{2}$. 2.26. $\sin\alpha\left(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{a}{2}\right)=\operatorname{tg}a$.

З'ясувати, для яких значень α мають місце рівності:

2.27. $\sqrt{1+\sin 2\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha$. 2.28. $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=ctg\alpha-\cos ec\alpha$.

У подальшому нам знадобиться означення ще чотирьох функцій числового аргументу.

Нехай число x належить проміжку $\left[-1,1\right]$. Арксинусом числа x ($\arcsin x$) називається таке число α (або така дуга α, або такий кут α) із відрізка $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює x. Таким чином, запис $\alpha=\arcsin x$ означає, що $\begin{cases} -1\le x\le 1, \\ \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \\ \sin\alpha=x. \end{cases}$

Арккосинусом числа x ($\arccos x$) називається таке число α (або така дуга α, або такий кут α) із відрізка $\left[0,\pi\right]$, косинус якого дорівнює x. Отже, запис $\alpha=\arccos x$ означає, що $\begin{cases} -1\le x\le 1, \\ \alpha\in\left[0,\pi\right], \\ \cos\alpha=x. \end{cases}$

Нехай $x\in\left(-\infty,\infty\right)$. Арктангенсом числа x називається таке число α (або така дуга α, або такий кут α) із інтервалу $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює числу x. Аналогічно попереднім записам маємо: $\alpha=arctgx$ означає, що $\begin{cases} -\infty<x<\infty, \\ \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), \\ tg\alpha=x. \end{cases}$

Арккотангенсом числа x називається таке число α (або така дуга α, або такий кут α) із інтервалу $\left(0,\pi\right)$, котангенс якого дорівнює x. Отже, $\alpha=arcctgx$ означає, що

$$\begin{cases} -\infty<x<\infty, \\ \alpha\in\left(0,\pi\right), \\ ctg\alpha=x. \end{cases}$$

Корисною є табл. 2.2 найпростіших значень функцій.

Таблиця 2.2

Функція	Аргумент						
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	–
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	–
$\mathrm{arctg}\, x$	0		$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\mathrm{arcctg}\, x$	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{3}$			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Зауваження. Позначення функцій пов’язано зі змістом слова «arc»- «арка», або «дуга».

Наведемо деякі тотожності, зв'язані із $\arcsin x, \arccos x, arctgx,\ \ arcctgx$:

1) $\arcsin(-x) = -\arcsin x, |x| \le 1;$ 2) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x, |x| \le 1;$

3) $\mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}\, x, x \in (-\infty, +\infty);$ 4) $\mathrm{arcctg}(-x) = \pi - \mathrm{arcctg}\, x, x \in (-\infty, +\infty);$

5) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, |x| \le 1;$ 6) $arcctgx + arctgx = \dfrac{\pi}{2}$.

Приклад 2.15. Обчислити $\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{7}\right)$.

Розв'язання. Треба знайти $\cos\alpha$, якщо відомо, що $\sin\alpha = \dfrac{1}{7}$. Кут $\arcsin\dfrac{1}{7}$ розташований у першій чверті і має додатний косинус. Тому $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \dfrac{\sqrt{48}}{7}$.

Приклад 2.16. Обчислити $\cos(arctgx)$.

Розв'язання. За формулою $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ знайдемо $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+x^2}$. Важливо зауважити, що за означенням арктангенса цей кут розташований у першій або четвертій чверті і має додатне значення косинуса, тобто $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Приклад 2.17. Обчислити $\arcsin\left(\sin\dfrac{13\pi}{6}\right)$.

Розв'язання. Оскільки $\dfrac{13\pi}{6} \notin \left[-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin\left(\sin\dfrac{13\pi}{6}\right) \ne \dfrac{13\pi}{6}$. За допомогою формул зведення $\sin\dfrac{13\pi}{6}$ перетворюється на $\sin\dfrac{13\pi}{6} = \sin\left(2\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = = \sin\dfrac{\pi}{6}$. Аргумент $\dfrac{\pi}{6} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right]$. Остаточно $\arcsin\left(\sin\dfrac{13\pi}{6}\right) = \arcsin\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

<u>Завдання для самостійної роботи</u>

2.29. Обчислити значення: a) $\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, b) $\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right)$, c) $arctg\left(-\sqrt{3}\right)$, d) $arcctg\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, e) $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, f) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, g) $arctg1$, h) $arcctg0$.

2.30. Катети прямокутного трикутника дорівнюють a і b. Знайти один із його гострих кутів , користуючись по черзі чотирма оберненими тригонометричними функціями.

Спростити вирази:

2.31. a) $\arccos\left(-\sqrt{2}/2\right) + arctg1$; b) $2\arccos\left(-\sqrt{2}/2\right) + \mathrm{arctg}(-1) - \pi$;

c) $2\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})+\operatorname{arctg}(-1)+\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\arccos(-1)$; d) $\operatorname{tg}(5\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2})$;

$e)\cos\left(3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

2.32. a) $\sin\left(2arctgx\right)$; b) $tg\left(arctgx+arctgy\right)$; c) $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)$.

2.33. a) $\arccos\left(\cos\frac{15\pi}{4}\right)$, b) $\arcsin\left(\sin 4\right)$, c) $arctg\left(tg6\right)$.

2.34. Обчислити: a) $\cos\left(arctg8\right)$, b) $tg\left(arcctg\left(-4\right)\right)$, c) $tg\left(\arcsin 0.2\right)$,

d) $\sin\left(arctg5\right)$, e) $ctg\left(\arccos 0.6\right)$, f) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{7}\right)$, g) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{3}{7}\right)\right)$.

2.35. Довести, що $\arcsin x = arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, якщо $x\in\left(-1,1\right)$.

Розділ 3. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ ВИРАЗІВ

3.1. Означення логарифма числа

Означення. Нехай $a>0,\ a\neq 1,\ b>0.$ **Логарифмом** числа b за основою a називається показник степеня, до якого потрібно піднести число a, щоб одержати число b**,** тобто

$$a^{\log_a b}=b.$$

Таке співвідношення носить назву “основна логарифмічна тотожність”.

Приклад 3.1. Із рівності $2^3=8$ випливає $\log_2 8=3;$ із рівності $\left(0,25\right)^{-2}=16$ маємо $\log_{0,25}16=-2.$

3.2. Властивості логарифмів. Логарифмічні перетворення

При перетворенні логарифмічних виразів треба враховувати властивості показникової та логарифмічної функцій:

1) $\log_a M\cdot N=\log_a M+\log_a N\ (M>0, N>0, a>0, a\neq 1);$

2) $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N\quad (M>0, N>0, a>0, a\neq 1);$

3) $\log_{a^\beta} N^\alpha=\frac{\alpha}{\beta}\log_a N\ \ (N>0, \beta\neq 0, a>0, a\neq 1);$

4) $\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}(N>0, a>0, b>0, a\neq 1, b\neq 1);$

5) $\log_b a\cdot\log_a b=1;$ 6) $a^x\cdot a^y=a^{x+y};$ 7) $a^x\cdot b^x=(ab)^x;$ 8) $(a^x)^y=a^{xy}.$

Приклад 3.2. Провести перетворення виразів за допомогою властивостей 1) -3): a) $\log_5\left(375\cdot 23\right)$; b) $\log_7\left(135/15,4\right)$; c) $\log_{13}47^9$.

Розв'язання: a) $\log_5(375\cdot 23)=\log_5 375+\log_5 23;$

b) $\log_7(135/15{,}4)=\log_7 135-\log_7 15{,}4;$ c) $\log_{13} 47^9 = 9\log_{13} 47$.

Приклад 3.3. Знайти логарифм за основою 10 числа $x=\dfrac{ab^3}{c\sqrt[3]{d^2}}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів, знайдемо

$$\lg\frac{ab^3}{c\sqrt[3]{d^2}}=\lg\left(ab^3\right)-\lg\left(c\sqrt[3]{d^2}\right)=\lg a+\lg b^3-\left(\lg c+\lg\sqrt[3]{d^2}\right)=$$

$$=\lg a+3\lg b-\lg c-\lg d^{\frac{2}{3}}=\lg a+3\lg b-\lg c-\frac{2}{3}\lg d.$$

Приклад 3.4. Обчислити $10^{0,5-\lg 0,375\sqrt{10}}-\log_{2\sqrt{2}} 0{,}0625.$

Розв'язання. Використовуючи основну логарифмічну тотожність і співвідношення "3", одержимо

$$10^{0,5-\lg 0,375\sqrt{10}}-\log_{2\sqrt{2}} 0{,}0625=10^{0,5}\cdot 10^{\lg(0,375\sqrt{10})^{-1}}-\log_{2^{\frac{3}{2}}} 2^{-4}=$$

$$=\sqrt{10}\,\frac{1}{0{,}375\sqrt{10}}+\frac{4\cdot 2}{3}=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}.$$

Приклад 3.5. Обчислити $\left(\sqrt[7]{\dfrac{1}{27}}\right)^{\frac{1}{5\log_5 3}+\log_{9\sqrt{3}} 125}$.

Розв'язання. За допомогою формули "5" отримаємо $\dfrac{1}{5\log_5 3}=\dfrac{1}{5}\log_3 5.$

Використовуючи "3", знаходимо $\log_{9\sqrt{3}} 125=\log_{3^{\frac{5}{2}}} 5^3=\dfrac{6}{5}\log_3 5.$ Далі скористаємося основною логарифмічною тотожністю і остаточно запишемо

$$\left(\sqrt[7]{\frac{1}{27}}\right)^{\frac{1}{5\log_5 3}+\log_{9\sqrt{3}} 125}=\left(3^{\frac{-3}{7}}\right)^{\frac{1}{5}\log_3 5+\frac{6}{5}\log_3 5}=3^{-\frac{3}{7}\frac{7}{5}\log_3 5}=3^{\frac{-3}{5}\log_3 5}=$$

$$=\left(3^{\log_3 5}\right)^{\frac{-3}{5}}=5^{\frac{-3}{5}}=\sqrt[5]{\frac{1}{5^3}}.$$

Приклад 3.6. Спростити вираз $64^{\frac{1}{\log_3 2}}+32^{\frac{1}{\log_5 2}}+16^{\frac{1}{\log_6 2}}+8^{\frac{1}{\log_7 2}}.$

Розв'язання.

$$(2^6)^{\log_2 3}+(2^5)^{\log_2 5}+(2^4)^{\log_2 6}+(2^3)^{\log_2 7}=2^{6\log_2 3}+2^{5\log_2 5}+2^{4\log_2 6}+2^{3\log_2 7}=$$

$$=2^{\log_2 3^6}+2^{\log_2 5^5}+2^{\log_2 6^4}+2^{\log_2 7^3}=3^6+5^5+6^4+7^3=5493.$$

Завдання для самостійної роботи

3.1. Знайти логарифми за основою 10 таких виразів:

1) $x=\dfrac{a^2b^5}{c^3}$; 2) $x=\dfrac{25\cdot\sqrt[3]{12}}{\sqrt{0,35}}$; 3) $x=\dfrac{a^2\sqrt{gc}}{3\cdot\sqrt[5]{(a+b)^3}}$; 4) $\dfrac{21^{3/4}\cdot\sqrt[3]{124}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt[7]{24}}$;

5) $\dfrac{(5\cdot 3^{1/2})^4}{2^{1/2}\cdot 3^{1/3}\cdot 6^{-3/5}}$; 6) $\sqrt{5\sqrt{3}/(2\sqrt{7})}$; 7) $\sqrt{\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{3}/\sqrt{2}}$.

3.2. Спростити вирази:

1) $2^{-5\log_2 5}$; 2) $7^{\frac{1}{3}\log_7 27}$; 3) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\log_3 7}$; 4) $8^{-\frac{1}{\log_3 2}}$; 5) $\log_{\frac{1}{27}}\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$;

6) $\log_{\frac{1}{5}}(25\cdot\sqrt{5})$; 7) $\dfrac{1}{\log_3 2}+\dfrac{2}{\log_9 4}-\dfrac{3}{\log_{27} 8}$; 8) $\dfrac{\log_3 12}{\log_{36} 3}-\dfrac{\log_3 4}{\log_{108} 3}$;

9) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_{49} 4+2}+3$; 10) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{243}\right)^{3-\frac{\log_4 19}{3\log_4 27}}}$; 11) $5^{\log_{\sqrt{125}} 17}+2^{\frac{1}{\log_7 4}}$.

3.3. Визначити знаки чисел:

1) $\log_{\frac{1}{5}} 2$; 2) $\log_2\sqrt{3}$; 3) $\log_{\sqrt{3}} 2$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}$; 5) $\log_{\pi}(\sqrt{49}-6)$.

3.4. Обчислити:

1) $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}$; 2) $9^{\log_3(\frac{1}{3}\log_{\sqrt[3]{3}} 9)}$; 3) $\left(25^{\frac{1}{\log_6 5}}+49^{\frac{1}{\log_8 7}}\right)^{\frac{1}{2}}$;

4) $-\log_5\log_3^5\sqrt{\sqrt[5]{3}}$; 5) $\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}\right)^{2+\frac{\log_7 cos\frac{\pi}{3}}{\log_7\sqrt{3}}}$; 6) $\lg\operatorname{tg}1^0\cdot\lg\operatorname{tg}2^0\cdot\ldots\cdot\lg\operatorname{tg}89^0$;

7) $5^{\log_{\sqrt[3]{5}} 4+2\log_{25} 3}$; 8) $4^{\frac{1}{4}\log_2 3+2\log_{16} 4}$; 9) $-\log_2\dfrac{1}{\log_{\sqrt{\sqrt[4]{2}}} 2}$.

3.5. Дано $\lg 64=a$. Знайти $\lg\sqrt[3]{25}$.

3.6. Дано $\lg 3=a, \lg 2=b$. Знайти $\log_5 6$.

ГЛАВА 4. ФУНКЦІЇ ТА ГРАФІКИ

4.1. Означення функції та її властивості

Означення функції. Правило (закон) відповідності між множинами X і Y, за яким для кожного елемента x з множини X можна знайти один і тільки один елемент y з множини Y, називається функцією.

При цьому x називається незалежною змінною, або аргументом, а y – залежною змінною, або функцією. Позначення: $y=f(x)$. Множина X всіх допустимих значень аргументу x, при яких функція $y=f(x)$ визначена, називається *областю* *визначення функції*. Множина Y всіх значень y, яких набуває функція, називається *областю значень функції*.

Приклад 4.1. Знайти область визначення і область значень функцій:

$y = x^3 + 1$ – область визначення функції $-\infty < x < +\infty$, область значень функції $-\infty < y < +\infty$;

$y = \sqrt{x-5}$ – область визначення функції $x \geq 5$, область значень функції $y \geq 0$;

$y = \dfrac{\sin^2 x}{|x-4|}$ – область визначення функції $x \neq 4$, область значень функції $y \geq 0$.

Щоб задати функцію, необхідно вказати її область визначення та правило, за яким кожному значенню x з області визначення відповідає значення $y = f(x)$. Розрізняють такі способи задання функції:

1. Табличний спосіб, який полягає в тому, що функцію можна задати за допомогою таблиці (табл. 4.1), в якій в одному рядку (або стовпчику) записано всі значення аргументу, а в другому – відповідні значення функції.

Таблиця 4.1

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
Y	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Табличний спосіб виявляється зручним, коли область визначення функції складається із скінченного числа точок. Але при розгляді теоретичних питань, вивченні якісної поведінки функції не можна обмежуватись функціями, які визначені лише в скінченному числі точок.

2. Графічний спосіб, який полягає в тому, що подається графік цієї функції. Графік дає просте і наочне уявлення про якісну поведінку функції, але точність обчислення значень функції за допомогою графіка досить низька внаслідок похибок при проведенні перпендикулярів і вимірюванні довжин.

3. Аналітичний спосіб, який полягає в тому, що y виражають через x за допомогою формули, що показує, які дії треба виконати з аргументом x, щоб отримати значення y. Аналітичний спосіб дає можливість обчислити значення функції при довільному значенні аргументу, при якому вона визначена точно або з довільною точністю.

4. Словесне задання функції,яке полягає в тому, що закон, за яким обчислюється y, виражається словами.

Нулі функції. Значення аргументу, при якому функція дорівнює 0, називається нулем функції. Функція може мати декілька нулів. Наприклад, функція $y = x(x+1)(x-3)$ має три нулі: $x = 0,\ x = -1,\ x = 3$. Геометрично нуль функції – це абсциса точки перетину графіка функції з віссю Ox. На рис. 4.1 зображено графік функції з нулями $x = a,\ x = b$ і $x = c$.

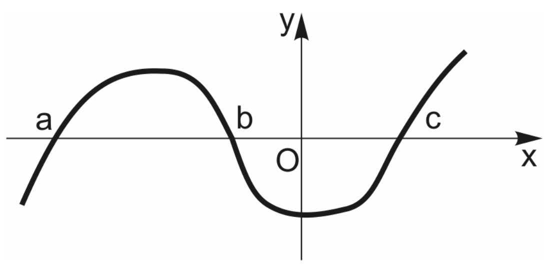


Рис. 4.1

Монотонна функція. Функція $f(x)$ *зростає* на деякому проміжку, якщо для всіх x_1 і x_2 з цього проміжку з нерівності $x_1 < x_2$ випливає нерівність $f(x_1) < f(x_2)$. Функція $f(x)$ *спадає* на деякому проміжку, якщо для всіх x_1 і x_2 з цього проміжку з нерівності $x_1 < x_2$ випливає нерівність $f(x_1) > f(x_2)$. Функція, яка спадає або зростає на певному проміжку, називається монотонною на цьому проміжку.

