УДК 629.735

В.С. Симонов

# ОПТИМИЗАЦИЯ ГЛАДКОЙ ОДНОЗАМКНУТОЙ ПАНЕЛИРОВАННОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

В настоящее время полимерные композиционные материалы все больше применяются в производстве коммерческих самолетов, причем в ответственных несущих элементах конструкций, например в центроплане Airbus A380 [1].

Ведущие мировые авиастроительные фирмы занимаются разработкой новых авиалайнеров, в производстве которых планируется применять до 50% и более композиционных материалов. Более того, компания Boeing в конце 2009 года планирует начать поставки нового авиалайнера Boeing 787 Dreamliner вместимостью более 200 пассажиров, фюзеляж и крыло которого главным образом выполнены из полимерных углепластиков [2].

Из сказанного выше следует, что даже поверхностный анализ мировых тенденций по внедрению композиционных материалов в коммерческое авиастроение дает основания считать актуальной проблему оптимизации оболочечных конструкций из композиционных материалов в процессе проектирования новых пассажирских и грузовых самолетов большой вместимости.

Проблема оптимизации гладкой однозамкнутой панелированной оболочки из композиционных материалов является частью поставленной автором задачи по проектированию фюзеляжа самолета с замкнутым по полу силовым контуром поперечного сечения [3]. Ранее описанная математическая модель панелированной оболочки постоянного по длине поперечного сечения подходит для решения прямой задачи – определения напряженно-деформированного состояния (НДС), возникающего в результате действия силовых факторов – осевой силы, изгибающих моментов, перерезывающих сил и внутреннего давления. Однако при переходе к решению оптимизационной задачи возникают трудности, связанные с большим количеством варьируемых переменных, а также с дискретностью изменения толщины панелей, связанной с фиксированной толщиной монослоя пакета КМ.

В качестве оптимизируемого объекта рассматривается симметричное относительно вертикальной оси поперечное сечение гладкой оболочки, разбитое на четыре панели - две боковые, верхнюю и нижнюю (рис. 1). Толщина и структура боковой, верхней и нижней панелей различны. Под структурой понимается схема армирования панели, которая может быть любой комбинацией углов армирования из ряда [0°], [90°], [±φ], но не более трех разных углов армирования в одной панели, где φ - любой угол из диапазона 0° - 90°.

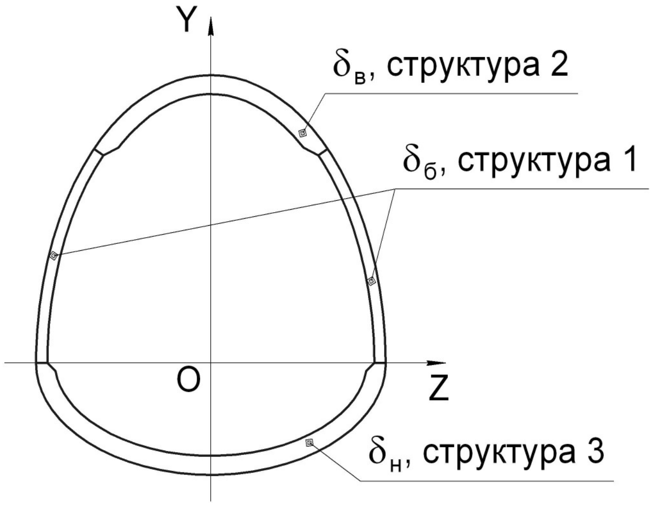


Рисунок 1 – Оптимизируемое поперечное сечение оболочки

Для описания оболочки принимается математическая модель тонкостенного стержня, которая представлена в [4]. Продольные нормальные деформации распределяются по контуру поперечного сечения стержня согласно закону плоскости:

$$\varepsilon_\alpha = az + by + c, \tag{1}$$

или

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha(M_z) + \varepsilon_\alpha(M_y) + \varepsilon_\alpha(N_x), \tag{2}$$

где $\varepsilon_\alpha(M_z) = by$ - деформация, возникающая от действия изгибающего момента $M_z$;

$\varepsilon_\alpha(M_y) = az$ - то же от момента $M_y$;

$\varepsilon_\alpha(N_x) = c$ - то же от продольной силы $N_x$.

