

ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА СЛАБОЙ АППРОКСИМАЦИИ НА ОСНОВЕ ИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Использование в качестве математических моделей эволюционных процессов систем нелинейных нестационарных уравнений в частных производных гиперболического типа, отражающих характерные для них фундаментальные физические законы, приводит к необходимости существенно модифицировать известные численные методы и разрабатывать новые (адаптированные, адаптирующиеся), ориентированные на получение разрывных решений таких систем уравнений. Для решений нелинейных нестационарных систем уравнений характерно образование из гладкого начального распределения начальных данных областей высокоградиентного или разрывного поведения самих решений и их производных. Построение разностных схем повышенного порядка аппроксимации для таких систем происходило, в основном, на основе понятия классической аппроксимации. Для определения ее порядка используется разложение в ряды Тейлора, справедливое в областях достаточной гладкости решений. Указанные разрывные решения должны удовлетворять дифференциальным уравнениям в этих областях, а на разрывах – соотношениям, следующим из интегральных уравнений, определяющих слабое решение. Эквивалентные формы записи таких уравнений приведены в [1]. В вычислительном эксперименте [2] выяснилось, что определением слабого решения в нестационарных задачах необходимо пользоваться и в той части расчетной области, где «побывала» подвижная ударная волна. Анализ характерных отличий в формулировке определений и конструкций разностных схем классической и слабой аппроксимации проведен в [2-4].

При построении разностных схем с повышенным порядком слабой аппроксимации следует разрабатывать алгоритмы, использующие интегральные следствия исходной системы законов сохранения, записанной в интегральной форме. Их применение уже дало положительные результаты при теоретическом рассмотрении известных разностных схем и сравнении порядков их классической и слабой аппроксимации [5-8].

Представленное в этой работе дальнейшее развитие методов построения разностных схем с повышенным порядком слабой аппроксимации осуществляется на основе их интегральных представлений. Такой подход можно рассматривать как обобщение метода дифференциального представления разностных схем,

используемого для построения и исследования схем с повышенным порядком классической аппроксимации [9]. Важной задачей является выяснение условий, при которых разностная схема будет иметь повышенный порядок слабой аппроксимации.

1. Исследование классической и слабой аппроксимации некоторых разностных схем

Рассмотрим построение разностной схемы повышенного порядка слабой аппроксимации для задачи

$$D_{11}(u) = \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \quad u(x,0) = u_0(x). \quad (1)$$

Слабое решение [1] этой задачи находится из соотношения

$$I_{11}(v, g) = \iint_{\Omega} (v \partial_t g + f(v) \partial_x g) dx dt = 0, \quad v(x,0) = u_0(x), \quad (2)$$

где $\Omega = \text{supp } g$, $g \in C^\infty(D)$.

Построим разностную схему k -го порядка классической аппроксимации для (1)

$$\Lambda_h(v_h) = \frac{\delta_t^+ v_h}{\tau} + L_h[f(v_h)] = 0, \quad (3)$$

$$L_h[f(u)] = \sum_{i=1}^k \frac{(-\tau)^{i-1}}{i!} \cdot \frac{L_{ik}}{h^i} \varphi_i(u), \quad \frac{L_{ik}}{h^i} = \sum_{l \in SH_i} \alpha_{ikl} T_{hl} \approx \partial_x^i + O(h^{k-i-1}).$$

Здесь SH_i – точечный шаблон $(i-L, \dots, i, \dots, i+R)$, $\varphi_i(u) = \int (\partial_u f)^i du$, $\tau = A(h)$, $T_{hl}u(x, t) = u(x + hl, t)$.

Порядок классической аппроксимации (3) на решениях (1) определяется из соотношения

$$\Lambda_h(u) = O(h^k). \quad (4)$$

В этом определении подразумевается наличие необходимой гладкости у производящей функции $\Lambda_h(u)$ соответствующей разностной схемы.