Обмежена і необмежена функції. Функція називається обмеженою, якщо існує таке додатне число M, що $|f(x)| \le M$ для всіх значень x. Якщо такого числа не існує, то функція не обмежена. Так, наприклад, функція на рис. 4.2 обмежена, але не монотонна, а на рис. 4.3 - монотонна, але не обмежена.

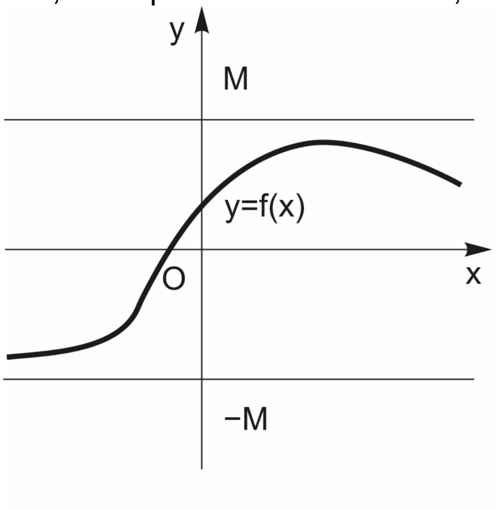


Рис. 4.2

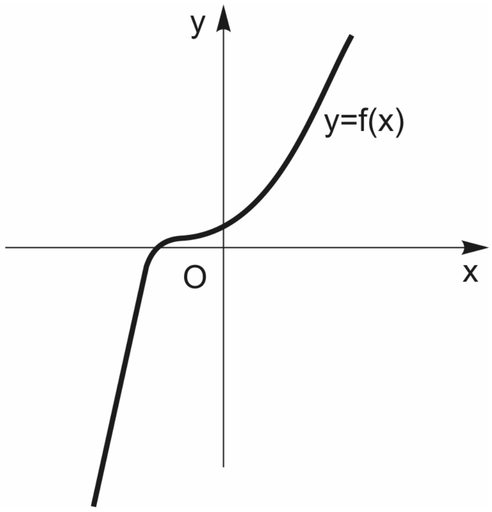


Рис. 4. 3

Неперервна і розривна функції. Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці $x = a$, якщо:

1) функція визначена при $x = a$, тобто $f(a)$ існує;
2) існує скінченна границя $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; 3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Якщо не виконується хоч одна з цих умов, то функція називається розривною в точці $x = a$. Якщо функція неперервна в кожній точці області визначення, то вона називається неперервною функцією. Функція $y = \dfrac{3x}{x-5}$, графік якої наведено на рис. 4.4, розривна при $x = 5$, оскільки не визначена при $x = 5$. В усіх інших точках вона неперервна. Функція $y = \dfrac{|x|}{x}$ (рис. 4.5) розривна при $x = 0$.

Асимптота. Якщо графік функції необмежено наближається до деякої прямої при віддаленні від початку координат, то ця пряма називається асимптотою.

Парна і непарна функції. Якщо для будь-якого x з області визначення функції виконується $f(-x) = f(x)$, то функція називається парною; якщо – $f(-x) = -f(x)$, то функція називається непарною. Графік парної функції симетричний відносно осі $0y$ (рис. 4.6), а графік непарної функції симетричний відносно початку координат (рис. 4.7).

Періодична функція. Функція $f(x)$ – періодична, якщо існує таке відмінне від нуля число T, що для будь-якого x з області визначення функції виконується рівність

$f(x+T)=f(x)$. Таке найменше число називається періодом функції.

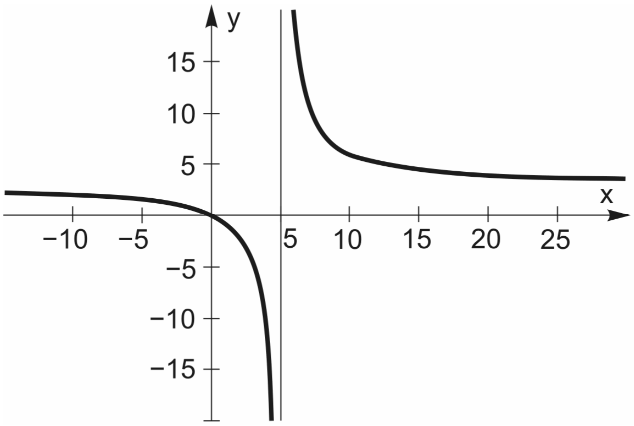


Рис. 4.4

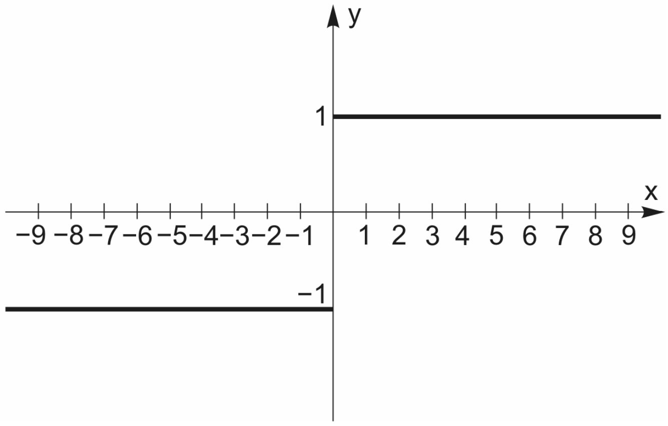


Рис. 4.5

Приклад 4.2. Довести, що $\sin x$ має період 2π.

Розв'язання. Відомо, що $\sin(x+2\pi n)=\sin x,$ де $n=0, 1, 2, \ldots,$ тому додавання

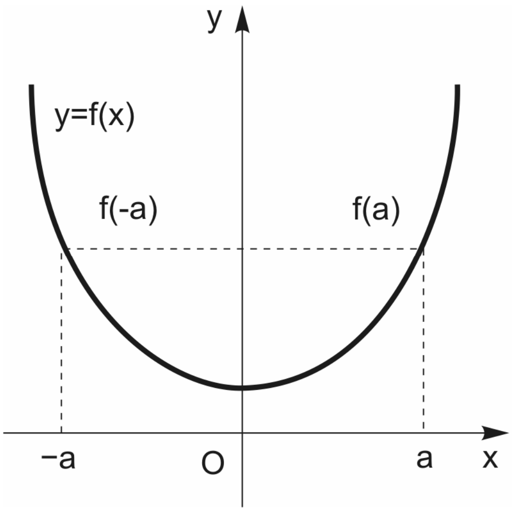


Рис. 4.6

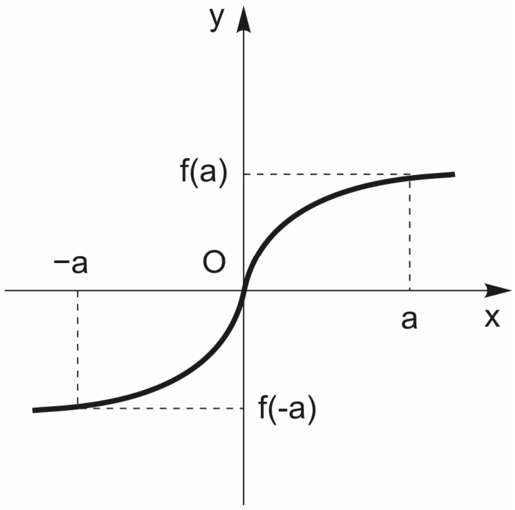


Рис. 4.7

$2\pi n$ до аргументу синуса не змінює його значення. Чи є інше число з такою властивістю? Припустимо, що P – таке число, тобто рівність $\sin(x+P)=\sin x$ виконується для будь-якого значення x. Але тоді воно має місце і при $x=\dfrac{\pi}{2},$ тобто $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+P\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1.$ Однак за формулою зведення $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+P\right)=\cos P.$ Тоді з двох останніх рівностей випливає, що $\cos P=1$. Але це правильно лише при $P=2\pi n.$ Оскільки найменшим відмінним від нуля числом з $2\pi n$ є 2π, то це число і є періодом $\sin x$. Аналогічно можна довести, що 2π є періодом і для $\cos x$.

Приклад 4.3. Яке число є періодом функції $\sin 2x$?

Розв'язання. Оскільки $\sin 2x=\sin(2x+2\pi n)=\sin(2(x+\pi n)),$ то додавання πn до аргументу x не змінює значення функції. Найменше відмінне від нуля число з πn є π. Таким чином, воно і є періодом $\sin 2x$.

Обернена функція. Припустимо, що на проміжку $\langle a;b\rangle$ визначена функція $y=f(x)$. Нехай область зміни цієї функції – проміжок $\langle c;d\rangle$. Якщо для всіх $y\in\langle c;d\rangle$

рівняння $f(x)=y$ має лише один розв'язок, який належить проміжку $\langle a;b\rangle$, то на проміжку $\langle c;d\rangle$ можна розглянути таку функцію φ: для кожного z позначимо через $\varphi(z)$ корінь рівняння $f(x)=z$, тобто $f(\varphi(z))=z$ для всіх z з проміжку $\langle c;d\rangle$. Визначена так функція φ називається оберненою f на проміжку $\langle a;b\rangle$.

Якщо функція визначена на довільній множині X і кожного свого значення набуває тільки раз, то існує обернена f функція φ, визначена на всій області зміни функції f – Y; областю зміни φ є множина X .

Знаходження оберненої функції зводиться до розв'язування рівняння $y=f(x)$ відносно x.

Якщо одному значенню y з області зміни f відповідає кілька значень x, то обернена функція для f на всій області визначення не існує, але f має обернену функцію на кожному інтервалі монотонності.

Якщо функція φ обернена до функції f і $y=f(x)$, то $x=\varphi(y)$. Отже, якщо точка $M(a;f(a))$ належить графіку функції f, то точка $N(f(a);a)$ належить графіку функції φ. Але ці дві точки симетричні відносно прямої $y=x$. Тому, щоб побудувати графік функції $y=\varphi(x)$, оберненої до функції $f(x)$, треба графік функції $y=f(x)$ симетрично відобразити відносно бісектриси першого і третього координатних кутів. На рис. 4.8 зображено графіки обернених функцій $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$.

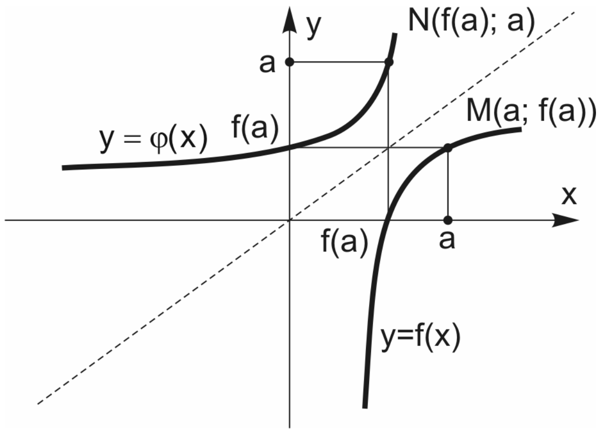


Рис. 4.8

Приклад 4.4. Записати функцію, обернену до функції $y=2x^3+1$, і побудувати її графік.

Розв'язання. Функція монотонна, тому обернена на всій області визначення, якою є множина дійсних чисел. Щоб скласти формулу оберненої функції, розв'яжемо рівняння $y=2x^3+1$ відносно змінної x: $x=\sqrt[3]{\dfrac{y-1}{2}}$. Оскільки зазвичай ми позначаємо незалежну змінну – x , а функцію – y, то в отриманому виразі поміняємо місцями змінні. Функція $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{2}}$ і є оберненою до даної. Графіки цих функцій наведено на рис. 4.9.

Складена функція. Розглянемо функцію $y=\sin(2x)$. Фактично цей запис означає такий ланцюжок функціональних перетворень:

$$u=2x \to y=\sin u.$$

У загальному вигляді останні перетворення можна записати так:

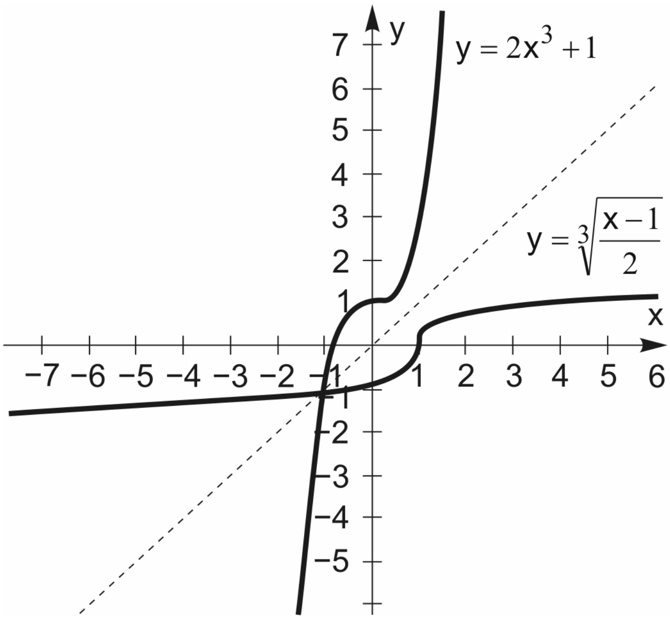


Рис. 4.9

$$u=f_1(x),\ y=f_2(u) \text{ або } y=f\left[u(x)\right].$$

Маємо два послідовних правила відповідності (тобто функції), використовуючи які отримаємо y як функцію від x. У цьому випадку говоримо, що y – складена функція від x.

Приклад 4.5. Наступні функції є складеними: $y=\sqrt{|\sin x|}$, $y=\cos\frac{1}{x}$, $y=\log_a\left(x^3+1\right)$.

Розв'язання. Ланцюжок перетворень для першої з них такий: $u=\sin x \to v=$ $=|u| \to y=\sqrt{v}$. Для другої: $u=\frac{1}{x} \to y=\cos u$; для третьої: $u=x^3+1 \to y=\log_a u$.

Графік функції. Графіком функції називається множина точок координатної площини, абсцисами яких є значення аргументу x з області визначення функції, а ординатами – значення функції y з області значень.

4.2. Графіки алгебраїчних функцій

Лінійна функція. Функція вигляду $y=kx+b$ називається *лінійною функцією*. Графіком функції є *пряма лінія*, яку можна побудувати за двома точками. Наприклад, якщо $x=0$, то $y=b$, отже, $M_1(0;b)$ – точка перетину з віссю $0y$; якщо $y=0$, то $x=-\frac{b}{k}$, маємо точку $M_1\left(-\frac{b}{k};0\right)$ – точку перетину з віссю $0x$.

Множник k називається *кутовим коефіцієнтом*. Його геометричний зміст – $k=tg\alpha$, де α – кут нахилу прямої до додатного напрямку осі $0x$ $(\alpha\in[0;\pi))$ (рис. 4.10).

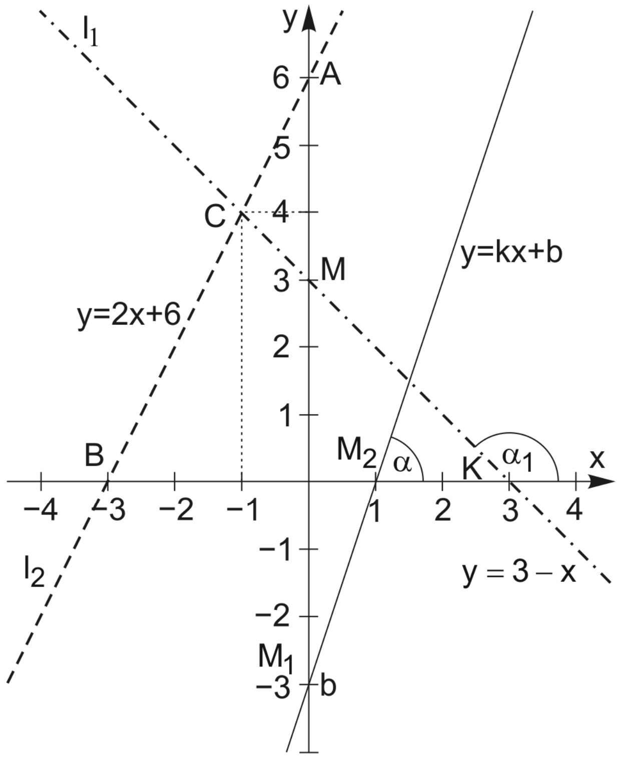


Рис. 4.10

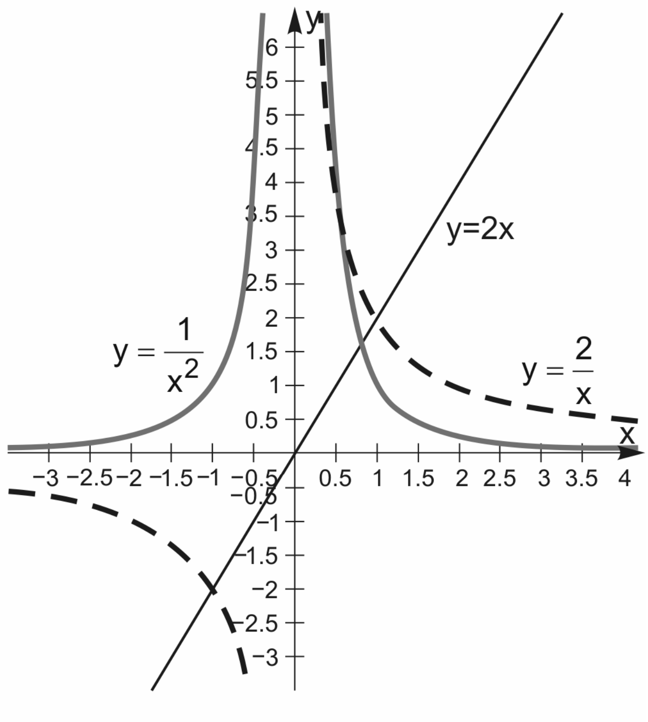


Рис. 4.11

Приклад 4.6. Побудувати прямі $l_1: y=3-x$ і $l_2: y=2x+6$. Знайти точку перетину прямих і кут нахилу прямої l_1 до осі $0x$.