Равенство (2) имеет графическую интерпретацию (рис. 2). В системе координат Z*OY можно записать следующее:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha(M_z)\big|_{y=-y_0} &= -ay_0 = \varepsilon_н, \\ \varepsilon_\alpha(M_z)\big|_{y=H-y_0} &= a(H - y_0) = \varepsilon_в. \end{aligned} \tag{3}$$

Решив эту систему уравнений относительно коэффициента $a$, получим

$$a = \frac{\varepsilon_в - \varepsilon_н}{H}. \tag{4}$$

Подставив (4) в любое из равенств (3), найдем координату $y_0$:

$$y_0 = -H\frac{\varepsilon_н}{\varepsilon_в - \varepsilon_н}. \tag{5}$$

Аналогично (3) можно записать:

$$\varepsilon_\alpha\left(M_y\right)\Big|_{y=-\frac{B}{2}} = -b\frac{B}{2} = \varepsilon_б, \tag{6}$$

тогда

$$b = -\frac{2\varepsilon_б}{B}. \tag{7}$$

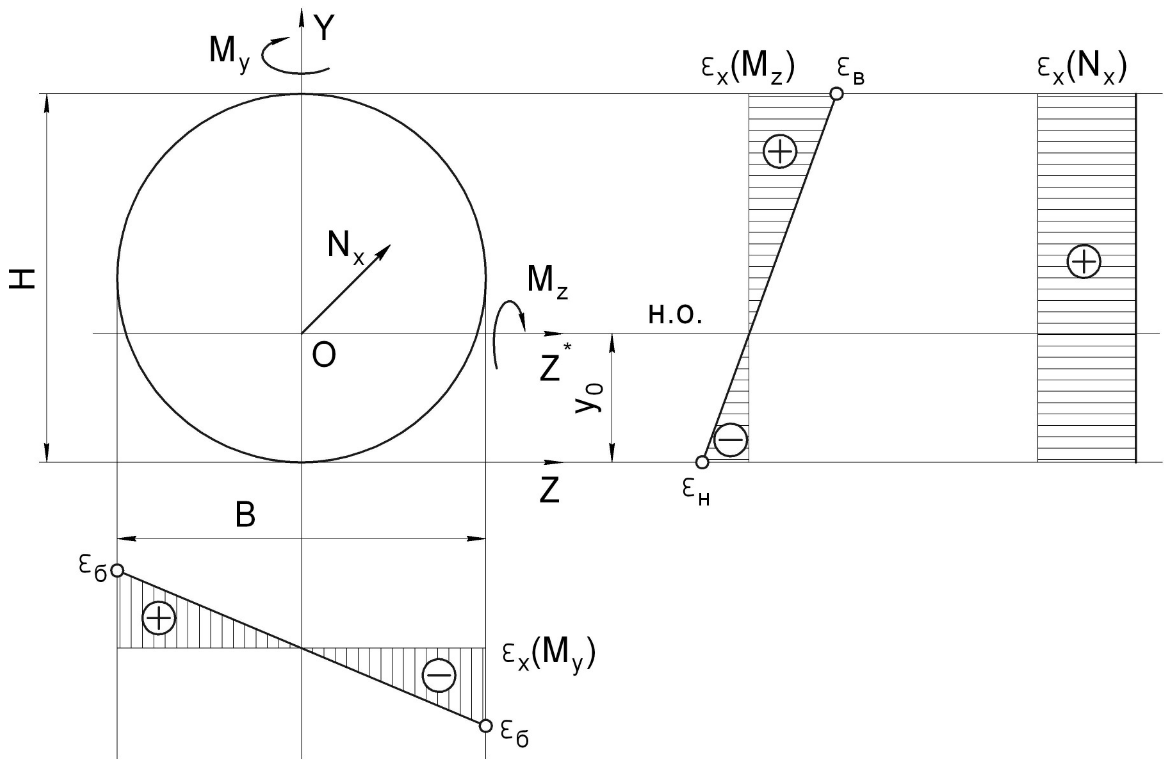


Рисунок 2 – Продольная деформация стержня

Теперь, зная коэффициенты $a$ и $b$, можно записать следующее:

$$\varepsilon_\alpha(M_z) = \frac{\varepsilon_в - \varepsilon_н}{H}y,\ \varepsilon_\alpha\left(M_y\right) = -\frac{2\varepsilon_б}{B}z. \tag{8}$$

Кроме того,

$$\varepsilon_\alpha(N_x)=\frac{N_x}{S}, \tag{9}$$

где $S=\oint \delta E_\alpha\, ds$.