Определение 1: Слабая аппроксимация разностного оператора Λ_h k -го порядка на решениях (2), определяется условием

$$\iint_{\Omega} \Lambda_h[v] g dx dt = O(h^k). \quad (5)$$

Определение 2: Порядок слабой аппроксимации разностного оператора Λ_h на решениях (3) находится из соотношения

$$0 = \iint_{\Omega} \Lambda_h[v_h] g dx dt = I_{11}(v_h, g) + O(h^k). \quad (6)$$

Тогда на решениях (2) разностный оператор (3) имеет слабую аппроксимацию, определяемую как

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \Lambda_h[v]g dxdt &= \iint_{\Omega} \left[\frac{\delta_t^+ v}{\tau} g + \left(\sum_{i=1}^k \frac{(-\tau)^{i-1}}{i!} \cdot \frac{L_{ik}}{h^i} f(v) \right) g \right] dxdt = \\ &= I_{11}(v, g) + \frac{\tau}{2} J_2(v, g) + \tau^2 J_3(v, g) + O(h^k), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J_2(v, g) &= \iint_{\Omega} (v \partial_t^2 g - \varphi_2(v) \partial_x^2 g) dxdt, \\ J_3 &= \sum_{i=3}^k \iint_{\Omega} \frac{(-\tau)^{i-3}}{i!} [(-1)^i \varphi_i \partial_x^i g - u \partial_t^i g] dxdt. \end{aligned}$$

Выражение $J_2(v, g)$ обращается в нуль на гладких решениях задачи (2), и совпадает с интегральным аналогом дифференциального следствия для (1). На разрывных решениях уравнения (2) интегральные следствия имеют вид

$$I_{11}(v, \partial_t^{i-1} \partial_x^{n-i+1} g) = \iint_{\Omega} (v \partial_t^i \partial_x^{n-i+1} g + f(v) \partial_t^{i-1} \partial_x^{n-i+2} g) dxdt = 0. \quad (7)$$

Отметим, в конструкции разностного оператора (3) использованы дифференциальные следствия для гладких решений (1) и функции $\varphi_i(u)$. Кроме того, для оценки слабого решения вместо интегральных аналогов дифференциальных следствий для (1) используются интегральные следствия (7) для уравнения (2).

Подробное исследование аппроксимационных свойств разностной схемы для (1)

$$\Lambda_h(v_h) = \frac{\delta_t^+ u_h}{\tau} + \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} f(v_h) - \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} \varphi_2(v_h) = 0 \quad (8)$$

проведено в [10]. На гладких решениях (8) имеет второй порядок классической аппроксимации по соотношению (4)

$$\Lambda_h(u) = O(h^2),$$

и первый порядок слабой аппроксимации (5) на негладких решениях (1) удовлетворяющих (2), т. е.

$$\iint_{\Omega} \Lambda_h[v]g dxdt = O(h).$$

Изменим в схеме (8) разностный оператор и запишем разностную схему из [10] в виде

$$\begin{aligned} S\Lambda_h(v_h) &= \frac{\delta_t^+ v_h}{\tau} + \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} f(v_h) - \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} f(v_h) + \\ &+ \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_t^+ + \delta_t^-}{2\tau} \cdot \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} (f(v_h) - v_h) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Легко проверить, что схема (9) имеет второй порядок классической аппроксимации на решениях (1) (с использованием дифференциальных следствий)

$$S\Lambda(u) = O(h^2)$$

и такой же порядок слабой аппроксимации на решениях (2) (с использованием интегральных следствий)

$$\iint_{\Omega} S\Lambda_h(v)g(x,t)dxdt = O(h^2).$$

Однако чтобы учесть эффекты численного «размазывания» разностного решения, необходимо проверять слабую аппроксимацию разностной схемы на ее собственных решениях (9) с помощью соотношению (6). Для этого рассмотрим оценку порядка слабой аппроксимации для указанной разностной схемы по определению 2

$$0 = \iint_{\Omega} S\Lambda_h(v_h)g(x,t)dxdt. \quad (10)$$

Введя соответствующие обозначения, перепишем (10) в виде

$$I_{11}(v_h, g) = \frac{\tau}{2} [I_{22}(v_h, g) - I_{21}(v_h, g)] - \frac{h^2}{3!} I_3(v_h, g) + h^3 I_4(v_h, g) + O(h^4).$$