Розв'язання. 1) На l_1: якщо $x=0$, то $y=3$, отже, $M(0;3)$ – точка перетину з віссю $0y$; якщо $y=0$, то $x=3$, отже, $K(3;0)$ – точка перетину з віссю $0x$. Таким чином, якщо відмітити точки M і K і провести через них пряму, то одержимо графік заданої функції l_1. Аналогічно на l_2 маємо $A(0;6)$ і $B(-3;0)$ – точки перетину відповідно з осями $0y$ і $0x$. Отже, з'єднуючи точки A і B, одержимо пряму l_2 (рис. 4.10). 2) Щоб знайти точку перетину двох графіків, треба прирівняти обидві функції: $3-x=2x+6$. Розв'язком рівняння є $x=-1$. Підставимо -1 у будь-яке з рівнянь заданих прямих і одержимо ординату точки перетину $y=4$. Отже, $C(-1;4)$ – шукана точка. 3) Оскільки $k=tg\alpha_1=-1,$ то $\alpha_1=3\pi/4$.

Пряма і обернена пропорційність. Найпростіший вигляд має рівняння прямої, яка проходить через початок координат: $y=kx$. Таке співвідношення між змінними x і y називається *прямою пропорційністю*, а число k - *коефіцієнтом пропорційності* (рис. 4.11, k =2).

Співвідношення $y=\dfrac{k}{x}$ називається оберн*еною пропорційністю*. Графіком функції є *гіпербола*. Зазвичай гіперболу будують за точками. Оскільки функція $y=\dfrac{k}{x}$ є непарною, то спочатку будують одну гілку (для $x>0$), а другу будують симетрично початку координат. Прямі $x=0,\ y=0$ є асимптотами графіка (див. рис. 4.11, k =2).

Приклад 4.7. Побудувати графік функції $y=\dfrac{2}{x}$.

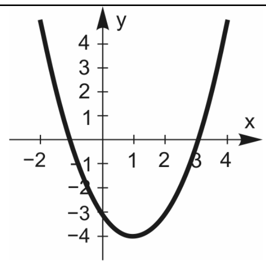
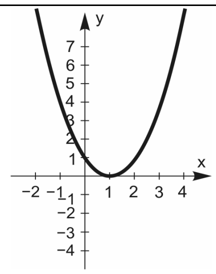
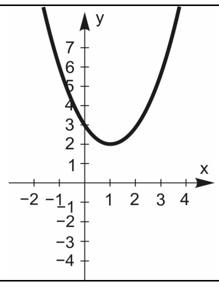
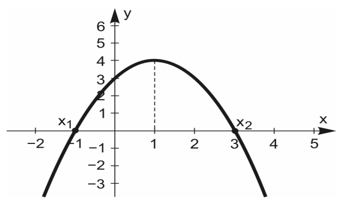
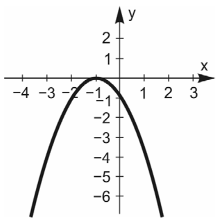
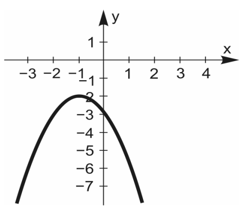
Розв’язання. Обчислимо кілька значень функції та запишемо їх для зручності у табл. 4.2. З урахуванням симетрії та наявності асимптот будуємо за точками задану криву (див.рис. 4.11).

Таблиця 4.2

x	0,5	1	2	4
y	4	2	1	0,5

Квадратична функція. Функція вигляду $y=ax^2+bx+c$ називається *квадратичною функцією*. Її графіком є *парабола*. Залежно від коефіцієнта a та дискримінанта $D=\sqrt{b^2-4ac}$ графік цієї функції може мати вигляд, наведений у табл. 4.3.

Таблиця 4.3

a \ D	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$a>0$			
$a<0$			
Абсциси вершин	$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ $x_1\neq x_2$, $x_в=-\dfrac{b}{2a}$	$x_1=x_2=x_в=-\dfrac{b}{2a}$	$x_в=-\dfrac{b}{2a}$

Степенева функція. Функція вигляду $y=x^{\alpha}$, де $\alpha\in R$ (довільна стала) – показник степеня, називається *степеневою функцією* від незалежної змінної x. На рис. 4.12 наведено графіки степеневих функцій при деяких додатних значеннях α, на рис. 4.11 – для від’ємних.

Аналізуючи графіки, які наведено на рис. 4.11 і 4.12, можна зазначити таке:

1) функції $y=kx$, $y=k/x$, $y=kx^2$ є частковими випадками степеневої функції;

2) коли $\alpha>0$, всі графіки проходять через точки (0;0) і (1;1);

3) якщо $x>1$, то більшому значенню α відповідає більше значення y;

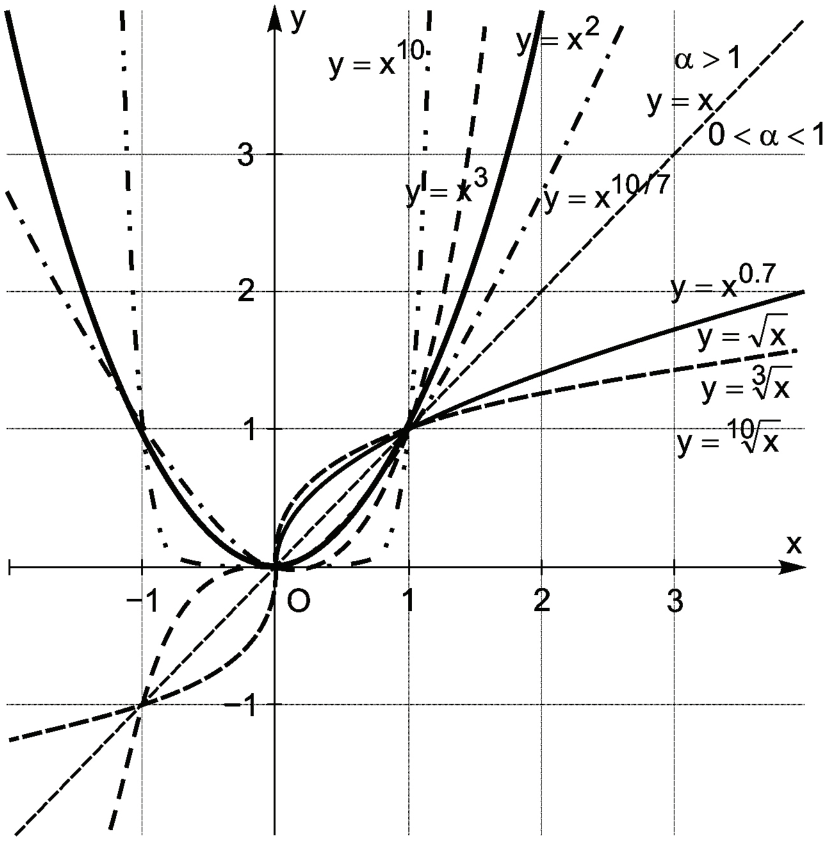


Рис. 4.12

4) коли $\alpha < 0$, то $x \neq 0$ і лінії $x = 0$ і $y = 0$ є асимптотами графіка функції;

5) якщо α – парне, то графік розташовано у I та II чвертях, а якщо непарне – у I та III чвертях.

4.3. Графіки тригонометричних функцій

Основними тригонометричними функціями є функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Графіки цих функцій наведено на рис. 4.13 – 4.16.

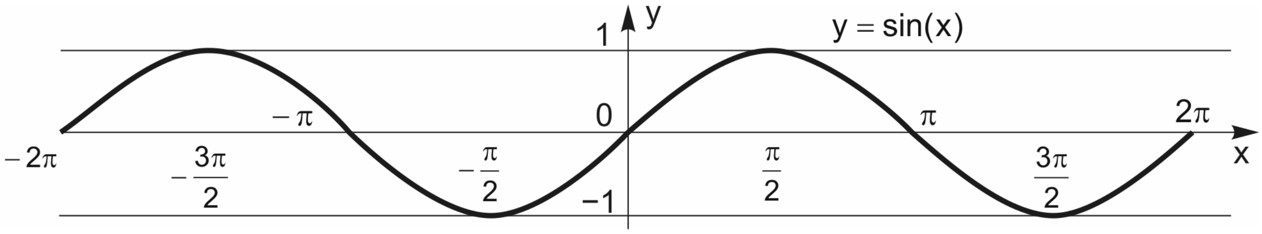


Рис. 4.13

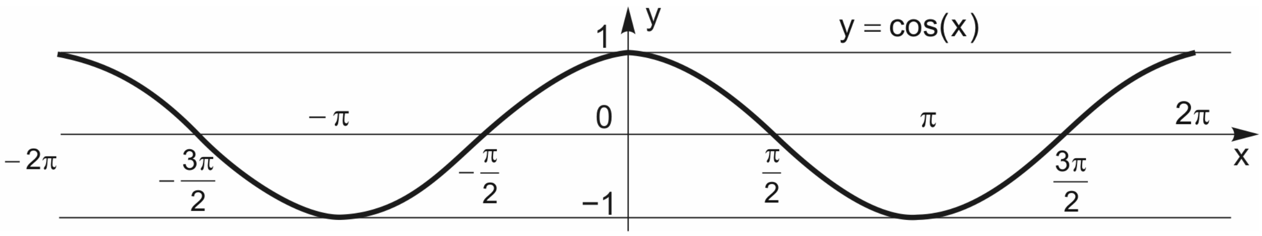
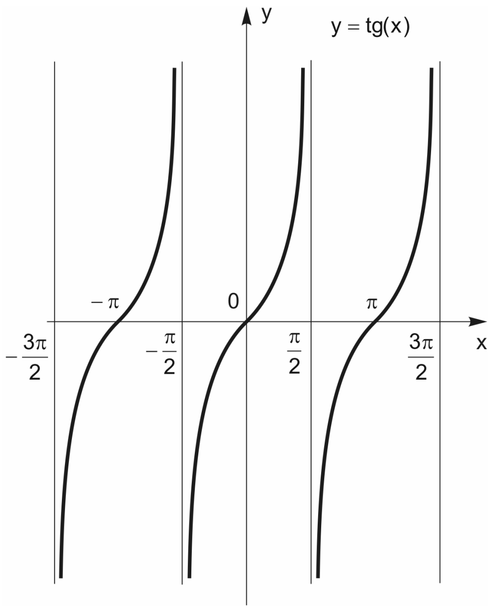


Рис. 4.14



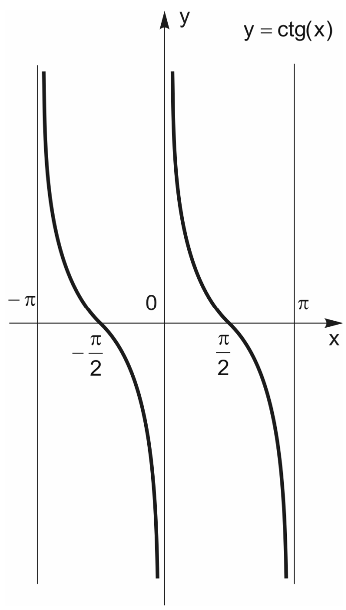
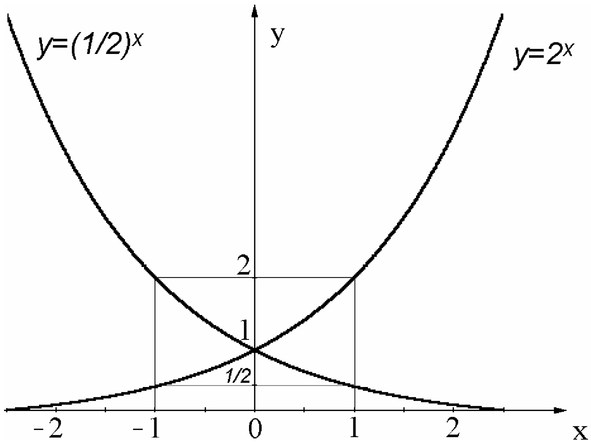


Рис. 4.15

Рис. 4.16

4.4. Графіки показникової та логарифмічної функцій

Означення. Функція вигляду $y = a^x$, де a – будь-яке додатне число, що не дорівнює 1, а x – будь-яке дійсне число, називається **показниковою**. Графіки показникової функції для значень $a = 2 > 1$ і $0 < a = 1/2 < 1$ наведено на рис. 4.17.



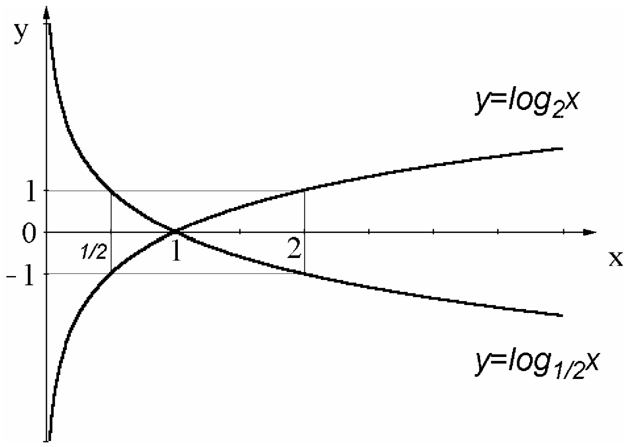


Рис. 4.17

Рис. 4.18

Означення. Функція вигляду $y = \log_a x$, де $a > 0$ і $a \neq 1$, називається **логарифмічною.** Графіки логарифмічної функції для значень $a = 2 > 1$ і $0 < a = 1/2 < 1$ наведено на рис. 4.18.

4.5. Графіки обернених тригонометричних функцій

Оберненими тригонометричними функціями називаються функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$.

1. $y = \arcsin x$. Область визначення функції: $D(y) = x, x \in [-1, 1]$, область змінювання функції – $E(y) = y, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Ця функція – обернена до функції $y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$. Графік функції наведено на рис. 4.19. Основні тототожності:

$\arcsin(-x) = -\arcsin x, |x| \le 1;$ $\sin(\arcsin x) = x, |x| \le 1;$ $\arcsin(\sin x) = x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right].$

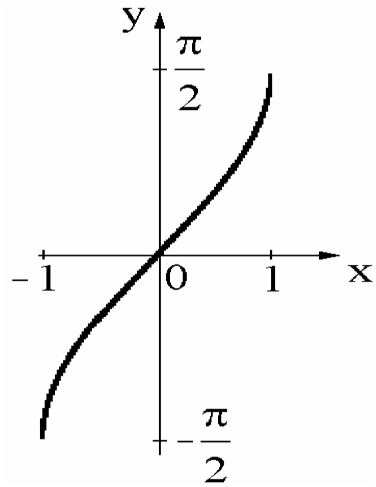


Рис. 4.19

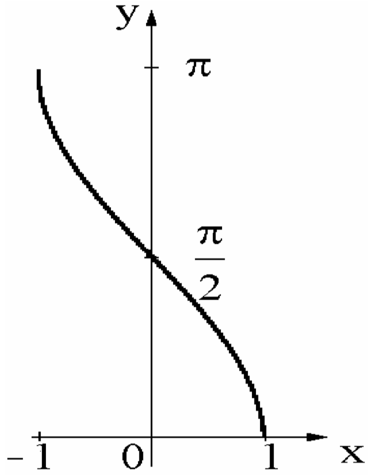


Рис. 4.20

2. $y = \arccos x$. Область визначення функції: $D(y) = x, \quad x \in [-1, 1]$, область змінювання функції – $E(y) = y, \quad y \in [0, \pi]$. Ця функція – обернена до функції $y = \cos x, x \in [0, \pi]$. Графік функції наведено на рис. 4.20. Основні тототожності:

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, |x| \le 1;$ $\cos(\arccos x) = x, |x| \le 1;$

$\arccos(\cos x) = x, x \in [0, \pi];$ $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, |x| \le 1.$

3. $y = arctgx$. Область визначення функції: $D(y) = x, x \in (-\infty, +\infty)$, область змінювання функції – $E(y) = y, \ y \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2});$ $y = \pm\frac{\pi}{2}$ – горизонтальні асимптоти при $x \to \pm\infty$. Ця функція – обернена до функції $y = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$. Графік функції наведено на рис. 4.21. Основні тототожності:

$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, x \in (-\infty, +\infty);$ $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, x \in (-\infty, +\infty);$

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, x \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}).$

4. $y = arcctgx$. Область визначення функції: $D(y) = x, x \in (-\infty, +\infty)$, область змінювання функції – $E(y) = y, \ y \in (0, \pi)$; $y = 0$ і $y = \pi$ – горизонтальні асимптоти при $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$ відповідно. Ця функція – обернена до функції $y = \operatorname{ctg} x, x \in (0, \pi)$. Графік функції наведено на рис. 4.22. Основні тототожності:

$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x, x \in (-\infty, +\infty);$ $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, x \in (-\infty, +\infty);$

$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, x \in (0, \pi).$

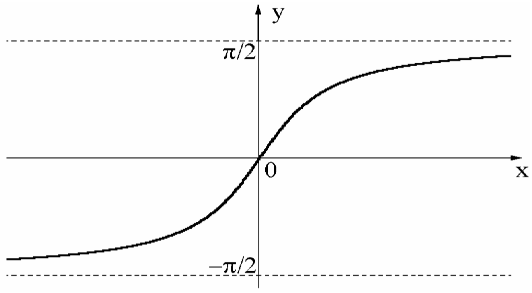


Рис. 4.21

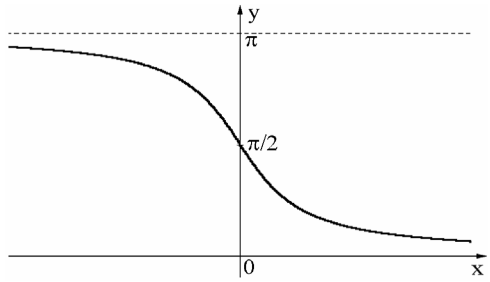


Рис. 4.22

Приклад 4.8. Побудувати графік функції $y=\sin(\arccos x)$.