С учетом (8) и (9) формула для определения деформации (2) примет вид

$$\varepsilon_\alpha=\frac{\varepsilon_в-\varepsilon_н}{H}y-\frac{2\varepsilon_б}{B}z+\frac{N_x}{S}. \tag{10}$$

Так как для заданных величин $\varepsilon_в$ и $\varepsilon_н$ положение $y_0$ предопределено (рис. 2), то, естественно, должно выполняться условие равенства нулю механического статического момента сечения относительно оси OZ*:

$$S_z=0, \tag{11}$$

который можно представить как сумму механических статических моментов панелей:

$$S_{zв}+2S_{zб}+S_{zн}=0, \tag{12}$$

где $S_{zв}, S_{zб}, S_{zн}$ - соответственно механические статические моменты верхней, боковой и нижней панелей относительно оси OZ*.

В общем виде механический статический момент i-й панели можно записать так:

$$S_{zi}=\delta_i E_{\alpha i}\int\limits_{s_i} yds, \tag{13}$$

где $i=(в, б, н)$; $\delta_i$, $E_{\alpha i}$ - толщина и модуль упругости в направлении оси OX i-й панели соответственно.

Введем обозначение:

$$A_i=\int\limits_{s_i} yds, \tag{14}$$

тогда выражение (11) с учетом (13) и (14) примет вид

$$\delta_в E_{\alpha в} A_в + 2\delta_б E_{\alpha б} A_б + \delta_н E_{\alpha н} A_н = 0. \tag{15}$$

Аналогичное условие относительно оси OY выполняется автоматически в силу симметрии контура.

Составим уравнения равновесия моментов относительно осей OZ* и OY:

$$\begin{aligned} M_z &= \oint \delta E_\alpha \varepsilon_\alpha (M_z) y \, ds , \\ M_y &= -\oint \delta E_\alpha \varepsilon_\alpha (M_y) z \, ds , \end{aligned} \tag{16}$$

где $\delta$, $E_\alpha$ - толщина и модуль упругости стенки оболочки в направлении $\alpha$.

Правые части (16) можно разбить на сумму интегралов аналогично (15) и вынести за знак интеграла произведения $\delta_i E_{\alpha i}$, так как они постоянны в пределах i-й панели:

$$\begin{aligned} M_z &= \frac{\varepsilon_в - \varepsilon_н}{H} \left( \delta_в E_{\alpha в} \int_{s_в} y^2 ds + 2\delta_б E_{\alpha б} \int_{s_б} y^2 ds + \delta_н E_{\alpha н} \int_{s_н} y^2 ds \right), \\ M_y &= -\frac{2\varepsilon_б}{B} \left( \delta_в E_{\alpha в} \int_{s_в} z^2 ds + 2\delta_б E_{\alpha б} \int_{s_б} z^2 ds + \delta_н E_{\alpha н} \int_{s_н} z^2 ds \right). \end{aligned} \tag{17}$$

Если ввести обозначения

$$B_i = \int_{s_i} y^2 ds; \; C_i = \int_{s_i} z^2 ds, \tag{18}$$

то равенства (17) можно привести к более компактному виду

$$\begin{aligned} \delta_в E_{\alpha в} B_в + 2\delta_б E_{\alpha б} B_б + \delta_н E_{\alpha н} B_н &= M_z \frac{H}{\varepsilon_в - \varepsilon_н} , \\ \delta_в E_{\alpha в} C_в + 2\delta_б E_{\alpha б} C_б + \delta_н E_{\alpha н} C_н &= -M_y \frac{B}{2\varepsilon_б} . \end{aligned} \tag{19}$$

Записывая выражения (15) и (19) вместе,

$$\begin{aligned}
&\delta_в E_{\alpha в} A_в + 2\delta_б E_{\alpha б} A_б + \delta_н E_{\alpha н} A_н = 0\ , \\
&\delta_в E_{\alpha в} B_в + 2\delta_б E_{\alpha б} B_б + \delta_н E_{\alpha н} B_н = M_z \frac{H}{\varepsilon_в - \varepsilon_н}\ , \\
&\delta_в E_{\alpha в} C_в + 2\delta_б E_{\alpha б} C_б + \delta_н E_{\alpha н} C_н = -M_y \frac{B}{2\varepsilon_б}\ ,
\end{aligned} \tag{20}$$

получаем систему уравнений с тремя неизвестными $(\delta_в E_{\alpha в})$, $(\delta_б E_{\alpha б})$, $(\delta_н E_{\alpha н})$, обеспечивающими заданные деформации $\varepsilon_в, \varepsilon_б, \varepsilon_н$ и положение нейтральной оси.