После преобразований получим

$$I_{11}(v_h, g) = \frac{\tau^2}{4} [I_{11}(v_h, \partial_t^2 g) - I_{11}(v_h, \partial_x^2 g)] + \frac{h^2}{3!} I_3(v_h, g) + O(h^3).$$

Откуда следует второй порядок слабой аппроксимации по определению 2 у рассматриваемой разностной схемы (9). При этом сходимость $V_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} V$ следует понимать как слабую сходимость в смысле

выполнения соотношения

$$\iint_{\Omega} (v_h \partial_t g + f(v_h) \partial_x g) dxdt \xrightarrow{h \rightarrow 0} \iint_{\Omega} (v \partial_t g + f(v) \partial_x g) dxdt.$$

Заметим, что гладкие решения уравнения (2) являются решениями (1), т.е. $v(x, t) = u(x, t)$.

Повышение порядка слабой аппроксимации разностной схемы (9) достигается добавлением необходимых слагаемых в разностный оператор задачи. Это приводит к преобразованию выражения $I_3(v_h, g)$ в интегральном представлении разностной схемы к виду, необходимому для исключения. Запишем модифицированный разностный оператор в виде соотношения

$$M_1 S\Lambda_h(v_h) = S\Lambda_h[v_h] -$$

$$-\left[\frac{h^2}{3!} \cdot \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} \cdot \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} - \frac{\tau^2}{3!} \cdot \frac{\delta_t^+ \delta_t^-}{\tau^2} \cdot \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} \right] f(v_h). \quad (11)$$

Для определения порядка слабой аппроксимации разностного оператора схемы (11) проинтегрируем соответствующее разностное уравнение по области D , умножив предварительно левую и правую части равенства на произвольную функцию $g \in C^\infty(D)$. Выполнив необходимые преобразования в соответствии с алгоритмом из [10], получим

$$0 = \iint_{\Omega} M1S\Lambda_h[v_h]g dxdt = \iint_{\Omega} (v_h g_t + f(v_h)g_x) dxdt + O(h^3) = I_{11}(v_h, g) + O(h^3).$$

Очевидно, используя последовательно такой алгоритм замещения можно построить разностную схему, имеющую произвольный порядок слабой аппроксимации.

Отметим, что в работе [11] приводится достаточное условие, обеспечивающее k -й порядок слабой аппроксимации разностной схемы, связанное с представимостью разностного оператора в виде

$$S\Lambda_h[v_h] = S\Lambda_{k,h}^*[v_h, f(v_h)] + S\bar{\Lambda}_{k+1,h}[v_h],$$

где $S\Lambda_{k,h}^*[v_h, f(v_h)]$ - разностный оператор с k -тым порядком классической аппроксимации; $S\bar{\Lambda}_{k+1,h}[v_h]$ - разностный оператор $k+1$ порядка дивергентности.