Розв'язання. Оскільки $\arccos x\in[0,\pi]$, то

$$\sin\left(\arccos x\right)=\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}=\sqrt{1-x^2},x\in[-1,1].$$

Таким чином, $y=\sqrt{1-x^2},x\in[-1,1]$. Графіком цієї функції є напівколо одиничного радіуса, розташоване у верхній півплощині (рис. 4.23).

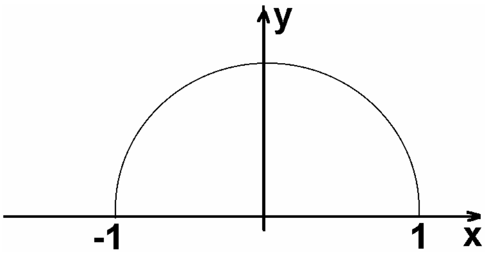
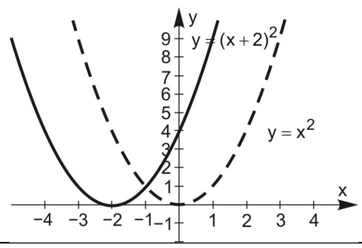
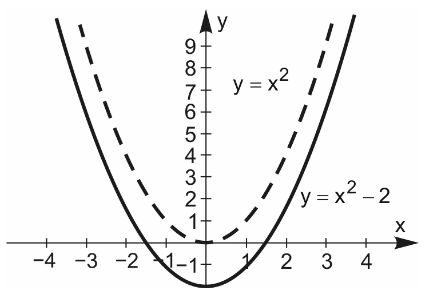


Рис. 4.23

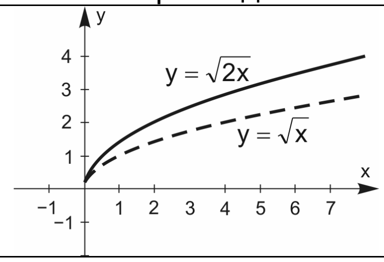
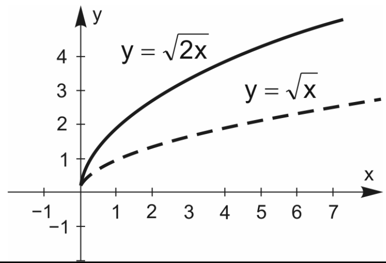
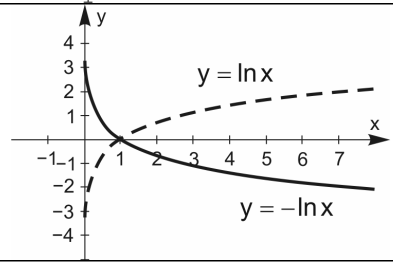
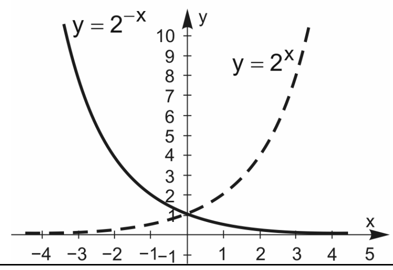
4.6. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень

У табл. 4.4 показано, як за допомогою геометричних перетворень (паралельний перенос, симетрія, стиск і розтяг) можна отримати графіки відповідних функцій з графіка функції $y=f\left(x\right)$.

Таблиця 4.4

Функція	Перетворення	Приклад
$y=f\left(x\pm a\right)$	паралельне перенесення графіка функції $y=f\left(x\right)$ на *a* одиниць вправо (якщо «−») або вліво (якщо «+»)	
$y=f\left(x\right)\pm b$	паралельне перенесення графіка функції $y=f\left(x\right)$ на *b* одиниць вниз (якщо «−») або вгору (якщо «+»)	

Закінчення табл. 4.4

Функція	Перетворення	Приклад
$y=f(mx)$	стиск або розтяг графіка функції $y=f(x)$ уздовж осі $0x$ (розтяг – якщо $0<m<1$, стиск – якщо $m>1$)	
$y=kf(x)$	стиск або розтяг графіка функції $y=f(x)$ уздовж осі $0y$ (стиск – якщо $0<k<1$, розтяг – якщо $k>1$)	
$y=-f(x)$	симетрія графіка функції $y=f(x)$ відносно осі $0x$	
$y=f(-x)$	симетрія графіка функції $y=f(x)$ відносно осі $0y$	

Приклад 4.9. Побудувати графік дробово-лінійної функції $y=\dfrac{2x+7}{x+1}$.

Розв'язання: Виділимо цілу частину: $\dfrac{2x+7}{x+1}=\dfrac{2x+2+5}{x+1}=2+\dfrac{3}{x+1}$. Отже, функція набуває вигляду $y=2+\dfrac{3}{x+1}$. Графік (рис. 4.24) цієї функції можна побудувати з графіка $y=\dfrac{1}{x}$ за допомогою ланцюжка елементарних перетворень (див. табл. 4.2), а саме:

$$y_1=\frac{1}{x}\Rightarrow y_2=3y_1=\frac{3}{x}\Rightarrow y_3=y_2(x+1)=\frac{3}{x+1}\Rightarrow y_4=y_3+2=\frac{3}{x+1}+2.$$

Зауваження. Під час останніх двох перетворень треба перенести асимптоти $x=0\Rightarrow x=-1,\ y=0\Rightarrow y=2$ і центр симетрії $O(0;\,0)\Rightarrow O(-1;\,2)$.

Приклад 4.10. Побудувати графік функції $y=2\sin\dfrac{x}{2}$.

Розв'язання. Графік цієї функції (рис. 4.25) можна отримати з графіка функції

$y = \sin x$ (див. рис. 4.13) в результаті розтягнення останнього в два рази вздовж осей $0x$ і $0y$.

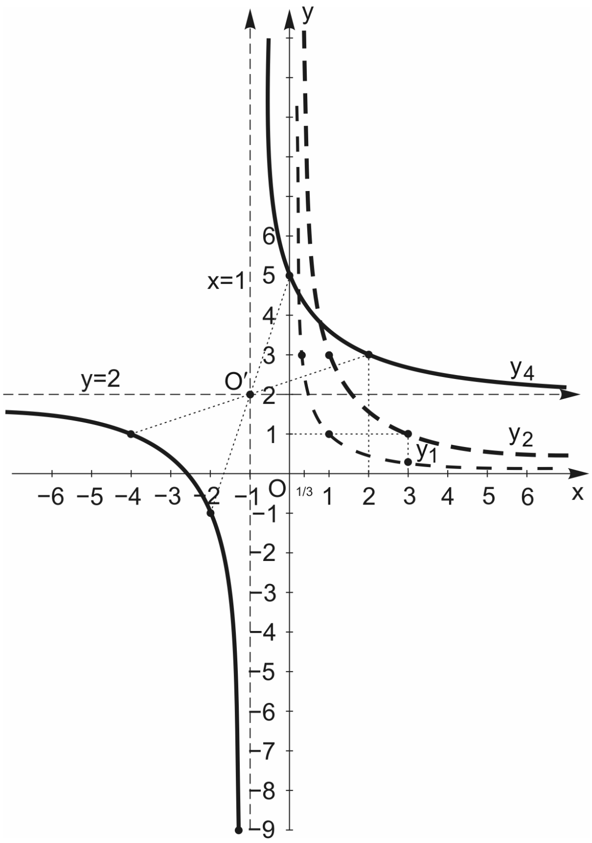


Рис. 4.24

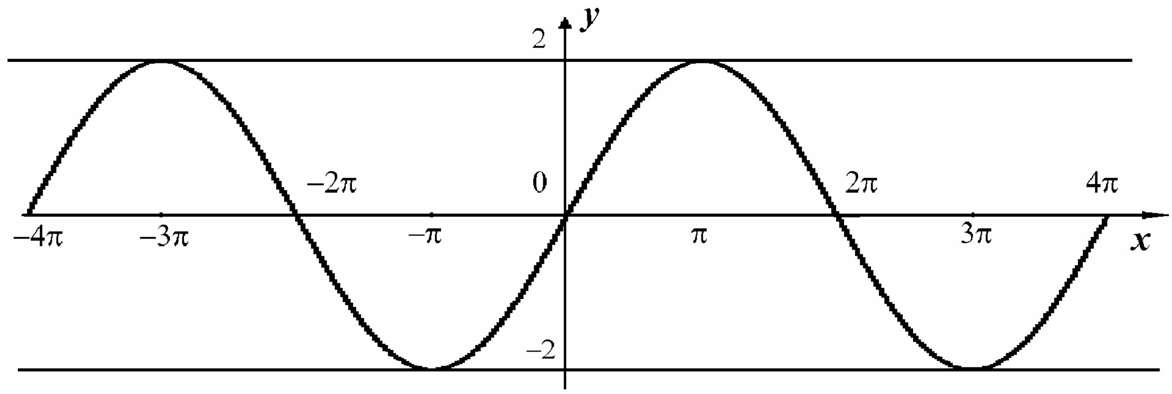


Рис. 4.25

Приклад 4.11. Побудувати графік функції $y = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$.

Розв'язання. Перепишемо функцію у вигляді $y = 3\cos 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$. У системі координат $X_1O_1Y_1$ (пунктирні лінії) побудуємо графік функції $y_1 = 3\cos 2x_1$, а потім вісь O_1X_1 перенесемо на одиницю вниз (вісь Ox), а вісь O_1y_1 – на $\frac{\pi}{6}$ ліворуч (рис. 4.26).

Приклад 4.12. Побудувати графік функції $y = 2^{x+1}$.

Розв'язання. Отримаємо цей графік з графіка $y = 2^x$ перенесенням уздовж осі x на одиницю вліво (рис. 4.27).

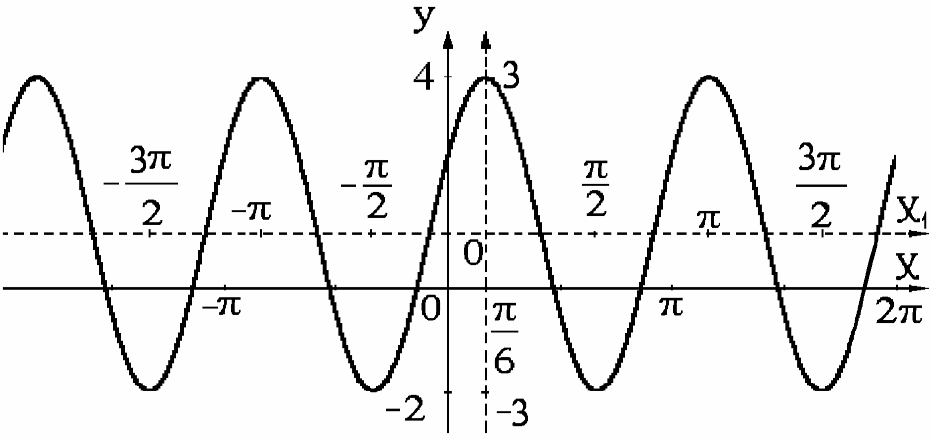


Рис. 4.26

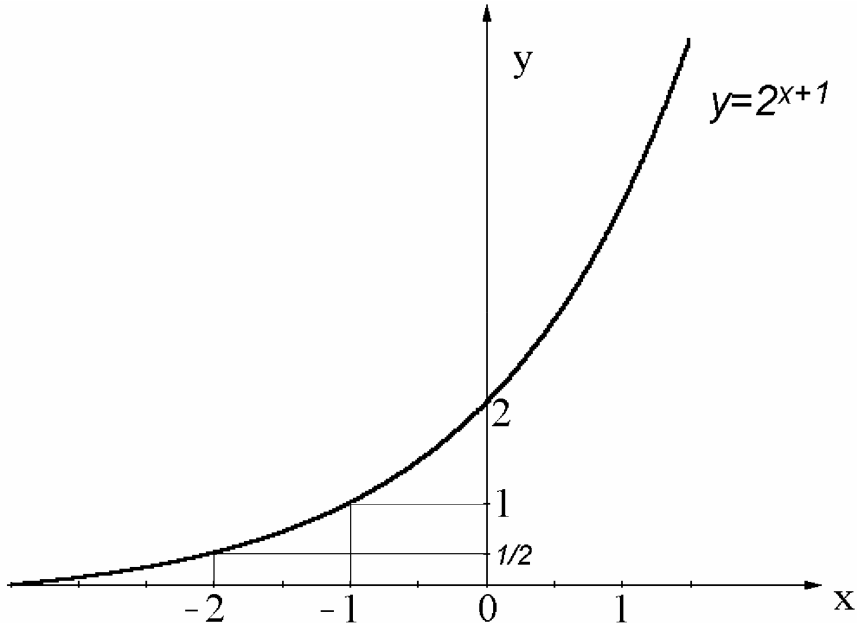


Рис. 4.27

Приклад 4.13. Побудувати графік функції $y = \log_2(x-1)$.

Розв'язання. Графік цієї функції отримаємо з графіка функції $y = \log_2 x$ перенесенням на одиницю вправо вздовж осі x. Пряма $x = 1$ – вертикальна асимптота (рис. 4.28).

Завдання для самостійної роботи

4.1. Знайти область визначення функції:

a) $y = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$; b) $y = \dfrac{x}{\sqrt{3x^2-1}} + \dfrac{1}{x-2}$; c) $y = \dfrac{x^2-5}{2x^2-1} + \sqrt{x}$;

d) $y = 2\operatorname{ctg} 3x$; e) $y = 3\operatorname{tg} 2x$; f) $y = \dfrac{1}{\cos x}$; g) $y = \dfrac{1}{2\sin x + 3}$.

4.2. Дослідити функцію на парність або непарність:

a) $y = x^3 + 2x;$ b) $y = \sqrt[3]{(x+1)^2}$; c) $f(x) = x^3 - 3x + tg3x;$ d) $f(x) = \dfrac{3x^2}{4\cos x};$

e) $f(x) = x^4 - 2x^2 - \sin^2 3x;$ f) $y = \sin 2x + \sin 3x + \sin x(\cos x + \cos 3x)$.

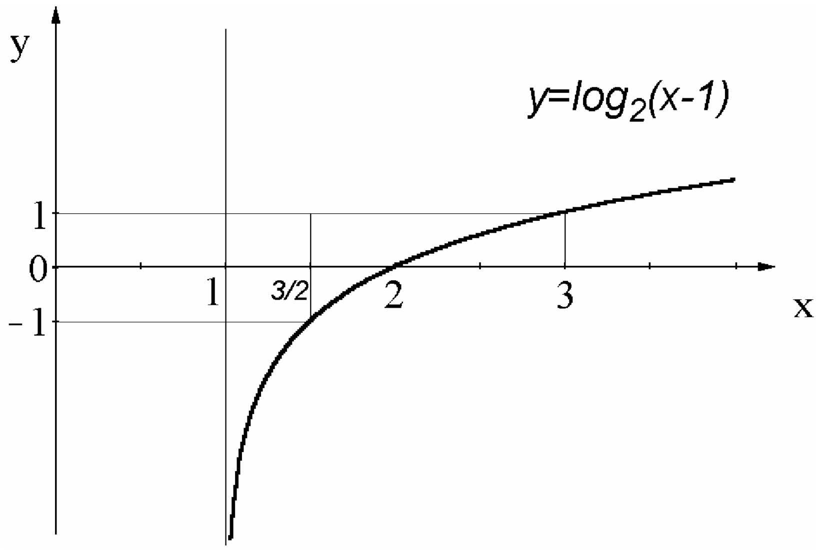


Рис. 4.28

4.3. Побудувати графіки функцій:

a) $y = -x^2 - 4x + 3$; b) $y = x^2 + 4x - 5$; c) $y = x^2 - 4|x| + 3$; d) $y = x^2 + 3|x| - 4$.

4.4. Побудувати графіки функцій:

a) $y = 3^x;$ b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1;$ c) $y = 3^{|x|+1};$ d) $y = -\frac{1}{2}\cdot 3^x;$ e) $y = 3^{x+1};$

f) $y = 2^{x-1};$ g) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$; h) $y = 2^{x+|x|};$ i) $y = \log_{\frac{1}{3}}(-x);$ j) $y = \log_3(2-x);$

к) $y = \log_3|x-1|;$ l) $y = \log_2 x - 2;$ м) $y = \log_{\frac{1}{3}} x - 3;$ n) $y = 2 + \log_2 x.$

4.5. Побудувати графіки функцій:

a) $y = \cos 2x;$ b) $y = \sin 2x;$ c) $y = 2\cos 4x;$ d) $y = -2\cos\dfrac{x}{3};$ e) $y = \cos x + |\cos x|;$

f) $y = |\cos x| - 1;$ g) $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right);$ h) $y = \dfrac{|\sin x|}{\sin x};$ i) $y = 3\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right);$

j) $y = 3\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 2;$ k) $y = \dfrac{1}{2}\sin\left(3x - \dfrac{3\pi}{4}\right) + 2;$ l) $y = 2\,\mathrm{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right);$

m) $y = -2\,\mathrm{ctg}\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right).$

4.6. Побудувати графіки функцій:

a) $y = \sin(\arcsin x)$; b) $y = \cos(\arcsin x)$; c) $y = \mathrm{tg}(\arccos x)$;

d) $y = \arccos(x - \pi)$; e) $y = 2\arcsin(x + \pi) + 1$.