Пока вынесем за «скобки» дополнительные напряжения и деформации от $N_x$. Их можно считать не зависящими от координаты $x$, т.е. константами в пределах проектируемого отсека.

Таким образом, получены значения $(\delta E_\alpha)_в$, $(\delta E_\alpha)_б$, $(\delta E_\alpha)_н$ как функции от деформаций $\varepsilon_в, \varepsilon_б, \varepsilon_н$.

Покажем, что поток касательных сил (ПКС) также однозначно определяется значениями $(\delta E_\alpha)_в$, $(\delta E_\alpha)_б$, $(\delta E_\alpha)_н$, т.е. справедлива запись

$$q_{\alpha\beta} = f(\varepsilon_в, \varepsilon_б, \varepsilon_н). \tag{21}$$

Общая формула для определения ПКС в тонкостенном стержне представлена в [4]:

$$q_{\alpha\beta} = Q_z\, F_z(s) + Q_y\, F_y(s) + \frac{M_x}{2\,F}, \tag{22}$$

где $Q_x, Q_y$ и $M_x$ – перерезывающие силы и крутящий момент в сечении оболочки (рис. 2);

$F_z(s) = -\dfrac{k}{D_y}\left[\overline{S}_y(s) - \dfrac{1}{2F}\oint \overline{S}_y(s)\, r\, ds\right];$

$F_y(s) = -\dfrac{k}{D_z}\left[\overline{S}_z(s) - \dfrac{1}{2F}\oint \overline{S}_z(s)\, r\, ds\right];$

$F$ – ометаемая площадь контура;

$k$ – коэффициент асимметрии, который в нашем случае равен 1 – контур симметричен относительно оси OY;

$D_z, D_y$ – механические моменты инерции сечения относительно осей OZ* и OY соответственно;

$\overline{S}_z, \overline{S}_y$ – механические статические моменты инерции отсеченной части контура;

r – длина перпендикуляра, опущенного из принятого полюса (в нашем случае точка O на рис. 2) на касательную к контуру поперечного сечения в текущей точке.

Механические моменты инерции $D_z, D_y$ запишутся следующим образом:

$$D_z = \oint(\delta E_\alpha) y^2 ds \,, \qquad D_y = \oint(\delta E_\alpha) z^2 ds \,, \tag{23}$$

а механические статические моменты отсеченной части контура –

$$\overline{S}_z = \int_0^s (\delta E_\alpha) y ds \,, \qquad \overline{S}_y = \int_0^s (\delta E_\alpha) z ds \,. \tag{24}$$

Как видно из формул (23) и (24), механические моменты инерции и механические статические моменты сечения определяются произведениями $(\delta E_\alpha)$ и геометрией контура, т.е. равенство (21) справедливо.

Зная ПКС, можно определить сдвиговые деформации:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{q_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}}, \tag{25}$$

где $G_{\alpha\beta}$ - модуль сдвига стенки оболочки.

Окружное усилие в оболочке определяется формулой:

$$N_\beta = P\rho, \tag{26}$$

где $\rho$ - радиус кривизны контура.

Тогда окружные деформации запишутся в виде

$$\varepsilon_\beta = \frac{P\rho}{\delta E_\beta}, \tag{27}$$

где $E_\beta$ - модуль упругости стенки оболочки в направлении $\beta$.

Зная деформации пакета (10), (25) и (27) и углы армирования слоев, можно определить деформации слоев по известным формулам:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{1i} = \varepsilon_\alpha \cos^2\varphi_i + \varepsilon_\beta \sin^2\varphi_i + \gamma_{\alpha\beta} \sin\varphi \cos\varphi_i\ , \\ &\varepsilon_{2i} = \varepsilon_\alpha \sin^2\varphi_i + \varepsilon_\beta \cos^2\varphi_i - \gamma_{\alpha\beta} \sin\varphi \cos\varphi_i\ , \\ &\gamma_{12i} = (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha)\sin 2\varphi_i + \gamma_{\alpha\beta} \cos 2\varphi_i, \end{aligned} \tag{28}$$

где 1,2 – система координат i-го слоя; $\varphi_i$ - угол армирования i-го слоя.

Напряжения в слоях находят по формулам

$$\begin{aligned} &\sigma_{1i} = \overline{E}_{1i}(\varepsilon_{1i} + \mu_{21i}\varepsilon_{2i})\ , \\ &\sigma_{2i} = \overline{E}_{2i}(\varepsilon_{2i} + \mu_{12i}\varepsilon_{1i})\ , \\ &\tau_{12i} = G_{12i}\gamma_{12i}, \end{aligned} \tag{29}$$

где $\overline{E}_{1i} = \dfrac{E_{1i}}{1-\mu_{12i}\mu_{21i}}, \overline{E}_{2i} = \dfrac{E_{2i}}{1-\mu_{12i}\mu_{21i}}$ - приведенные модули упругости основы и утка i-го слоя;

$\mu_{12i}, \mu_{21i}$ - коэффициенты Пуассона i-го слоя; $G_{12i}$ - модуль сдвига i-го слоя.

Зная напряжения в слоях, можно произвести послойную оценку прочности пакета по критериям максимальных напряжений и Мизеса-Хилла.

Для того чтобы последовательно вычислить (25) – (29), необходимо определить неизвестные величины $E_\beta, G_{\alpha\beta}, \varphi$, которые однозначно определяются структурой пакета. Кроме того, нам пока еще не известны значения толщин панелей $\delta_в, \delta_б, \delta_н$, которые можно определить из ранее найденных произведений $(\delta E_\alpha)_в, (\delta E_\alpha)_б, (\delta E_\alpha)_н$, зная модули упругости $E_{\alpha в}, E_{\alpha б}, E_{\alpha н}$. Указанные модули упругости также однозначно определяются структурами пакетов панелей.

Из сказанного выше следует, что для окончательного определения НДС контура поперечного сечения оболочки необходимо задать структуры пакетов панелей.

Модули упругости и сдвига пакета определяются по известным формулам:

$$E_{\alpha} = \overline{B}_{11} - \frac{\overline{B}_{12}^2}{\overline{B}_{22}}, E_{\beta} = \overline{B}_{22} - \frac{\overline{B}_{12}^2}{\overline{B}_{11}}, G_{\alpha\beta} = \overline{B}_{33}, \tag{30}$$

где для структуры пакета [0°,90°,±φ]:

$$\begin{aligned}
&\overline{B}_{11} = \overline{E}_1\psi_1 + \overline{E}_2\psi_2 + (1-\psi_1-\psi_2)\left[\overline{E}_1 \cos^4\varphi + 2\overline{E}_1\mu_{21}\sin\varphi\cos\varphi + \right.\\
&\left. + \overline{E}_2 \sin^4\varphi + G_{12}\sin^2 2\varphi\right],\\
&\overline{B}_{22} = \overline{E}_2\psi_1 + \overline{E}_2\psi_2 + (1-\psi_1-\psi_2)\left[\overline{E}_1 \sin^4\varphi + 2\overline{E}_1\mu_{21}\sin\varphi\cos\varphi + \right.\\
&\left. + \overline{E}_2 \cos^4\varphi + G_{12}\sin^2 2\varphi\right],\\
&\overline{B}_{12} = (\psi_1+\psi_2)\overline{E}_1\mu_{21} + (1-\psi_1-\psi_2)\left[\left(\overline{E}_1 + \overline{E}_2\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \right.\\
&\left. + \overline{E}_1\mu_{21}\left(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi\right) - G_{12}\sin^2 2\varphi\right],\\
&\overline{B}_{33} = (\psi_1+\psi_2)G_{21} + (1-\psi_1-\psi_2)\left[\left(\overline{E}_1 + \overline{E}_2 - 2\overline{E}_1\mu_{21}\right)\times\right.\\
&\left.\times\sin^2\varphi\cos^2\varphi + +G_{12}\cos^2 2\varphi\right];
\end{aligned} \tag{31}$$

$\psi_1 = \frac{\delta_0}{\delta_\Sigma}, \psi_2 = \frac{\delta_{90}}{\delta_\Sigma}$ - относительная суммарная толщина слоев с углом укладки 0° и 90° соответственно;

$\delta_0, \delta_{90}$ - суммарная толщина слоев с углом укладки 0° и 90° соответственно;

$\delta_\Sigma$ - суммарная толщина пакета.

Задавая значения $\psi_1, \psi_2$ и угол $\varphi$ для перекрестно армированных слоев в пределах следующих ограничений:

$$\begin{aligned}
&0 \le \psi_1,\\
&0 \le \psi_2,\\
&0 \le (\psi_1+\psi_2) \le 1,\\
&0° < \varphi < 90°,
\end{aligned} \tag{32}$$

можно определить все упругие характеристики пакета.

Приведенная выше методика определения НДС, возникающего в поперечном сечении оболочки, позволяет задать последовательность, оптимизации структур и толщины панелей:

1. Задать деформации $\varepsilon_в, \varepsilon_б, \varepsilon_н$ (рис. 2).
2. Из системы уравнений (20) определить произведения $(\delta E_\alpha)_в, (\delta E_\alpha)_б, (\delta E_\alpha)_н$.
3. Для i-й панели открыть циклы по $\psi_1, \psi_2$ и $\varphi$ с учетом ограничений (32), в теле цикла производить вычисления:
   3.1. Определить упругие характеристики (30) для этой панели;
   3.2. Найти из произведения $(\delta E_\alpha)_i$ толщину панели $\delta_i$.
   3.3. Определить деформации пакета панели согласно (10), (25) и (27).
   3.4. Определить деформации и напряжения в слоях пакета по формулам (28) и (29).
   3.5. Провести послойную оценку прочности панели.
   3.6. Найти минимальную толщину пакета $\delta_i$, при которой будут выполняться прочностные ограничения.
4. Минимизировать толщину панелей для остальных панелей аналогично п.3.
5. В том случае, если хотя бы для одной из панелей не было найдено ни одной структуры, при которой выполняются прочностные ограничения, то вернуться в п.1.
6. Продолжать пп. 1 – 5 для всех возможных комбинаций значений $\varepsilon_в, \varepsilon_б, \varepsilon_н$, записывая найденные значения толщины и структуры панелей в массив данных.
7. Отсортировать массив данных по возрастанию массы поперечного сечения оболочки.

Описанная выше методика оптимизации позволяет достаточно быстро найти оптимальные значения толщины и структуры панелей для заданных нагрузок и геометрии контура поперечного сечения оболочки. К примеру, персональный компьютер Intel Celeron с тактовой частотой процессора 2.00 ГГц и оперативной памятью 1.00 ГБ выполняет такой расчет за 3-5 мин.

Для сравнения можно привести время расчета на таком же персональном компьютере программы, которая выполняет прямой перебор всех возможных решений (толщины и структур панелей), решая прямую задачу определения НДС [3] и оценку прочности поперечного сечения оболочки. Это время составляет более 2 часов.

Методика удобна тем, что она позволяет оптимизировать каждую панель в отдельности. Это в значительной степени упрощает алгоритм оптимизации и в конечном итоге код программного продукта.

Можно возразить, что существует большое количество методов условной нелинейной оптимизации, которые позволяют решать задачи с большим количеством неизвестных и ограничений. Однако все эти методы основаны на определении производных 1-го и 2-го порядков от оптимизируемой функции и ограничений, что в нашем случае является усложнением ввиду громоздкости и сложности формул, используемых для расчета НДС слоистых КМ.

## Выводы

Представлены теоретические зависимости и упрощенный алгоритм, которые лежат в основе методики оптимизации параметров поперечного сечения панелированного тонкостенного стержня.

Предложенная методика позволяет найти решение в относительных значениях толщины, которые при переходе к абсолютным, как правило, не дают целого числа монослоев. В таких случаях обычно округляют значения толщины в большую сторону до целого числа слоев. Однако здесь такой шаг приведет к перераспределению жесткостей и, возможно, к выходу за прочностные ограничения.

Вторым недостатком методики является то, что она не включает в себя проверки полученных решений на соблюдение ограничений устойчивости и прогиба.

Поэтому следующим этапом в данном исследовании должен быть оптимальный в смысле минимума массы переход от относительных значений толщины к абсолютным без нарушения ограничений прочности, устойчивости и прогиба.

## Список использованных источников

1. Веб-сайт компании AIRBUS http://www.airbus.com.
2. Веб-сайт компании BOEING http://www.boeing.com.
3. Симонов В.С. Проектирование фюзеляжа самолета с замкнутым по полу силовым контуром поперечного сечения / В.С. Симонов // Авиационно-космическая техника и технология. Сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 1 (37). –Х., 2007.– С. 34 – 39.
4. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов / В.В. Васильев. - М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.

*Поступила в редакцию 7.02.2009.*

*Рецензент: канд. техн. наук, проф. В.В. Кириченко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”, Харьков*