В (11) реализован вариант замены одного слагаемого (в данном случае слагаемого с $f(v_h)$) на другое с $f(v_h)$. Аналогично можно поступить и по отношению к слагаемому с v_h в выражении

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\tau^2}{3!} v_h \partial_t^3 g + \frac{h^2}{3!} f(v_h) \partial_x^3 g \right) dxdt,$$

модифицировав разностный оператор так, чтобы это слагаемое в его интегральном представлении заменилось на

$$\frac{h^2}{3!} \iint_{\Omega} (v_h \partial_x^2 \partial_t g + f(v_h) \partial_x^3 g) dxdt = \frac{h^2}{3!} I_{11}(v_h, \partial_x^2 g).$$

Тогда соответствующая модификация имеет вид

$$M2S\Lambda_h(v_h) = S\Lambda_h[v_h] -$$

$$-\left[\frac{\tau^2}{3!} \cdot \frac{\delta_t^+ + \delta_t^-}{2\tau} \cdot \frac{\delta_t^+ \delta_t^-}{\tau^2} - \frac{h^2}{3!} \cdot \frac{\delta_t^+ + \delta_t^-}{2\tau} \cdot \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} \right] v_h.$$

Модификация разностного оператора $M2S\Lambda_h(v_h)$ с использованием центрированных (симметричных) разностей выглядит следующим образом

$$M3S\Lambda_h(v_h) = S\Lambda_h[v_h] + \left[\frac{h^2}{3!} \cdot \frac{\delta_t^+ + \delta_t^-}{2\tau} \cdot \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} v_h + \frac{\tau^2}{3!} \cdot \frac{\delta_t^+ \delta_t^-}{\tau^2} \cdot \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} f(v_h) \right].$$

Для разностной схемы $M3S\Lambda_h(v_h) = 0$ справедлива оценка

$$0 = \iint_{\Omega} M3S\Lambda_h[v_h] g dx dt = \iint_{\Omega} (v_h g_t + f(v_h) g_x) dx dt + O(h^3),$$

что подтверждает наличие третьего порядка слабой аппроксимации данной разностной схемы на ее решениях.

2. Исследование устойчивости разностных схем. Исследуем условия устойчивости численного решения разностной схемы (9)

$$S\Lambda_h(u_h) = \frac{\delta_t^+ u_h}{\tau} + \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} f(u_h) - \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} f(u_h) + \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_t^+ + \delta_t^-}{2\tau} \cdot \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} (f(u_h) - u_h) = 0,$$

имеющей повышенный (2-й) порядок классической и слабой аппроксимации. Проверку устойчивости данной разностной схемы проведем при ее применении для аппроксимации линейного уравнения переноса, у которого $f(u) = au$. Тогда для оценки нормы разностного оператора шага

$$\hat{u}_h = T u_h$$

на гармониках $u_h = e^{i\alpha m}$, $\hat{u}_h = \lambda e^{i\alpha m}$ получим квадратное уравнение

$$\left[1 + iv \frac{a-1}{4a} \sin \alpha\right] \lambda^2 + \left[-1 - \frac{v^2}{a} (\cos \alpha - 1) + iv \sin \alpha\right] \lambda - iv \frac{a-1}{4a} \sin \alpha = 0.$$

Решив его, найдем

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 + \frac{v^2}{a}(1 - \cos \alpha) - iv \sin \alpha}{2[1 + iv \frac{a-1}{4a} \sin \alpha]} + \frac{\sqrt{[1 + \frac{v^2}{a}(1 - \cos \alpha) - iv \sin \alpha]^2 + 4[1 + iv \frac{a-1}{4a} \sin \alpha]iv \frac{a-1}{4a} \sin \alpha}}{2[1 + iv \frac{a-1}{4a} \sin \alpha]}. \quad (12)$$

Для сравнения рассмотрим разностную схему, предложенную в [12]:

$$\begin{aligned} \text{OS}\Lambda_h(u_h) = & [1 + \frac{1}{6} \delta_x^+ \delta_x^-] \frac{\delta_t^+ + \delta_t^-}{2\tau} u_h + [1 + \frac{1}{6} \delta_t^+ \delta_t^-] \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} f(u_h) + \\ & + [C_{-1} T^{-\tau} + C_0 E + C_{+1} T^{\tau}] \delta_x^{+2} \delta_x^{-2} u_h = 0, \end{aligned}$$

имеющую третий порядок классической и слабой аппроксимации. У нее искусственная вязкость представлена разностным оператором четвертого порядка дивергентности, что, по утверждению автора работы [12], приводит к снижению четвертого порядка классической и слабой аппроксимации исходного разностного оператора схемы до третьего порядка слабой аппроксимации. Заметим, что использование относительно большой искусственной вязкости в разностном уравнении может существенно изменить решение [13].