Розділ 5. РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ

5.1. Рівняння та нерівності. Основні означення

Рівнянням з однією змінною називається рівність, що містить цю змінну, яку називають невідомою.

Розв'язком (або коренем) рівняння називається таке значення змінної, яке при підстановці його у рівняння перетворює його на правильну числову рівність.

Розв'язати рівняння – це знайти всі його корені або довести, що коренів немає.

Два рівняння $f_1(x) = g_1(x)$ і $f_2(x) = g_2(x)$ називаються **рівносильними**, якщо множини їх розв'язків збігаються.

Якщо всі корені рівняння $f_1(x) = g_1(x)$ є коренями рівняння $f_2(x) = g_2(x)$, то друге рівняння називають наслідком першого.

Для пошуку коренів рівняння над його частинами здійснюють деякі перетворення із метою спрощення, наприклад:

1. Додавання до обох частин одного й того ж виразу.
2. Множення обох частин на один і той же вираз.
3. Скорочення обох частин на один і той же вираз.
4. Піднесення обох частин до одного степеня.
5. Логарифмування або потенціювання обох частин за однаковою основою та ін.

Зауважимо, що при перетвореннях рівняння ***не завжди зберігається рівносильність***, тобто у процесі перетворення можна як втратити корені, так і придбати так звані «зайві».

Проілюструємо сказане на прикладах рівнянь різного вигляду.

Приклад 5.1. Розв'язати ірраціональне рівняння $\sqrt{x-7} = x - 13$.

Розв'язання. Після визначення ОДЗ рівняння $x \geq 7$ піднесемо обидві його частини до квадрата і отримаємо $x - 7 = x^2 - 26x + 169$ або $x^2 - 27x + 176 = 0$. Корені квадратного рівняння $x_1 = 11,\ x_2 = 16$. Перевіркою легко переконатись в тому, що число 16 дійсно задовольняє наше рівняння, а от число 11 – ні. Справа в тому, що при піднесенні обох частин до ***парного*** степеня неправильна рівність $2 = -2$ перетворилась у правильну $4 = 4$.

Приклад 5.2. Розв'язати рівняння $\dfrac{4}{(x+1)(2-x)} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2x}{x^2 - x - 2} = 1$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \neq -1, x \neq 2$. Спільний знаменник ліворуч дорівнює добутку $(x+1)(x-2)$ і рівняння перетворюється на $\dfrac{-4 + x - 2 + 2x}{(x-2)(x+1)} = 1$ або $\dfrac{3(x-2)}{(x-2)(x+1)} = 1$.

Після скорочення маємо $\dfrac{3}{x+1} = 1$, звідки $x = 2$. Але це число не є розв'язком , тому що не задовольняє ОДЗ.

Подальший пошук розв'язків для різноманітних класів рівнянь здійснюється різними методами, серед яких слід особливо зупинитися на методі заміни змінної та методі факторизації (тобто розкладання на множники від слова «factor» – множник).

Метод факторизації можна застосувати для розв'язання кубічних, тригонометричних та інших рівнянь.

Приклад 5.3. Знайти корені рівняння $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$.

Розв'язання. Можна спробувати знайти корені спочатку серед чисел $\pm 1, \pm 2$. Число $x=2$ перетворює рівняння на тотожність. Тому ліва частина є добутком виразу $(x-2)$ і полінома другого степеня, а саме $2x^2+5x-3$. Рівняння перетворилось на $(x-2)\left(2x^2+5x-3\right)=0$, яке має корені $x_1=2,\ x_2=-3,\ x_3=\frac{1}{2}$.

Приклад 5.4. Знайти корені рівняння $(1+\cos 4x)\sin 4x=\cos^2 2x$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді $2\cos^2 2x\sin 4x=\cos^2 2x$, $\cos^2 2x(2\sin 4x-1)=0$, що дає дві серії розв'язків $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$ і $x=(-1)^k\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{4}$.

Зауваження. Не можна скорочувати обидві частини рівняння на спільний множник $\cos 2x$, бо це призводить до втрати першої серії розв'язків.

Приклад 5.5. Знайти функцію, що є оберненою до функції $y=shx$.

Розв'язання. У нашому прикладі фактично потрібно розв'язати відносно x показникові рівняння $\frac{e^x-e^{-x}}{2}=y$. Це є ілюстрацією методу заміни змінної, а саме: позначимо $t=e^x,\ \ t>0$. Маємо рівняння $t-\frac{1}{t}=2y$, або $t^2-2yt-1=0$. Його додатний корінь $t=y+\sqrt{y^2+1}$, звідки $x=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$.

Дві нерівності $f_1(x)<g_1(x)$ і $f_2(x)<g_2(x)$ називаються рівносильними, якщо множини їх розв'язків збігаються. Наприклад:

1. Нерівності $f(x)<g(x)$ і $f(x)+\phi(x)<g(x)+\phi(x)$ рівносильні, якщо $\phi(x)$ визначена на ОДЗ.
2. Нерівності $f(x)<g(x)$ і $af(x)<ag(x)$ рівносильні, якщо $a>0$.
3. Нерівності $f(x)<g(x)$ і $af(x)>ag(x)$ рівносильні, якщо $a<0$.
4. Якщо обидві частини нерівності *додатні*, то можна підносити їх до степеня.

Приклад 5. 6. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2-24}\le x-2$.

Розв'язання. Визначимо ОДЗ: $x\in\left(-\infty,-\sqrt{24}\right]\cup\left[\sqrt{24},+\infty\right)$. Якщо права частина нерівності невід'ємна, тобто виконано умову $x\ge 2$, то маємо право піднести до квадрата $x^2-24\le x^2-4x+4$, або $x\le 7$. Узгодження із ОДЗ дає відповідь $x\in[2;7]$. У випадку, коли права частина від'ємна, ця нерівність не може бути виконана, тому що невід'ємне число (ліворуч) не може бути меншим, ніж від'ємне (праворуч).

Приклад 5.7. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2+7}>7-x$.

Розв'язання. На відміну від попереднього прикладу випадок $7-x<0$ є розв'язком , бо додатне число автоматично буде більшим, ніж від'ємне. Якщо ж

$7-x\ge 0$, піднесемо обидві частини до квадрата і отримаємо $x^2+7>x^2-14x+49$, або $x>3$. Дві частини відповіді $x>7$ і $\begin{cases} x\le 7, \\ x>3 \end{cases}$ можна об'єднати у множину $x\in(3,+\infty)$.

Завдання для самостійної роботи

5.1. Переконатись у тому, що рівняння не є рівносильними, і визначити причини:

a) $\dfrac{(x-9)(x+2)}{x+2}=-11$ та $x-9=-11$; b) $5^{\log_5\left(x^2-5x+6\right)}=x-3$ та $x^2-5x+6=x-3$;

c) $\sqrt{x+5}=\sqrt{2x+12}$ та $x+5=2x+12$; d) $\sin^2 x-\sin x\cos x=0$ та $\sin x-\cos x=0$;

e) $\log_7(x+2)=\log_7(3x+12)$ та $x+2=3x+12$.

5. 2. Розв'язати кубічні рівняння:

a) $x^3+4x^2+3x-8=0$; b) $x^3-3x^2+-x+3=0$; c) $3x^3+x^2-22x-24=0$;

d) $5x^3-26x^2+35x-6=0$.

5. 3. Розв'язати ірраціональні рівняння:

a) $\sqrt{5-2x}=1-x$; b) $\sqrt{5+2x}=x-5$; c) $\sqrt{3-4x+x^2}=1-x$; d) $\left(x^2-25\right)\sqrt{3-x}=0$.

5. 4. Розв'язати рівняння методом заміни:

a) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2}+\dfrac{2x^2}{x^2+2x+1}=3$; b) $x^2+5x-3\sqrt{x^2+5x-2}=0$.

5. 5. Розв'язати нерівності:

a) $\sqrt{x+7}>13-x$; b) $\sqrt{x-1}\le 7-x$.

5.2. Метод інтервалів. Раціональні нерівності

Розглянемо функцію

$$f(x)=\frac{(x-a_1)^{n_1}\cdot(x-a_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot\left(x-a_{n_k}\right)^{n_k}}{(x-b_1)^{m_1}\cdot(x-b_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot\left(x-b_{m_l}\right)^{m_l}}$$

$$\left(n_1,n_2,\ldots,n_k,m_1,\ldots,m_l\in N,\ a_i\ne a_j,\ b_i\ne b_j\quad\forall i\ne j,\ a_i\ne b_j\quad\forall i,j\right).$$

Якщо всі нулі чисельника та знаменника відмітити на числовій прямій, то вони розіб'ють її на $k+l+1$ проміжків. Усередині кожного з них функція $f(x)$ неперервна та зберігає знак. Для визначення цього знака достатньо взяти будь-яку точку з цього проміжку та знайти знак функції в цій точці. На практиці для розв'язання нерівності $f(x)\ge 0\ (\le 0)$ застосовують метод інтервалів.

В основу методу інтервалів покладено такі твердження:

1. Якщо x_i – така точка, що показник степеня h_i для виразу $(x-x_i)^{h_i}$ є число непарне, то праворуч і ліворуч від x_i (на сусідніх проміжках) функція має різні знаки.

Наприклад, маємо функцію $y=(x+1)(x-4)^3$. При переході через точки $x=-1,\ x=4$ функція змінює знак.

2. Якщо a_i – така точка, що показник степеня h_i для виразу $(x-a_i)^{h_i}$ є число парне, то праворуч і ліворуч від a_i (на сусідніх проміжках) функція має однакові знаки.

Наприклад, маємо функцію $y=(x+5)^2$. При переході через точку $a=-5$ функція не змінює знак.

Алгоритм розв'язання нерівностей методом інтервалів

1. На числовій прямій позначають всі нулі чисельника і знаменника (критичні точки) заданої функції .
2. Визначають знак нерівності на кожному з числових проміжків. Обов'язково враховують парність чи непарність відповідного показника степеня.
3. Вибирають проміжки згідно зі знаком нерівності:
- якщо функція має знак "+", то на цьому проміжку $y>0$;
- якщо функція має знак "-", то на цьому проміжку $y<0$.

Приклад 5.8. Розв'язати нерівність $(x-3)(x-5)>0.$

Розв'язання.

1. Нулі заданої функції $x_1=3$ і $x_2=5$. Позначимо ці точки на числовій прямій (рис. 5.1). Оскільки нерівність строга, то точки 3 і 5 виключаємо із розв'язку.
2. Точки 3 і 5 розбивають числову пряму на 3 інтервали: $(-\infty;\,3)$; $(3;\,5)$; $(5;+\infty)$.
3. Визначимо знак нерівності на проміжку $(5;+\infty)$: нехай $x=6>5$, тоді маємо нерівність $(6-3)(6-5)>0$. Скористаємося правилом зміни знака: *на проміжку* $(3;\,5)$ знак "-"; *на проміжку* $(-\infty;\,3)$ – "+". Виберемо проміжки зі знаком нерівності "+". Тоді $x\in(-\infty;\,3)\cup(5;+\infty)$.

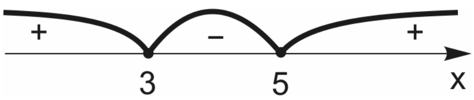


Рис. 5.1

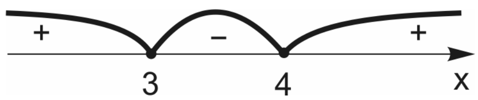


Рис. 5.2

Приклад 5.9. Розв'язати нерівність $x^2-7x+12<0$.

Розв'язання.

1. Розкладемо квадратний тричлен $y=x^2-7x+12$. Для цього розв'яжемо квадратне рівняння $x^2-7x+12=0$: $D=b^2-4ac=7^2-4\cdot12=1>0,\ x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{7-\sqrt{1}}{2\cdot1}=3,$ $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{7+\sqrt{1}}{2\cdot1}=4$. Нерівність $x^2-7x+12<0$ запишемо у вигляді $(x-3)(x-4)<0$ і застосуємо метод інтервалів.
2. $x_1=3,\ x_2=4$ – нулі функції (рис. 5.2).
3. Визначаємо знак нерівності на кожному інтервалі:

$(4;+\infty)$: нехай $x=5,\ 5>4$, тоді $(5-3)(5-4)>0$;

$(3;4)$: нехай $x=3{,}5>3$, тоді $(3{,}5-3)(3{,}5-4)<0$;

$(-\infty;3)$: нехай $x=2,\ 2<3$, тоді $(2-3)(2-4)>0$.

Виберемо проміжки зі знаком нерівності "-". Маємо $x\in(3;4)$.

Приклад 5.10. Розв'язати нерівність $(x-3)(5-x)(x+7)\le 0$.

Розв'язання.

1. Нулі заданої функції – $x_1=3,\ x_2=5,\ x_3=-7$. Вони розбивають числовий інтервал на 4 проміжки (рис. 5.3). Оскільки нерівність не строга, то точки (-7), 3 і 5 включаємо до розв'язку.

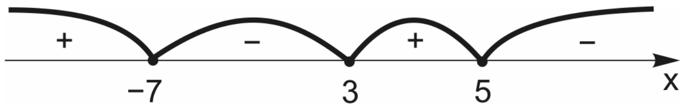


Рис. 5.3

2. Визначаємо знак нерівності на інтервалі $[5;+\infty)$: візьмемо $x=6>5$, тоді $(6-3)(5-6)(6+7)\le 0$.

3. Подвійних точок нерівність не має. Тому скористаємося умовою зміни знака: $[3;5]$ – "+"; $[-7;3]$ – "-"; $(-\infty;-7]$ – "+". Маємо $x\in[-7;3]\cup[5;+\infty)$.

Приклад 5.11. Розв'язати нерівність $\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-5)(x-3)}>0.$

Розв'язання. ОДЗ: $x\ne 5, x\ne 3$. Відмітимо на числовій прямій точки $x=2$, $x=-3$ (нулі чисельника) і $x=5$, $x=3$ (нулі знаменника). Нерівність записано в стандартному вигляді, тому праворуч від точки $x=5$ функція додатна. Усі показники степеня непарні, тому при переході через них знак лівої частини нерівності буде змінюватися (рис. 5.4). Маємо $x\in(-\infty,-3)\cup(2,3)\cup(5,+\infty)$.

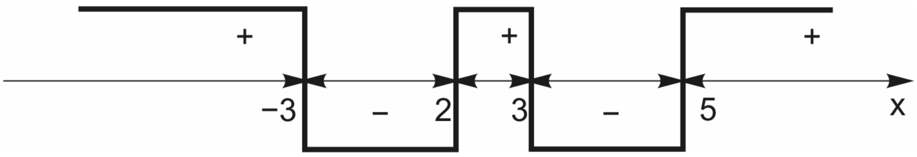


Рис. 5. 4

<u>Завдання для самостійної роботи</u>

5.6. Розв'язати нерівності:

a) $(x-1)(x-2)^3(x^2-4x+3)\ge 0$; b) $(x+5)(x-6)^4(x-8)<0$; c) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-13x+42}>0$;

d) $\dfrac{4x^2-5x-1}{2x^2-5x+3}>1$; e) $(3x-1)(x-2)^3(x+2)^4(x-5)<0$; f) $\dfrac{(x-1)(5x-2)}{3-x}>0$;

g) $(x+6)^3(x-1)^2(x-3)^{12}(x-10)^3<0$; h) $1+\dfrac{2}{x-1}>\dfrac{6}{x}$;

i) $\dfrac{x^2-4x-2}{9-x^2}>0$; j) $\dfrac{7x-4}{x+2}\ge 1$; k) $\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{5}{2+x}<1$; l) $\dfrac{3-x}{x-4}>\dfrac{1}{1-x}$.

5.3. Рівняння та нерівності, що містять x під знаком абсолютної величини

Нагадаємо означення модуля або абсолютної величини числа: модулем $|x|$ називається само число x, якщо $x\ge 0$, і $(-x)$, якщо $x<0$:

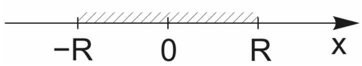
$$|x|=\begin{cases} x, x\ge 0,\\ -x, x<0.\end{cases}$$

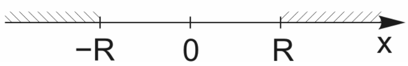
Наприклад, якщо $x\ge 6$, то $|x-6|=x-6$. А у випадку $x<6$ значення модуля таке: $|x-6|=-(x-6)=6-x$.

Геометричний зміст модуля: $|x|$- *це відстань від точки* x *до точки 0 на числовій прямій.* Отже, для $R\ge 0$ маємо:

а) $|x|<R \Leftrightarrow -R<x<R$ (рис. 5.5); б) $|x|>R \Leftrightarrow x>R$ *або* $x<-R$ (рис. 5.6);

в) $x^2\le R^2 \Leftrightarrow |x|\le R$.





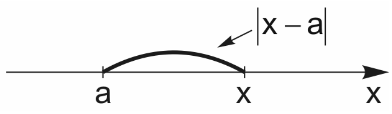


Рис. 5. 5 Рис. 5. 6 Рис. 5. 7

Корисно запам'ятати також, що $|x-a|$ є відстанню на числовій прямій від точки x до точки a (рис. 5.7).

Наприклад , на числовій прямій множина точок, що задовольняє умову $|x+3|<5$, є інтервал із центром у точці (-3) і радіусом 5, тобто інтервал від точки -8 до точки 2.

Приклад 5.12. Розв'язати рівняння $|2-3x|+2x=4$.

Розв'язання. Точка $x=\dfrac{2}{3}$ розбиває числову вісь на два проміжки, а саме, якщо $x<\dfrac{2}{3}$, то вираз під знаком модуля додатний, тому модуль *збігається із самим виразом,* і маємо систему $\begin{cases} x<\dfrac{2}{3},\\ (2-3x)+2x=4\end{cases}$ або $\begin{cases} x<\dfrac{2}{3},\\ -x=2\end{cases}$ та її розв'язок $x=-2$. У протилежному випадку після розкриття знака модуля $\begin{cases} x\ge\dfrac{2}{3},\\ -(2-3x)+2x=4\end{cases}$ отримаємо $x=\dfrac{6}{5}$. Відповідь: $x_1=-2, x_2=\dfrac{6}{5}$.

Приклад 5.13. Розв'язати рівняння $\left|2-5x-x^2\right|=4$.

Розв'язання. Для розв'язання цього рівняння краще безпосередньо проаналізувати означення модуля. Модуль числа дорівнює 4, якщо це число 4 або (-4). Наше рівняння можна замінити на два окремих рівняння, які часто записують у вигляді сукупності $\left[\begin{array}{l} 2-5x-x^2=4, \\ 2-5x-x^2=-4. \end{array}\right.$ Кожне рівняння розглянемо *окремо* і отримаємо $x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{2}, x_3=1, x_4=-6.$

Приклад 5.14. Розв'язати рівняння $x^2+9|x|-10=0.$

Розв'язання. Перший спосіб - використання заміни змінної, а саме: позначимо $|x|=t$ і підкреслимо, що $t\ge 0$. Розв'язками отриманого квадратного рівняння $t^2+9t-10=0$ є числа $t=1$ і $t=-10$, друге із яких нас не влаштовує. Рівняння $|x|=1$ має два корені: $x=\pm 1$.

Рівняння можна було розв'язати інакше, а саме розглянути окремо два випадки: $x\ge 0$ і $x<0$. Відповідно маємо $\begin{cases} x\ge 0, \\ x^2+9x-10=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x<0, \\ x^2+9(-x)-10=0 \end{cases}$. Першу систему задовольняє число 1, а другу – (-1).

Приклад 5.15. Розв'язати нерівність $\left|x^2-8\right|\le 1.$

Розв'язання. Нерівність одразу замінимо на $-1\le x^2-8\le 1$ або $7\le x^2\le 9$. Відповідь: $\sqrt{7}\le|x|\le 3$ або $x\in\left[-3,-\sqrt{7}\right]\cup\left[\sqrt{7},3\right]$.

Приклад 5. 16. Розв'язати нерівність $|2x-8|>7-x$.

Розв'язання. Щоб позбавитися знака модуля, розглянемо окремо два випадки: 1) $x\ge 4$, 2) $x<4$, які приводять до двох окремих систем:

1) $\begin{cases} x\ge 4, \\ (2x-8)>7-x \end{cases}$ і 2) $\begin{cases} x<4, \\ -(2x-8)>7-x \end{cases}$. Перша має розв'язок $x>5$, а друга - розв'язок $x<1$. Тому $x\in(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$.

<u>Зауваження.</u> Розглянуті приклади здаються занадто простими, але у подальшому вони можуть змінювати своє "обличчя" та виникати у досить серйозному вигляді, а тоді має неабияке значення вміння розв'язувати їх швидко та правильно (див. завдання 5.10)

<u>Завдання для самостійної роботи</u>

5.7. Розв'язати рівняння:
a) $|x+9|=7$; b) $|9-2x|=3$; c) $11-x=|3x-2|$; d) $|x+1|-2x=1$.

5.8. Розв'язати рівняння $\sqrt{4x^2+4x+1}=7$.

5.9. Зобразити на числовій осі точки, що задовольняють нерівності:
a) $|x-2|<3$; b) $|x-2|\geq 3$; c) $|x+13|<1$; d) $|x+12|\geq 3$; e) $2<|x-5|\leq 6$; f) $|x-7|>0$;
g) $0<|x+1|\leq 3$.

5.10. Визначити, для яких значень x геометрична прогресія із знаменником $q=\dfrac{x^2+2x-4}{4}$ буде нескінченно спадною, тобто $|q|<1$.

5.11. Розв'язати нерівності: a) $\left|x^2-2\right|\leq 1$; b) $\left|x^2-2x\right|\leq 6$.

5.12. Розв'язати рівняння:
a) $|x-2|=3|3-x|$; b) $2|x+1|=|x-3|$; c) $|x-1|-|x-2|=1$.

5.13. Розв'язати нерівності:
a) $|2x+1|>x$; b) $|2x+3|\leq 4x$; c) $2x^2\leq|x-2|$; d) $x^2+2|x|-3\leq 0$.

5.4. Показникові та логарифмічні рівняння

Рівняння, що містять невідому в показникові степеня, мають назву "показникові рівняння".

Основні види показникових рівнянь такі:

1. $a^{f(x)}=1\ \ (a>0, a\neq 1).$

За визначенням нульового показника $f(x)=0.$

2. $a^{x}=a^{\gamma}\ \ (a>0, a\neq 1).$

Якщо розділити обидві частини рівняння на a^{γ} $(a^{\gamma}\neq 0),$ то одержимо рівняння $a^{f(x)}=1.$

3. $a^{x}=b\ \ (a>0, a\neq 1, b>0).$

За означенням логарифма $x=\log_a b.$

4. $A_0a^{mx+k_0}+A_1a^{mx+k_1}=B.$

Винесемо за дужки a^{mx+k_i}, де $k_i=\min(k_0,k_1).$ Маємо

$$a^{mx+k_i}(A_0a^{k_0-k_i}+A_1a^{k_1-k_i})=B,\ \text{або}\ \ a^{mx+k_i}\cdot C=B\Rightarrow a^{mx+k_i}=\frac{B}{C}\quad (C\neq 0).$$

Рівняння має розв`язок , якщо $\dfrac{B}{C}>0$.

5. $A_0a^{2x}+A_1a^{x}+A_2=0.$

Позначимо $a^{x}=y$, тоді одержимо квадратне рівняння відносно y, оскільки $a^{2x}=\left(a^{x}\right)^2=y^2.$

6. $A_0a^{x}+A_1a^{\frac{x}{2}}\cdot b^{\frac{x}{2}}+A_2b^{x}=0.$

Поділивши обидві частини на $b^{x}\neq 0$, отримаємо рівняння, що має вигляд рівняння 5.

Приклад 5.17. Розв'язати рівняння $3^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{27}}$.

Розв'язання. Праву частину $\frac{1}{\sqrt{27}}$ перетворимо в число з основою 3: $\frac{1}{\sqrt{27}} = \frac{1}{\sqrt{3\cdot3\cdot3}} = \frac{1}{\sqrt{3^3}} = \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}} = 3^{-\frac{3}{2}}$. Тепер підставимо $3^{-\frac{3}{2}}$ в рівняння. Маємо $3^{\frac{1}{2}x} = 3^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{1}{2}x = -\frac{3}{2}$, $x = -\frac{3}{2} : \frac{1}{2} = -3$.

Приклад 5.18. Розв'язати рівняння $5^{x+1} + 5^x = 750$.

Розв'язання. Оскільки $5^{x+1} = 5^x \cdot 5$, то рівняння матиме вигляд $5\cdot 5^x + 5^x = 750$. Винесемо 5^x за дужки: $5^x(5+1) = 750 \Rightarrow 6\cdot 5^x = 750 \Rightarrow$ $5^x = \frac{750}{6} = 125$. Таким чином, $5^x = 125$, але $125 = 5\cdot5\cdot5 = 5^3 \Rightarrow 5^x = 5^3 \Rightarrow x = 3$.

Приклад 5.19. Розв'язати рівняння $4\cdot 2^{2x} + 16 = 65\cdot 2^x$.

Розв'язання. Позначимо $2^x = y$, тоді $2^{2x} = \left(2^x\right)^2 = y^2$. Підставимо y і y^2 в задане рівняння. Отримаємо квадратне рівняння $4y^2 - 65y + 16 = 0$. Розв'яжемо це рівняння. Маємо: $D = b^2 - 4ac = 4225 - 256 = 3969 = (63)^2 \Rightarrow y_1 = 16;\ y_2 = \frac{1}{4}$. Звідси: $y = 2^x = 16$, $2^x = 16$, $2^x = 2^4$, $x = 4$ і $y = 2^x = \frac{1}{4}$, $2^x = \frac{1}{4}$, $2^x = 2^{-2}$, $x = -2$.

Приклад 5.20. Розв'язати рівняння $2^{x^2 - 40x + 300} = 1$.

Розв'язання. $x^2 - 40x + 300 = 0, \quad x_1 = 10, \quad x_2 = 30.$

Приклад 5.21. Розв'язати рівняння $8^{x-3} = 9^{x-3}$.

Розв'язання. $\left(\frac{8}{9}\right)^{x-3} = 1;\ x - 3 = 0, \quad x = 3.$

Приклад 5.22 . Розв'язати рівняння $3^{2x+2} + 3^{2x} = 30$.

Розв'язання. Винесемо за дужки 3^{2x}. Отримаємо:

$$3^{2x}(9+1) = 30, \quad 3^{2x} = 3 \Rightarrow \quad 2x = 1, \quad x = \frac{1}{2}.$$

Приклад 5.23. Розв'язати рівняння $5^{2x+1} - 5^{x+2} = 250$.

Розв'язання. Позначимо $5^x = y$. Маємо $y^2 - 5y - 50 = 0$. Корені квадратного рівняння: -5 і 10. Оскільки $y > 0$, то нас влаштовує тільки корінь 10. Тоді

$5^x = 10 \Rightarrow x = \dfrac{1}{\lg 5}.$

Якщо невідома змінна міститься під знаком логарифма або в його основі, то таке рівняння називається логарифмічним. При розв'язуванні логарифмічних рівнянь обов'язково потрібно враховувати властивості логарифмічної функції $y = \log_a x$: $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

Приклад 5.24. Розв'язати рівняння $\log_{x-1}\left(x^2 - 5x + 10\right) = 2.$

Розв'язання. Для цього рівняння ОДЗ таке: $\begin{cases} x - 1 > 0, \\ x^2 - 5x + 10 > 0, \\ x - 1 \neq 1. \end{cases}$

Розв'яжемо нерівність $x^2 - 5x + 10 > 0$: $D = b^2 - 4ac = 25 - 40 = -15 < 0.$ Парабола $y = x^2 - 5x + 10$ не має точок перетину з віссю $0x$. Отже, $x^2 - 5x + 10 > 0$ для будь-яких $x \in (-\infty; +\infty)$. Тоді $\begin{cases} x > 1, x \neq 2, \\ -\infty < x < +\infty \end{cases} \Rightarrow x > 1,\ x \neq 2$. За означенням логарифма $\log_a c = b$ маємо

$$a^b = c \Rightarrow (x-1)^2 = x^2 - 5x + 10 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 - 5x + 10 \Rightarrow 3x = 9,\ x = 3.$$

Приклад 5.25 . Розв'язати рівняння $\log_2(2x+1) - \log_2 x = \log_4 64$.

Розв'язання. Визначимо ОДЗ цього рівняння: $\begin{cases} 2x + 1 > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{1}{2}, \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0.$

До лівої частини рівняння застосуємо властивість $\log_2\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log_2 a - \log_2 b$, тобто ліва частина дорівнює логарифму дробу $\log_2\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)$. В правій частині рівняння $\log_4 64 = 3$. Тоді початкове рівняння набуде вигляду $\log_2\left(\dfrac{2x+1}{x}\right) = 3.$ За означенням логарифма $2^3 = \left(\dfrac{2x+1}{x}\right) \Rightarrow \left(\dfrac{2x+1}{x}\right) = 8$. Оскільки $x \neq 0$, то $2x + 1 = 8x \Rightarrow 6x = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 1/6$.

Приклад 5.26. Розв'язати рівняння $\lg(x+3) + \lg x = 1$.

Розв'язання. Для цього рівняння ОДЗ таке: $\begin{cases} x > 0, \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x > -3 \end{cases} \Rightarrow x > 0$. До лівої частини рівняння застосуємо властивість $\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b \Rightarrow \lg\left[x(x+3)\right] = 1$. За означенням десяткового логарифма $x(x+3) = 10$, $x^2 + 3x - 10 = 0$, $x_1 = -5$, $x_2 = 2$. Врахуємо, що $x > 0$, тоді $x_1 = -5$ не є коренем цього рівняння.

Завдання для самостійної роботи

5.14. Розв'язати рівняння:

a) $3^{x-5}=7;$ b) $2^{\frac{3}{\log_3 x}}=\frac{1}{64};$ c) $3^{2x+2}+3^{2x}=30;$ d) $2^{2x-3}=4^{x^2-3x-1};$

e) $3^x\cdot 8^{\frac{x}{x+1}}=36;$ f) $7^{x+2}-\frac{1}{7}7^{x+1}-14\cdot 7^{x-1}+2\cdot 7^x=48;$ g) $9^x-2\cdot 3^x-3=0;$

h) $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0;$ i) $\log_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{x}\right)=3;$ j) $\log_5(1-2x)=1;$

k) $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=5{,}5;$ l) $\lg(x-3)+\lg(x+6)=\lg 2+\lg 5;$

m) $\log_{16} x+\log_4 x+\log_2 x=7;$ n) $\log_x 3-\log_x 2=\frac{1}{2};$

o) $2\log_8(2x)+\log_8(x^2-2x+1)=\frac{4}{3};$ p) $\log_2(3-x)+\log_2(1-x)=3.$

5.5. Показникові та логарифмічні нерівності

При розв'язуванні нерівностей, що містять показникову або логарифмічну функцію, треба пам'ятати властивості цих функцій, а саме те, що $y=a^x$, $y=\log_a x$ при $a>1$ є монотонно зростаючими, а при $0<a<1$ – монотонно спадними. Таким чином, маємо нерівності

$$a^{x_1}>a^{x_2} \Leftrightarrow x_1>x_2 \ (a>1); \quad a^{x_1}>a^{x_2} \Leftrightarrow x_1<x_2 \ (0<a<1).$$

Аналогічно:

$$\log_a x_1>\log_a x_2 \Leftrightarrow x_1>x_2 \ (a>1); \quad \log_a x_1>\log_a x_2 \Leftrightarrow x_1<x_2 \ (0<a<1).$$

При розв'язуванні логарифмічних нерівностей також треба пам'ятати, що функція $y=\log_a x$ визначена тільки при $x>0$.

Приклад 5.27 . Розв язати нерівність $5^{x^2+3x}\le 125\cdot 5^x$.

Розв'язання. Оскільки функція $y=5^x$ – монотонно зростаюча і $125=5^3$, то нерівність, задана за умовою, еквівалентна таким нерівностям:

$$5^{x^2+3x}\le 5^{x+3},\ x^2+3x\le x+3 \Rightarrow x^2+2x-3\le 0 \Rightarrow (x+3)(x-1)\le 0 \Rightarrow -3\le x\le 1$$

(застосовано метод інтервалів для розв'язування нерівностей).

Приклад 5.28 . Розв'язати нерівність $4^x-2^{x+1}\ge 3$.

Розв'язання. Покладемо $2^x=y>0$. Тоді $y^2-2y-3\ge 0$. Враховуючи, що $y>0$, одержимо $2^x\ge 3 \Rightarrow x\ge \log_2 3$.

Приклад 5.29 . Розв'язати нерівність $(\frac{1}{2})^{\log_3(x^2-2x-3)}>1$.

Розв'язання. ОДЗ цієї нерівності така: $x^2-2x-3>0 \Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

Оскільки $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ – монотонно спадна функція, то задана нерівність еквівалентна нерівності $\log_3(x^2-2x-3)<0$. Остання нерівність з урахуванням того, що $y=\log_3 x$ – монотонно зростаюча функція, рівносильна нерівності $x^2-2x-3<1 \Rightarrow x^2-2x-4<0.$ З урахуванням ОДЗ одержимо відповідь: $x\in(1-\sqrt{5},-1)\cup(3,1+\sqrt{5})$ (рис. 5.8).

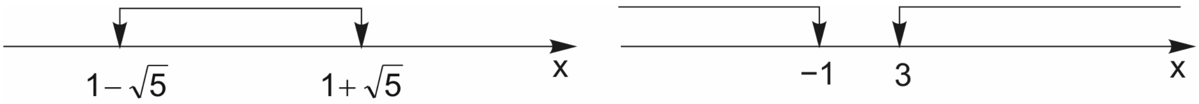


Рис. 5.8

Приклад 5.30. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-6x-2,5}>16\sqrt{2}.$

Розв'язання. Зведемо праву частину до основи $\frac{1}{2}$: $16\sqrt{2}=2^4\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2^{4\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4\frac{1}{2}}$, одержимо $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-6x-2,5}>\left(\frac{1}{2}\right)^{-4\frac{1}{2}}$. Функція $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ - монотонно спадна. Тому, якщо $y_1=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}$, а $y_2=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$ і $y_1>y_2$, то $x_1<x_2$. Отже, з нерівності $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-6x-2,5}>\left(\frac{1}{2}\right)^{-4\frac{1}{2}}$ випливає $x^2-6x-2,5>-4,5$, або $x^2-6x+2>0$. Розв'яжемо квадратну нерівність:

$$D=b^2-4ac=36-4\cdot 2=28=\left(\sqrt{28}\right)^2=\left(\sqrt{7\cdot 4}\right)^2=\left(2\sqrt{7^2}\right),$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{6+2\sqrt{7}}{2}=3+\sqrt{7};\\ x_2=\dfrac{6-2\sqrt{7}}{2}=3-\sqrt{7}.\end{cases}$$

Таким чином, $\left(x+\left(3+\sqrt{7}\right)\right)\left(x+\left(3-\sqrt{7}\right)\right)<0 \Rightarrow 3-\sqrt{7}<x<3+\sqrt{7}$ (рис. 5.9).