Соответствующее квадратное уравнение для множителя оператора перехода приведенной разностной схемы имеет вид

$$\begin{aligned} [2 + \cos \alpha + iv \sin \alpha + 2C_{+1}d]\lambda^2 + [2C_0d + i4v \sin \alpha]\lambda - \\ - [2 + \cos \alpha - iv \sin \alpha - 2C_{-1}d] = 0, \end{aligned}$$

где $d = 6(\cos 2\alpha - \cos \alpha + 3)$.

Для корней легко получить выражение

$$\lambda_{1,2} = \frac{-[C_0d + 2ic] + \sqrt{[C_0d + 2ic]^2 + [w + 2iC_{+1}d][\bar{w} - 2C_{-1}d]}}{[w + 2C_{+1}d]}. \quad (13)$$

Здесь $c = v \sin \alpha$; $w = b + ic$; $b = 2 + \cos \alpha$.

Коэффициенты C_{-1} , C_0 , C_{+1} выбираются из условия $|\lambda_{1,2}| \leq 1$.

Заметим, что построенная выше схема $S\Lambda_h(u_h) = 0$ при численном исследовании спектра ее оператора перехода, неустойчива в линейном приближении с $f(u) = au$, где $a < 0$, при любом v .

Варианты разностных схем, имеющих второй порядок слабой аппроксимации, предлагаются в виде

$$\begin{aligned}
V2S\Lambda_h(u_h) &= \frac{\delta_t^+ u_h}{\tau} + \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} f(u_h) + \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_t^+ + \delta_t^-}{2\tau} \cdot \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} f(u_h) = 0; \\
V3S\Lambda_h(u_h) &= \frac{\delta_t^+ u_h}{\tau} + \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} f(u_h) + \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_t^+ + \delta_t^-}{2\tau} \cdot \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} f(u_h) + \\
&\quad + \frac{h^3}{\tau} \sum_{j=-1}^{j=1} C_j T^{j\tau} \delta_x^{+2} \delta_x^- u_h = 0.
\end{aligned}$$

Уравнение, определяющее множитель перехода разностного оператора $V3S\Lambda_h(u_h)$, запишется так

$$[A_1 + iA_2]\lambda^2 + [B_1 + iB_2]\lambda + [G_1 + iG_2] = 0, \quad (14)$$

где $D_1 = 4 \cos \alpha - 3 - \cos 2\alpha$; $D_2 = 2 \sin \alpha + \sin 2\alpha$; $A_1 = 1 + C_{+1}D_1$;

$$A_2 = \frac{v}{4} \sin \alpha + C_{+1}D_2; \quad B_1 = -1 + C_0D_1; \quad B_2 = v \sin \alpha + C_0D_2;$$

$$G_1 = C_{-1}D_1; \quad G_2 = -\frac{v}{4} \sin \alpha + C_{-1}D_2.$$

Выражения для корней уравнения (14) имеют вид

$$\lambda_k(\alpha) = \operatorname{Re} \lambda_k(\alpha) + i \operatorname{Im} \lambda_k(\alpha),$$

где

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \lambda_k(\alpha) &= \\
&= \frac{-(A_1B_1 + A_2B_2) + |z|^{1/2} \left(A_1 \cos \frac{\arg z + 2\pi k}{2} + A_2 \sin \frac{\arg z + 2\pi k}{2} \right)}{2(A_1^2 + A_2^2)}; \\
\operatorname{Im} \lambda_k(\alpha) &= \\
&= \frac{-(A_1B_2 - A_2B_1) + |z|^{1/2} \left(-A_2 \cos \frac{\arg z + 2\pi k}{2} + A_1 \sin \frac{\arg z + 2\pi k}{2} \right)}{2(A_1^2 + A_2^2)};
\end{aligned}$$

$$z = B_1^2 - B_2^2 - 4(A_1G_1 - A_2G_2) + i(2B_1B_2 - 4(A_1G_2 + A_2G_1)); \quad k = 1, 2.$$

При нулевых значениях коэффициентов искусственной вязкости получим характеристическое уравнение для схемы $V2S\Lambda_h(u_h) = 0$

На приведенных ниже графиках (Рис.1-2) по горизонтальной оси отложены значения $\operatorname{Re} \lambda_k(\alpha)$, а по вертикальной – $\operatorname{Im} \lambda_k(\alpha)$. Сплошной линией обозначена единичная окружность.

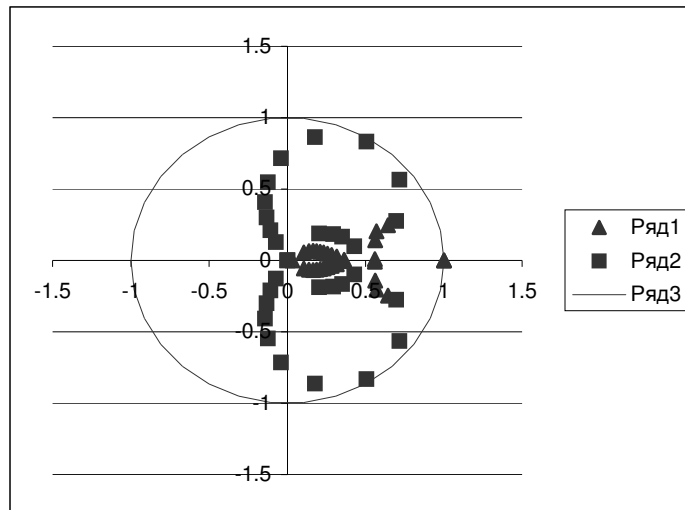


Рисунок.1. Зависимость $\lambda_k(\alpha) = \text{Re} \lambda_k(\alpha) + i \text{Im} \lambda_k(\alpha)$ ($k = 1$ - треугольник, $k = 2$ - прямоугольник) от $\alpha \in [0, 2\pi]$ при $\nu = 10.0$, $a = 1.5$.
Схема $V3S\Lambda_h(u_h) = 0$, $C_{-1} = 0.0$, $C_0 = 0.0$. $C_{+1} = -3.7$

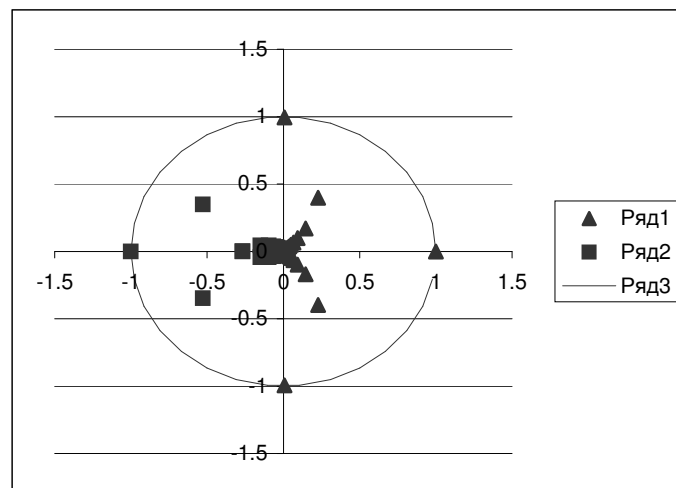


Рисунок.2. Зависимость $\lambda_k(\alpha) = \text{Re} \lambda_k(\alpha) + i \text{Im} \lambda_k(\alpha)$ ($k = 1$ - треугольник, $k = 2$ - прямоугольник) от $\alpha \in [0, 2\pi]$ при $\nu = 10.0$, $a = 1.5$.
Схема $OS\Lambda_h(u_h) = 0$, $C_{-1} = 0.0$, $C_0 = 0.0$. $C_{+1} = 210.0$