Приклад 5.31. Розв'язати нерівність $\lg\left(x^2-6x+18\right)<1.$

Розв'язання. Врахуємо, що $\lg 10=1$. Тоді $\lg\left(x^2-6x+18\right)<\lg 10,$ а функція $y=\lg x$ монотонно зростає. Це означає, що для будь-яких x_1 і x_2 (при $x_1<x_2$), що належать області допустимих значень функції, $y_1<y_2$. Тоді, якщо $\lg\left(x^2-6x+18\right)<\lg 10,$ то $x^2-6x+18<10,$ $x^2-6x+8<0.$ Розв'яжемо квадратну нерівність: $D=b^2-4ac=36-4\cdot 8=4=\left(2\right)^2,$ $x_1=\frac{6+2}{2}=4,$ $x_2=\frac{6-2}{2}=3.$ Тоді $\left(x-2\right)\left(x-4\right)<0 \Rightarrow x\in\left(2;4\right)$ (рис. 5.10).

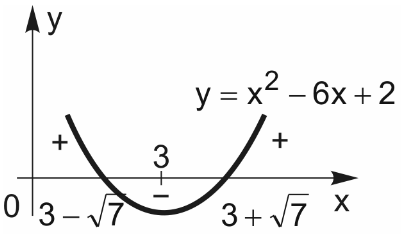


Рис. 5.9

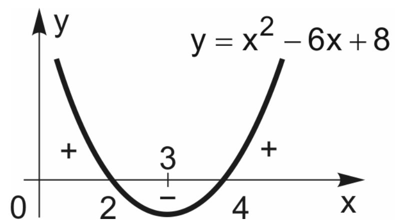


Рис. 5.10

<u>Завдання для самостійної роботи</u>

5.16. Розв’язати нерівності:

a) $5^x > 3125$; b) $\left(\frac{1}{0{,}125}\right)^x \le 128$; c) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{x^2-2x}{x^2}} \ge 1$; d) $3^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}+3} > 84$; e) $2^{\sqrt{x-5}} > \sqrt[5]{8}$;

f) $(0{,}1)^{4x^2-2x-2} \le 0{,}1^{2x-3}$; g) $\log_{1,5}\frac{2x-8}{x-2} < 0$; h) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{3x+1}{x+1} > -1$;

i) $2\log_8(x-2) - \log_8(x-3) > \frac{2}{3}$; j) $25^x - 6\cdot 5^x < -5$; k) $2^x + 2^{-x} - 3 < 0$;

l) $4^{-x+0,5} - 7\cdot 2^{-x} - 4 < 0$; m) $\lg(x^2-2x-2) \le 0$; n) $\log_5(x^2-11x+43) > 2$;

o) $2^{x+3} - 5^x < 7\cdot 2^{x-2} - 3\cdot 5^{x-1}$; p) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{3x-1}{x+2} < 1$; q) $\log_{\frac{1}{7}}(x^2+2x-1) \le -1$.

5.6. Тригонометричні рівняння

Не існує єдиного методу побудови розв’язку тригонометричних рівнянь. Можна лише зазначити, що перетворення тригонометричних виразів має бути спрямовано на те, щоб рівняння набувало стандартного вигляду або «розпадалося» на кілька стандартних (простіших) рівнянь. Наведемо лише кілька методів побудови розв’язків тригонометричних рівнянь, тим паче що використання їх буде корисним у подальшому вивченні курсу вищої математики:

1. Введення додаткового аргументу за формулою

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi).$$

Оскільки $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то величини $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ і $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ можуть бути косинусом і синусом деякого кута φ. Якщо, наприклад, позначити $cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, а $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, то отримаємо вищенаведену формулу.

2. Зведення рівняння до алгебраїчного після заміни тригонометричної функції.

3. Розкладання на множники.

Слід також запам’ятати розв’язки так званих найпростіших тригонометричних рівнянь:

$\sin x = a$, $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$, $|a| \le 1$;
$\cos x = a$, $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$, $|a| \le 1$;
$tgx = a$, $x = arctga + \pi n$, $n \in Z$, $a \in R$;
$ctgx = a$, $x = arcctga + \pi n$, $n \in Z$, $a \in R$.

Окрім загальних формул розв'язків найпростіших тригонометричних рівнянь корисно знати формули для так званих «окремих випадків» розв'язків найпростіших тригонометричних рівнянь:

$\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in Z$; $\sin x = \pm 1$, $x = \pm \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$;

$\cos x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$;

$\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in Z$; $tgx = 0$, $x = \pi n$, $n \in Z$;

$ctgx = 0$, $x = \pm \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

Приклад 5.32. Розв'язати рівняння $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. Задано рівняння $\cos x = a$. Його розв'язок: $x = \pm \arccos \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, n \in Z$, або $x = \pm \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

Приклад 5.33. Розв'язати рівняння $\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2$.

Розв'язання. Якщо поділити обидві частини на 2, то можна записати рівняння у вигляді $\dfrac{1}{2}\sin 3x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x = 1$, або $\cos\dfrac{\pi}{3}\sin 3x - \sin\dfrac{\pi}{3}\cos 3x = 1$, $\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$;

звідси $3x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$.

Приклад 5.34. Розв'язати рівняння $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin 2x$.

Розв'язання. Розкладемо ліву частину рівняння на множники, використовуючи формулу суми кубів:

$$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x,$$

$$(\sin x + \cos x)\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right) = 0,$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right)(\sin x + \cos x - 1) = 0.$$

Це рівняння рівносильне сукупності рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 2, \\ \sin x + \cos x = 1. \end{array}\right.$$

Перше з них розв'язків не має $(\sin 2x \in [-1,1])$, а до другого застосуємо такі перетворення:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Таким чином,

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in z,$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z \text{ або } \left[\begin{array}{l} x = 2\pi m, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k, m \in Z. \end{array}\right.$$

Приклад 5.35. Розв'язати рівняння $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0.$

Розв'язання. До лівої частини рівняння застосуємо формулу різниці синусів, а далі отриманий вираз розкладемо на множники. Маємо:

$$2\sin x \cos 2x + \cos 2x = 0; \qquad \cos 2x(2\sin x + 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0, \\ \sin x = -\frac{1}{2}; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z, \\ x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, n, k \in Z. \end{array}\right.$$

Приклад 5.36. Розв'язати рівняння $\dfrac{\sin^4 x - 1}{\cos^4 x} = 1.$

Розв'язання. ОДЗ цього рівняння знаходиться з умови $\cos x \neq 0$, тобто $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$. Звільнившись від знаменника,отримаємо $\sin^4 x - 1 = \cos^4 x$, $(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1$, $\cos 2x = -1$, $2x = \pi + 2\pi k, k \in Z$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

Остання множина при $k = n$ збігається з множиною $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$, яка не входить в ОДЗ. Тому наведене рівняння розв'язків не має.

Приклад 5.37. Розв'язати рівняння $\sin^2 x + \cos x - \dfrac{1}{4} = 0.$

Розв'язання. Скористаємося основною тригонометричною тотожністю і перепишемо рівняння у вигляді

$$1 - \cos^2 x + \cos x - \frac{1}{4} = 0; \quad 4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0.$$

Покладемо $\cos x = t, \ |t| \leq 1$ і розв'яжемо квадратне рівняння: $4t^2 - 4t - 3 = 0$, де $t_1 = -\dfrac{1}{2}, \ t_2 = \dfrac{3}{2}, \ t_2 > 1$. Оскільки $t_2 > 1$, то рівняння $\cos x = \frac{3}{2}$ розв'язків не має. Розв'язком рівняння $\cos x = -\frac{1}{2}$, а значить, і всього рівняння є множина

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

Приклад 5.38. Розв'язати рівняння $4\cos 3x - 3\sin 3x = 0.$

Розв'язання. Оскільки для будь-якого розв'язку цього рівняння $\cos 3x \neq 0$, то поділимо це рівняння на $\cos 3x$. Отримаємо рівняння $\operatorname{tg} 3x = \frac{4}{3}$. Звідси

$$3x = arctg\frac{4}{3} + \pi n, n \in Z \text{, або } x = \frac{1}{3}arctg\frac{4}{3} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z.$$

Приклад 5.39. Розв'язати рівняння $4\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{5}{2}\sin 2x.$

Розв'язання. Використовуючи формулу подвійного кута, перепишемо рівняння у вигляді $4\sin^2 x - 5\sin x\cos x + \cos^2 x = 0,$ а потім поділимо його на $\cos^2 x \neq 0$. Отримаємо $4\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 1 = 0.$ Останнє рівняння є алгебраїчним рівнянням відносно $y = \operatorname{tg} x$, а саме $4y^2 - 5y + 1 = 0.$ Розв'язок цього рівняння такий: $y_1 = 1,\ y_2 = \frac{1}{4}$. Маємо:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = \frac{1}{4}; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z, \\ x = \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \pi m, m \in Z; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = 2\pi m, m \in Z, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

<u>Завдання для самостійної роботи</u>

5.18. Розв'язати найпростіші тригонометричні рівняння:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $tgx = \frac{1}{\sqrt{3}}$; c) $\sin x = -\frac{2}{3}$; d) $\cos x = -\frac{1}{2}$;

e) $ctgx = -1$; f) $tg^2 x = 5$; g) $\cos^2 2x = 1$; h) $\sin^2 x = \frac{1}{2}$.

Розв'язки рівнянь зобразити на тригонометричному колі.

Розв'язати тригонометричні рівняння:

5.19. a) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$; b) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$; c) $\cos x - \sin x = \sqrt{2}$;
d) $5\sin x + 12\cos x = 13$; e) $\sin x - \cos x = -1$; f) $6\cos x - \sin x = 4$.

5.20. $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{7}\right) = -1;$ 5.21. $1 - \cos^2 x = \frac{1}{2};$ 5.22. $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \sqrt{7} - \sqrt{2};$

5.23. $\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2};$ 5.24. $\cos x\left(2\cos x + 1\right) = 0;$ 5.25. $\left(4\sin^2 x - 3\right)\sin x = 0;$

5.26. $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2};$ 5.27. $\cos^2 x - 2\cos x = 3;$ 5.28. $\operatorname{tg}^2 2x + 3\operatorname{tg} 2x = 0;$

5.29. $4\sin x + 4\cos^2 x = 1;$ 5.30. $6\cos^2 x + 13\sin x = 12;$ 5.31. $\sin x - \cos x = 0;$

5.32. $3\cos^2 x - 4\cos x - \sin^2 x - 2 = 0;$ 5.33. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0;$

5.34. $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 8\cos^2 x = -2;$ 5.35. $3\cos^2 x + 2\sin x\cos x + 5\sin^2 x = 2;$

5.36. $\sin x\cos 3x = \sin 5x\cos 7x;$ 5.37. $4\sin x\sin 2x\sin 3x = \sin 4x;$

5.38. $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$;   5.39. $\cos 3x \cos 6x = \cos 4x \cos 7x$.

5.7 Тригонометричні нерівності

Розв’язання тригонометричних нерівностей зводиться, як правило, до розв’язання найпростіших тригонометричних нерівностей вигляду $\sin x > a$, $\operatorname{tg} x < b$ і т. п., а також до розв’язання сукупностей або систем тригонометричних нерівностей. Для розв’язання найпростіших тригонометричних нерівностей зручно користуватися тригонометричним колом. Множина значень змінної величини, яка задовольняє дану найпростішу нерівність, зображується на тригонометричному колі у вигляді однієї або кількох дуг. При цьому зазначимо, що якщо точка кола відповідає числу $\tilde{o}$, то вона відповідає і всім числам вигляду $x + 2\pi n, n \in Z$.

Приклад 5.40. Розв’язати нерівність $\cos 2x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв’язання. За означенням $\cos 2x$ – це абсциса точки на тригонометричному колі (рис. 5.11), яка відповідає числу $2x$. Відкладемо на колі точки, які мають абсциси, що дорівнюють ($-\frac{\sqrt{3}}{2}$). Це точки $\mathrm{A}(\frac{5\pi}{6})$ і $\mathrm{B}(\frac{7\pi}{6})$. Геометричним розв’язком наведеної нерівності буде замкнена дуга AmB тому, що

$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \le 2x \le \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z, \frac{5\pi}{12} + \pi n \le x \le \frac{7\pi}{12} + \pi n, n \in Z,$$ або

$$x \in \left[\frac{5\pi}{12} + \pi n, \frac{7\pi}{12} + \pi n\right], n \in Z.$$

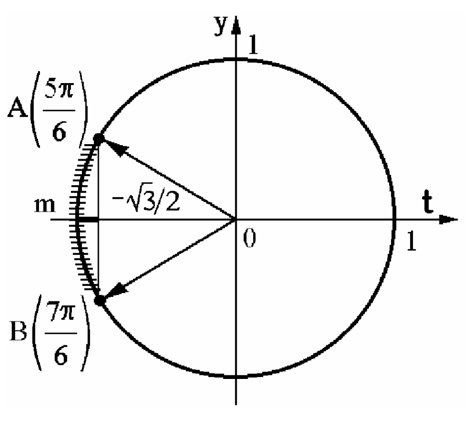


Рис. 5.11

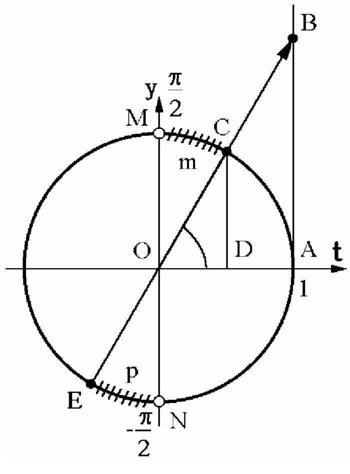


Рис. 5.12

Приклад 5.41. Розв’язати нерівність $\operatorname{tg} x > 2$.

Розв’язання. Функція tgx не визначена в точках M і N при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ (рис. 5.12). Проведемо вісь тангенсів AB перпендикулярно до осі абсцис $\left(|AB| = 2\right)$. Промінь OB перетинає одиничне коло в точці C $(\operatorname{arctg} 2)$:

$$\left(\frac{|CD|}{|OD|}=\frac{|AB|}{|OA|}=\operatorname{tg}x=2\right).$$

Функція $y=\operatorname{tg}x$ монотонно зростає при $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, тому нерівність $\operatorname{tg}x>2$ буде виконуватися для всіх точок відкритої дуги CmM. Оскільки головний період функції $\operatorname{tg}x$ дорівнює π, то наведена нерівність буде виконуватися для всіх точок дуги EpN. Складемо аналітичний запис вказаних дуг:

$$\operatorname{arctg}2+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z, \qquad x\in\left(\operatorname{arctg}2+\pi n,\frac{\pi}{2}+\pi n\right), n\in Z.$$

Приклад 5.42. Розв'язати нерівність $\sin 2x>\cos x$.

Розв'язання. Перепишемо нерівність у вигляді

$$2\sin x\cos x-\cos x>0, \qquad \cos x(2\sin x-1)>0.$$

Остання нерівність рівносильна системам нерівностей

$$\begin{cases}\cos x>0,\\ \sin x>\frac{1}{2}\end{cases}\quad(1)\ \text{і}\qquad \begin{cases}\cos x<0,\\ \sin x<\frac{1}{2}.\end{cases}\quad(2)$$

Геометричний розв'язок систем (1) і (2) подано на рис. 5.13 і 5.14 відповідно. Це будуть дуги AmC і FpM. Об'єднуючи ці дуги, запишемо аналітичний запис розв'язків:

$$x\in\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n,\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\bigcup\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right),\ n,k\in Z.$$

Приклад 5.43. Розв'язати нерівність $\sin^2 x-\sin 2x-3\cos^2 x>0$.

Розв'язання. Запропоновану тригонометричну нерівність перетворимо до алгебраїчної нерівності відносно величини $y=\operatorname{tg}x$:

$$\sin^2 x-2\sin x\cdot\cos x-3\cos^2 x>0\Big|:\quad cos^2x>0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg}x-3>0, \qquad y^2-2y-3>0.$$

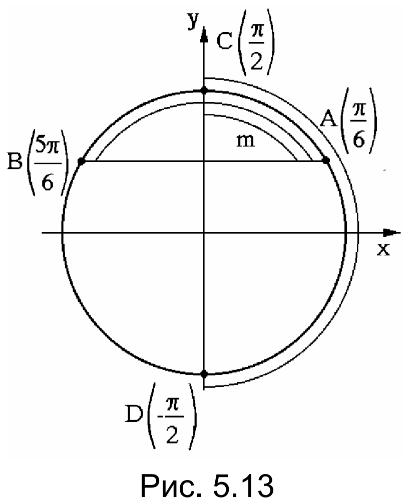


Рис. 5.13

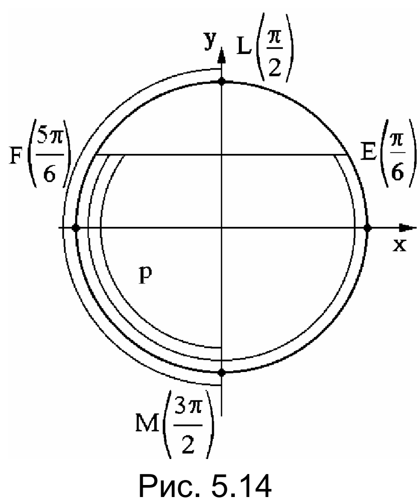


Рис. 5.14

Розв'язком останньої нерівності є сукупність множин:

$$\left[\begin{array}{l} y < -1, \\ y > 3, \end{array}\right. \quad \text{або} \quad \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x < -1, \\ \operatorname{tg} x > 3. \end{array}\right.$$

Геометричний розв'язок тригонометричних нерівностей зображено на рис. 5.15 і 5.16. Це дуги DmC, EpF, SpR і PmQ.

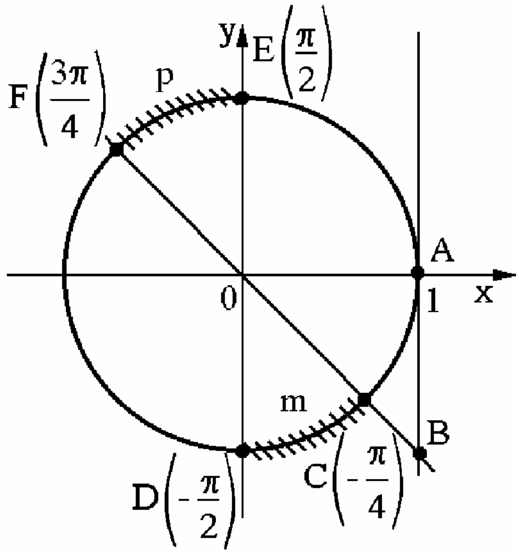


Рис. 5.15

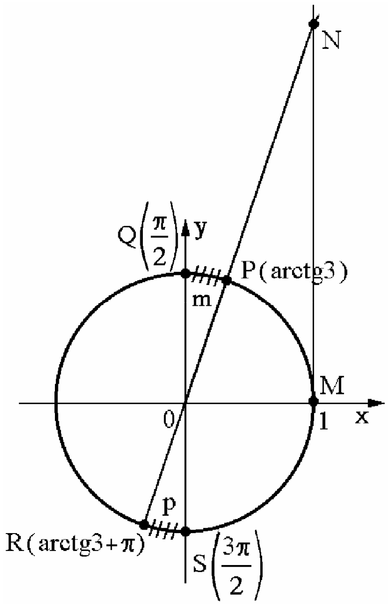


Рис. 5.16

Аналітичним розв'язком наведеної нерівності буде множина

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi n\right) \bigcup \left(\operatorname{arctg} 3 + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right), \ n, k \in Z.$$

<u>Завдання для самостійної роботи</u>

Розв'язати тригонометричні нерівності:

5.40. $\sin x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$; 5.41. $\cos x \ge -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5.42. $\operatorname{tg} x \le 1$; 5.43. $\operatorname{ctg} x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$;

5.44. $\sin(3x+1) < \frac{1}{2}$; 5.45. $2\sin^2 x + \sin x > 0$; 5.46. $\sin x + \cos x + \sin 3x + \cos 3x > 0$;

5.47. $\sin x + \cos x < \sqrt{2}$; 5.48. $3\sin^2 x + 2\cos x + 4\cos^2 x > 0$; 5.49 $\cos^2 x + 2\cos x < 0$.

6. АЛГЕБРА КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

6.1. Означення комплексного числа

У шкільному курсі математики розглядаються такі числові множини: натуральні числа (N), цілі числа (Z), раціональні числа (Q) і дійсні числа (R). При цьому $\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q} \subset \mathrm{R}$, тобто кожна подальша множина включає попередню і більш досконала з погляду можливості виконання операцій. Так, наприклад, на множині натуральних чисел не завжди здійснима операція віднімання ($1 - 7$ – не визначено в N). На множині цілих чисел ця операція завжди визначена ($1 - 7 = -6$).

Проте на множині дійсних чисел не здійснима операція обчислення кореня парного степеня з від'ємного числа ($\sqrt[n]{x}$ – не визначено, якщо n – парне, а $x<0$). Наприклад, рівняння $x^4+16=0$ не має розв'язків на множині R. Отже, виникає необхідність розширення множини дійсних чисел для одержання всіх можливих коренів алгебраїчних рівнянь.

Введемо число i, яке будемо називати *уявною одиницею*, для якого виконується умова $i^2=-1$.

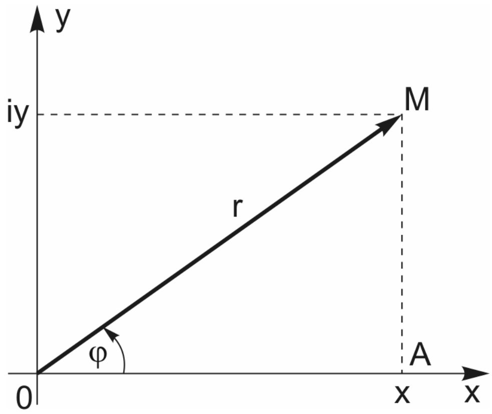


Рис. 6.1

На множині дійсних чисел рівняння $x^3-8=0$ має лише один корінь $x=2$, але $x^3-8=(x-2)\left(x^2+2x+4\right)=0$, звідки або $x=2$, або $x^2+2x+4=0$. Останнє квадратне рівняння має від'ємний дискримінант $D=-12$, тобто не має дійсних розв'язків, його корені мають вигляд $x=-1\pm\sqrt{-3}$. Із застосуванням уявної одиниці i одержимо $x_{1,2}=-1\pm i\sqrt{3}$. Такий вираз будемо називати *алгебраїчною формою запису комплексного числа.*

Означення. **Комплексним числом** у алгебраїчній формі називається вираз вигляду $z=x+iy$, де x і y – будь-які дійсні числа, а i – уявна одиниця. Числа x і y називаються відповідно *дійсною* і *уявною* частинами комплексного числа z і позначаються $x=\operatorname{Re}z$, $y=\operatorname{Im}z$.

C – множина всіх комплексних чисел. За умови $y=0$ маємо $z=x\in\mathrm{R}$. Отже, $\mathrm{R}\subset\mathrm{C}$ – множина дійсних чисел – є підмножиною множини комплексних чисел.

Комплексні числа $z_1=x_1+iy_1$ і $z_2=x_2+iy_2$ вважаються рівними тоді й тільки тоді, коли $x_1=x_2$ і $y_1=y_2$.

Комплексне число $\overline{z}=x-iy$ називається *спряженим* комплексному числу $z=x+iy$. Отже, якщо рівняння з дійсними коефіцієнтами має комплексні корені, то вони завжди спряжені.

Комплексне число $z=x+iy$ зображується в комплексній площині точкою M з координатами $(x;\,y)$ або вектором, початок якого знаходиться в точці $O(0;\,0)$, а кінець – в точці $M(x;\,y)$, де Ox – це дійсна вісь, а Oy – уявна (рис. 6.1).

Довжина r вектора $\overrightarrow{OM}$ називається *модулем* комплексного числа z і позначається $r=\left|\overrightarrow{OM}\right|$, отже, $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ $(r\ge 0)$. Кут φ, утворений вектором $\overrightarrow{OM}$ з додатним напрямом осі Ox, називається *аргументом* комплексного числа z і позначається $\varphi=\arg z$ ($\varphi\in[0,2\pi]$ або $\varphi\in[-\pi,\pi]$). Коли $x>0$, $\arg z=arctg\dfrac{y}{x}$, а якщо $x<0$, то $\arg z=arctg\dfrac{y}{x}+\pi$. З рис. 6.1 видно, що $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$. Тоді $z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Останній вираз називається *тригонометричною формою комплексного числа.*

6.2. Алгебраїчні дії з комплексними числами

Нехай $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathrm{C}$. Застосовуючи властивості арифметичних дій, маємо:

1) додавання (віднімання): $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$;

2) множення: $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + ix_1 y_2 + ix_2 y_1 + i^2 y_1 y_2 =$
$$= \left(x_1 x_2 - y_1 y_2\right) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1);$$

3) ділення: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \dfrac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$

$$= \frac{x_1 x_2 - ix_1 y_2 + ix_2 y_1 - i^2 y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{\left(x_1 x_2 + y_1 y_2\right)}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Остання дія була виконана з урахуванням властивості спряжених комплексних чисел: $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 \in \mathrm{R}$. Завдяки множенню знаменника на його спряжене у знаменнику одержано дійсне число, яке далі розглядається як коефіцієнт.

Піднесення комплексного числа до степеня n та обчислення кореня n-го степеня $(n \in \mathrm{N}, n \geq 2)$ краще виконувати у тригонометричній формі.

Нехай $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тоді:

а) піднесення до степеня n: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ – формула Муавра;

б) обчислення кореня n-го степеня: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$, $k \in \mathrm{Z}$.

Зауваження 1. Важливо знати значення різних степенів числа i: $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^3 \cdot i = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i$, … Отже, $i^{4r+m} = i^m$ $(k \in N, m = 0, 1, 2, 3)$. Крім того; $i^{-1} = \dfrac{1}{i} = \dfrac{i}{i^2} = \dfrac{i}{-1} = -i$.

Зауваження 2. З урахуванням властивостей тригонометричних функцій корінь n-го степеня з будь-якого комплексного числа має рівно n різних значень.

Приклад 6.1. Знайти суму, різницю, добуток і частку комплексних чисел $z_1 = 4 + 5i, \quad z_2 = 2 - i$.

Розв'язання: 1) $z_1 + z_2 = 4 + 5i + 2 - i = 4 + 2 + i(5 - 1) = 6 + 4i$;

2) $z_1 - z_2 = 4 + 5i - (2 - i) = 4 - 2 + i(5 + 1) = 2 + 6i$;

3) $z_1 z_2 = (4 + 5i)(2 - i) = 6 + 10i - 4i - 5i^2 = 6 + 5 + i(10 - 4) = 11 + 6i$;

4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{4 + 5i}{2 - i} = \dfrac{(4 + 5i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \dfrac{6 + 10i + 4i - 5}{4 + 1} = \dfrac{1 + 14i}{5} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{14}{5}i$.

Приклад 6.2. Знайти суму, різницю, добуток і частку комплексних чисел $z_1 = 3 + 4i, \quad z_2 = 3 - 4i \ (z_2 = \overline{z}_1)$.

Розв'язання: 1) $z_1 + z_2 = 3 + 4i + 3 - 4i = 6$ ($z_1 + \overline{z}_1 \in R$ – дійсне число);

2) $z_1 - z_2 = 3 + 4i - 3 + 4i = 8i$ $\quad(z_1 - \overline{z}_1 \in iR$ – уявне число);

3) $z_1 z_2 = (3+4i)(3-4i) = 9 - 16i^2 = 9 + 16 = 25$ ($z_1 \overline{z}_1 \in R$ – дійсне число);

4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3+4i}{3-4i} = \dfrac{(3+4i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \dfrac{9+24i-16}{25} = \dfrac{-7+24i}{25} = -\dfrac{7}{25} + \dfrac{24}{25}i$.

Приклад 6.3. Записати числа $z_1 = 2i,\ z_2 = 3+4i,\quad z_3 = -5,\quad z_4 = -1+i$, у тригонометричній формі.

Розв'язання. За формулою $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, де $r = \sqrt{x^2+y^2}$, а $\varphi = \left\{arctg\dfrac{y}{x}, \text{якщо } x>0; arctg\dfrac{y}{x} + \pi, \text{якщо } x<0; \pm\dfrac{\pi}{2}, x=0, y \gtrless 0\right\}$, знаходимо:

$$z_1 = 2i:\ x=0,\ y=2,\ r_1=2,\ \varphi_1 = \frac{\pi}{2}\ (y>0) \Rightarrow z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right);$$

$$z_2 = 3+4i:\ x=3,\ y=4,\ r_2 = \sqrt{9+16} = 5,\ \varphi_2 = arctg\frac{4}{3}\quad (x>0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_2 = 5\left(\cos\ arctg\frac{4}{3} + i\sin arctg\frac{4}{3}\right);$$

$$z_3 = -5:\ x=-5,\ y=0,\ r_3=5,\ \varphi_3 = \pi \Rightarrow z_3 = 5(\cos\pi + i\sin\pi);$$

$$z_4 = -1+i:\ x=-1,\ y=1,\ r_4 = \sqrt{2},\ \varphi_4 = arctg(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}\ (x<0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_4 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Приклад 6.4. Обчислити: а) i^{50}; б) $(1+i)^{45}$.

Розв'язання: а) За формулою $i^{4r+m} = i^m\ (r \in N, m = 0,1,2,3)$ маємо

$$i^{50} = i^{4\cdot 12+2} = i^2 = -1\ (r = 12, m = 2).$$

б) Якщо $z = 1+i$, то $r = \sqrt{2},\ \varphi = arctg1 = \dfrac{\pi}{4}$. Отже, у тригонометричній формі маємо $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$. За формулою Муавра з урахуванням $45 = 44+1$ і $\left(\sqrt{2}\right)^{44} = 2^{22}$ одержимо

$$z^{45} = \sqrt{2}^{45}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}45\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}45\right)\right) = 2^{22}\sqrt{2}\left(\cos\left(11\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(11\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Оскільки період функцій $\sin x$ і $\cos x$ $T = 2\pi k$ $(k \in Z)$, то аргументи цих функцій краще записати так: $11\pi + \dfrac{\pi}{4} = 10\pi + \pi + \dfrac{\pi}{4}$. Отже, з урахуванням періодичності відповідних функцій і формул зведення маємо

$$z^{45} = 2^{22}\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right) = -2^{22}\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Запишемо останній вираз у алгебраїчній формі. Оскільки $\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, маємо $z^{45}=-2^{22}\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=-2^{22}(1+i)$.

Приклад 6.5. Обчислити $\sqrt[3]{-27}$.

Розв'язання. Оскільки корінь n-го степеня з комплексного числа обчислюється за формулою $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$ $(k\in \mathrm{Z})$, запишемо число $z=-27$ у тригонометричній формі: $r=27, \varphi=\pi$, тобто $-27=27(\cos\pi+i\sin\pi)$. Отже, $w_k=\sqrt[3]{27}=3\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right)$. Задамо $k=0,1,2$ і одержимо три різні корені.

Відповідь: $k=0\Rightarrow w_0=3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=3\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}$;

$k=1\Rightarrow w_1=3(\cos\pi+i\sin\pi)=-3$;

$k=2\Rightarrow w_2=3\left(\cos\frac{5\pi k}{3}+i\sin\frac{5\pi k}{3}\right)=3\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{2}-i\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(якщо $k=3\Rightarrow w_3=w_0$, тобто для $(k\geq 3)$ корені відповідно збігаються).

Зауваження 3. 1) корінь 3-го степеня має три різні значення; 2) арифметичний корінь (на множині дійсних чисел) збігається з w_1; 3) два інші корені є спряженими комплексними числами: $w_2=\overline{w}_0$.

Приклад 6.6. Розв'язати рівняння: а) $x^4-16=0$; б) $x^2-6x+13=0$.

Розв'язання. а) $x^4-16=\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right)=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm 2,\quad x_{3,4}=\sqrt{-4}=\pm 2i$.

б) Такі рівняння легко розв'язувати, якщо виділити повний квадрат. Отже, $x^2-6x+13=0\Rightarrow x^2-6x+9+4=0\Rightarrow (x-3)^2=-4\Rightarrow x_{1,2}=3\pm 2i$.

Завдання для самостійної роботи

Обчислити:

6.1. $(2+3i)(3-2i)+(2-3i)(3+2i)$. 6.2. $(5+2i)(3-7i)+4(-6+i)$.

6.3. $\frac{2i}{1-i}$. 6.4. $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$. 6.5. $\frac{(1+i)(2+i)}{2-i}-\frac{(1-i)(2-i)}{2+i}$. 6.6. $(1+i)^4$.

6.7. $\left(2+i\sqrt{3}\right)^3$. 6.8 $(-1+i)^{48}$. 6.9. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$. 6.10. $\sqrt{3+4i}$.

6.11. $\sqrt{4-3i}$. 6.12. $\sqrt{4}$. 6.13. $\sqrt{-9}$. 6.14. $\sqrt[4]{-81}$.

Розв'язати рівняння та зобразити їхні корені на комплексній площині:

6.15. $x^2-2x+10=0$. 6.16. $x^3-27=0$. 6.17. $x^2+2x+2=0$. 6.18. $x^4-5x^2-36=0$.

6.19. $x^2+x+6=0$. 6.20. $x^3+4x=0$. 6.21. $4x^2-10x+6=0$. 6.22. $x^4+12x^2-64=0$.

Бібліографічний список

1. Сборник задач по элементарной математике [Текст]: учеб. пособие / Н. П. Антонов, М. Я. Выгодский, В. В. Никитин, А.И. Санкин. – М.: Наука, 1979. - 448 с.

2. Дорофеев, Г.В. Пособие по математике для поступающих в вузы [Текст]: учеб. пособие для самообразования / Г.В. Дорофеев, М. К.Потапов, Н. Х. Розов.– М.: Наука, 1976. - 640 с.

3. Сборник задач по математике для поступающих во втузы [Текст]: учеб. пособие для самообразования / под ред. М. И. Сканави. – М.: Высш. шк.,1992. - 528 с.

4. Пособие по математике для поступающих в вузы [Текст]: учеб. пособие для самообразования / под ред. Г.Н. Яковлева . – М.: Наука, 1982. - 480 с.

5. Практичний курс математики для систем довузівської підготовки [Текст]: навч. посіб. / під. ред. В.О. Рвачова. – Х. .: Нац. аерокосм. ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2007. - 816 с.

Навчальне видання

Ніколаєв Олексій Георгійович
Барахов Костянтин Петрович
Брисіна Ірина Вікторівна
Головченко Олександр Васильович
Драшпуль Наталія Володимирівна
Рвачова Тетяна Володимирівна
Томілова Євгенія Павлівна
Хоменко Володимир Васильович
Щербакова Юнна Анатоліївна

АДАПТАЦІЙНИЙ КУРС ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Редактор Л.О. Кузьменко

Зв. план, 2011
Підписано до друку 18. 08. 2011
Формат 60х84 1/16. Папір офс. №2. Офс. друк
Ум. друк. арк. 3,5. Обл.-вид. арк. 4. Наклад 300 пр.
Замовлення 251. Ціна вільна

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції, серія ДК № 391, видане Державним комітетом інформаційної політики, телебачення та радіомовлення України від 30.03.2001 р.