Решения разностной схемы $\Lambda ZV^N(N^N) = 0$, построенной с использованием ее интегрального представления, стабилизируются искусственной вязкостью со значительно меньшим коэффициентом при ней, чем схемы $OS\Lambda_h(u_h) = 0$. Причем, в первой схеме стабилизация осуществляется малым по модулю коэффициентом, а во второй схеме коэффициент большой и только положительный.

Можно заметить, что если при построении разностной схемы не используются ее дифференциальные следствия или следствия ее дифференциального представления, то порядки классической и слабой аппроксимации совпадают. Представляет теоретический и практический интерес использование интегральных приближений разностных схем

Список использованных источников

1. Зайцев В.Ф. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин – М.: Физматлит.– 2003.– 416 с.
2. Русанов В.В. Вычислительные погрешности разностных схем для расчета разрывных решений / В.В. Русанов, И.В. Безменов, Э.И. Нажесткина // Численное моделирование в аэрогидродинамике. – М. :Наука. – 1986. – С.174 – 186.
3. Остапенко В.В. Об аппроксимации законов сохранения разностными схемами сквозного счета / В.В. Остапенко // Журн. вычисл. математики и мат. физики.– 1990.– Т.30, №9.– С.1405 – 1417.
4. Остапенко В.В. О повышении порядка слабой аппроксимации законов сохранения на разрывных решениях / В.В. Остапенко // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1996. – Т.36, №10. – С. 146 –157.
5. Остапенко В.В. О построении разностных схем повышенной точности для сквозного расчета нестационарных ударных волн/ В.В. Остапенко // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2000. – Т.40, №12. – С. 1857–1874.
6. Ковыркина О.А. Построение асимптотики разностного решения на основе неклассических дифференциальных приближений / О.А. Ковыркина, В.В. Остапенко // Журнал вычисл. математики и мат. физики. – 2005. – Т.45, №1. – С. 88 –109.
7. Борисова Н.М. О численном моделировании процесса распространения прерывных волн по сухому руслу / Н.М. Борисова, В.В. Остапенко // Журнал вычисл. математики и мат. физики. – 2006. – Т.46, №7. – С. 1322 – 1344.
8. Пинчуков В.И. Трех - и четырехшаговые неявные абсолютно устойчивые схемы Рунге – Кутты четвертого порядка / В.И. Пинчуков // Журнал вычисл. математики и мат. физики. – 2006. – Т.46, № 1. – С.116 – 130.
9. Шокин Ю.И. Метод дифференциального приближения./ Ю.И. Шокин. – М.:Наука. – 1979 . – 224 с.
10. Ванин В.А. Вычислительные алгоритмы повышенного порядка слабой аппроксимации для задач газовой динамики / В.А. Ванин // Вісті Академії інженерних наук України, машинобудування та прогресивні технології. – 2007. – №3(33). – С.185 – 191.
11. Остапенко В.В. О построении разностных схем повышенной точности для сквозного расчета нестационарных ударных волн / В.В. Остапенко // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2000. –Т. 40, №12. – С.1857 – 1874.
12. Остапенко В.В. Симметричные компактные схемы с искусственными вязкостями повышенного порядка дивергентности / В.В. Остапенко // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2002. – т. 42, №7. – С.1019 – 1038.
13. Latter R. Similarity solution for a spherical shock wave// J.Appl. Phys., 1955. – 26, N8 – P.954-960.

Поступила в редакцию 27.02.2009.

*Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А. Г. Николаев,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков*