УДК 629.735.33

П.А. Фомичев, д-р техн. наук,
А.С. Третьяков

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В УСЛОВИЯХ СОВМЕСТНОГО ЦИКЛИЧЕСКОГО РАСТЯЖЕНИЯ-СЖАТИЯ И ИЗГИБА

В современных авиационных конструкциях широкое применение нашли фрезерованные панели, для которых характерно изменение толщины как по ширине, так и по длине. В местах переходов толщин наряду с напряжениями растяжения-сжатия, пропорциональными действующей нагрузке, возникают дополнительные напряжения от изгиба. В общем случае изгибные напряжения нелинейно зависят от действующей нагрузки, что связанно с изменением эксцентриситета при растяжении и сжатии панели.

Для расчета долговечности по локальному напряженно – деформированному состоянию необходимо знать параметры локальных циклов деформирования, в частности амплитудные и средние напряжения, амплитудные полные и остаточные деформации.

В данной работе изложена методика определения параметров локальных циклов деформирования для элементов конструкции с концентраторами напряжений в виде отверстия и совместном нагружении растяжением-сжатием и изгибом.

Для определения параметров локального деформирования материала в концентраторе находят применение различные приближенные зависимости. Широкое распространение получила формула Нейбера с различными поправочными функциями [1,2]

$$\sigma_a \cdot \varepsilon_{at} = K_T^2 \cdot \sigma_{ан} \cdot \varepsilon_{atн} \cdot F_м, \qquad (1)$$

где σ_a - амплитуда локальных упругопластических напряжений;

$\sigma_{ан}, \varepsilon_{ан}$ - амплитуды номинальных напряжения и деформации;

K_T - теоретический коэффициент концентрации напряжений при упругом деформировании материала;

$F_м$ - поправочная функция;

ε_{at} - амплитуда полной упругопластической деформации, которая определена по уравнению циклического деформирования

$$\varepsilon_{at} = \varepsilon_{ae} + \varepsilon_{ap},$$

где $\varepsilon_{ae} = \dfrac{\sigma_a}{E}$ - амплитуда упругой деформации;

$\varepsilon_{ap} = (1+t)\cdot\varepsilon_{ar}$ - амплитуда пластической деформации;

$\varepsilon_{ar} = \varepsilon_{ar}^{*} = \left(\dfrac{\sigma_a}{K\ (\sigma_m)}\right)^{\frac{1}{m}}$ - среднее значение амплитуды остаточной деформации в однородном поле напряжений. Под амплитудой остаточной деформации понимаем значение деформации при равенстве текущих номинальных напряжений нулю или их среднему значению.

K, m – коэффициенты уравнения диаграммы циклического деформирования;

σ_m - среднее локальное напряжение;

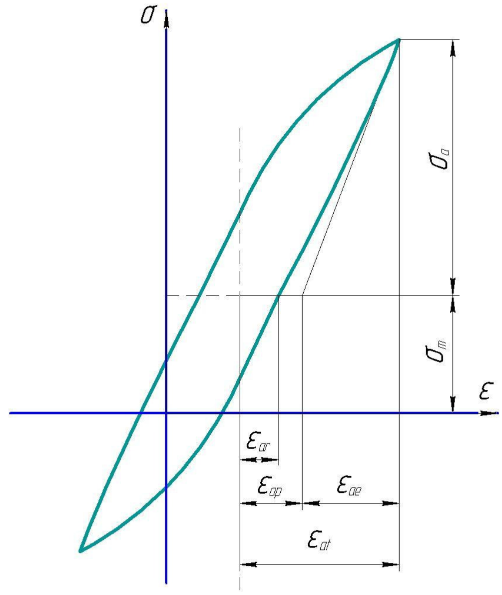


Рис. 1 - Контур петли гистерезиса при асимметричном нагружении

$t = \dfrac{1}{2^{\gamma-1}-1}$; $\gamma = 2 + h\cdot\dfrac{\varepsilon_{ar}}{\varepsilon_{at}}$; h - параметры контура петли гистерезиса.

С учетом приведенных соотношений, уравнение циклического деформирования можно записать в виде

$$\varepsilon_{at} = \frac{\sigma_a}{E} + (1+t\ )\cdot\left(\frac{\sigma_a}{K\ (\sigma_m)}\right)^{\frac{1}{m}}. \qquad (2)$$

Контур петли гистерезиса при асимметричном циклическом нагружении показан на рис. 1.

Циклическое нагружение элементов конструкций переменной толщины связанно с возникновением, наряду с растяжением, напряжений от изгиба. В таком случае зависимость для определения величины коэффициента концентрации напряжений целесообразно задавать в виде

$$K_T = \frac{K_T^o\cdot\sigma_H^o + K_T^u\cdot\sigma_H^u}{\sigma_H^o + \sigma_H^u},$$

где σ_H^o - номинальное осевое напряжение, под которым в дальнейшем будем понимать напряжение от растяжения или сжатия: $\sigma_H^o = \dfrac{P}{F}$;

$\sigma^u_н$ - номинальное напряжение от изгиба: $\sigma^u_н = \frac{M}{W}$.

K^o_T, K^u_T - теоретические коэффициенты концентрации напряжений при растяжении и изгибе.

Если величина изгибных напряжений нелинейно зависит от действующей нагрузки, она может быть найдена в результате расчета геометрически нелинейной задачи методом конечных элементов (МКЭ) [3]. Применительно к элементам конструкций с концентратором напряжений величина коэффициента концентрации оказывается зависимой от действующей нагрузки.

Введем понятие об обобщенном коэффициенте концентрации амплитуды напряжения K_{Ta}, который позволит учесть изменение теоретического коэффициента концентрации вследствие геометрической нелинейности в зависимости от величины прикладываемой нагрузки.

В общем случае K_{Ta} можно выразить в следующем виде

$$K_{Ta} = \frac{\sigma^y_{max} - \sigma^y_{min}}{\sigma^\Sigma_{max\ н} - \sigma^\Sigma_{min\ н}}, \tag{3}$$

где σ^y_{max}, σ^y_{min} - максимальное и минимальное напряжения на контуре отверстия при упругом деформировании с максимальным и минимальным номинальными напряжениями цикла нагрузок

$$\sigma^y_{max} = K^o_T \cdot \sigma^o_{max\ н} + K^u_T \cdot \sigma^u_{max\ н},$$

$$\sigma^y_{min} = K^o_T \cdot \sigma^o_{min\ н} + K^u_T \cdot \sigma^u_{min\ н};$$

$\sigma^\Sigma_{max\ н}$, $\sigma^\Sigma_{min\ н}$ - максимальное и минимальное суммарные номинальные напряжения:

$$\sigma^\Sigma_{max\ н} = \sigma^o_{max\ н} + \sigma^u_{max\ н}; \qquad \sigma^\Sigma_{min\ н} = \sigma^o_{min\ н} + \sigma^u_{min\ н};$$

$\sigma^o_{max\ н}$, $\sigma^o_{min\ н}$ - номинальные осевые напряжения в максимуме и минимуме цикла;

$\sigma^u_{max\ н}$, $\sigma^u_{min\ н}$ - номинальные напряжения от изгиба в максимуме и минимуме цикла.

Зависимость для определения K_{Ta} запишем так:

$$K_{Ta} = \frac{\left(K^o_T \cdot \sigma^o_{max\ н} + K^u_T \cdot \sigma^u_{max\ н}\right) - \left(K^o_T \cdot \sigma^o_{min\ н} + K^u_T \cdot \sigma^u_{min\ н}\right)}{\sigma^\Sigma_{max\ н} - \sigma^\Sigma_{min\ н}}. \tag{4}$$

Если отсутствуют напряжения от изгиба, формула (4) примет вид

$$K_{Ta} = \frac{K_T^o \cdot \sigma_{max\,н}^o - K_T^o \cdot \sigma_{min\,н}^o}{\sigma_{max\,н}^o - \sigma_{min\,н}^o}.$$

При этом $K_{Ta} = K_T^o$.

В случае отсутствия напряжений от растяжения-сжатия, формулу (4) можно записать так

$$K_{Ta} = \frac{K_T^u \cdot \sigma_{max\,н}^u - K_T^u \cdot \sigma_{min\,н}^u}{\sigma_{max\,н}^u - \sigma_{min\,н}^u}.$$

В этом случае $K_{Ta} = K_T^u$.

Таким образом, при изолированных растяжении-сжатии и изгибе обобщенный коэффициент концентрации амплитуд напряжений равен теоретическому коэффициенту концентрации при растяжении или изгибе.

В случае отсутствия геометрических концентраторов напряжений следует принимать $K_{Ta} = 1$.

При определении обобщенного коэффициента концентрации напряжений от совместного действия растяжения-сжатия и изгиба с помощью метода конечных элементов формулу (4) можно также записать в другом виде

$$K_{Ta} = \frac{\sigma_a^y}{\sigma_{aн}^o}, \qquad (5)$$

где σ_a^y - амплитуда напряжения на контуре отверстия при упругом деформировании: $\sigma_a^y = \dfrac{\sigma_{max}^y - \sigma_{min}^y}{2}$;

$\sigma_{aн}^o$ - амплитуда осевого номинального напряжения: $\sigma_{aн}^o = \dfrac{\sigma_{max\,н}^o - \sigma_{min\,н}^o}{2}$.

Такая форма записи позволяет упростить расчет локальных напряжений для малопластичных материалов, хотя величины K_{Ta}, найденные по формулам (4) и (5), будут отличаться.

Для малопластичных конструкционных материалов амплитуду номинальных деформаций без существенной погрешности можно принимать пропорциональной амплитуде напряжения.

По аналогии с уравнением (1) зависимость для расчета локальных напряжений в случае нагружения элемента конструкции осевыми и изгибными напряжениями запишем в виде

$$\sigma_a \cdot \varepsilon_{at} = K_{Ta}^2 \cdot \frac{(\sigma_{aн})^2}{E} \cdot F_м, \qquad (6)$$

где $\sigma_{aн} = \sigma_{aн}^{\Sigma}$ - амплитуда суммарных номинальных напряжений

$$\sigma_{aн}^{\Sigma} = \frac{\sigma_{max\,н}^{\Sigma} - \sigma_{min\,н}^{\Sigma}}{2}.$$

В случае если K_{Ta} определен по зависимости (5), следует принимать $\sigma_{aн} = \sigma_{aн}^{o}$.

Поправочную функцию, которая обеспечивает согласование величин упругопластических напряжений и деформаций на контуре отверстия, рассчитанных по уравнению (6) и полученных в результате расчета с использованием МКЭ, можно найти так [2]:

$$F_м = \frac{E \cdot \sigma_a^{МКЭ} \cdot \varepsilon_a^{МКЭ}}{(K_{Ta} \cdot \sigma_{aн})^2},$$

где $\sigma_a^{МКЭ}$, $\varepsilon_a^{МКЭ}$ - величины упругопластических напряжений и деформаций на контуре отверстия, полученные в результате расчета МКЭ с использованием диаграммы циклического деформирования.

Поправочную функцию следует находить для конкретного материала и концентратора напряжений в зависимости от номинального напряжения.

Следует отметить, что для малых значений пластических деформаций, характерных, например, для циклического нагружения малопластичных алюминиевых сплавов, величину поправочной функции можно принимать равной $F_м = 1$. Тем не менее в дальнейшем, не снижая общности, будем учитывать $F_м$ в правой части уравнения (6).

После подстановки в зависимость (6) уравнения диаграммы циклического деформирования (2) имеем

$$\sigma_a \cdot \left(\frac{\sigma_a}{E} + (1+t) \cdot \left(\frac{\sigma_a}{K\ (\sigma_m)} \right)^{\frac{1}{m}} \right) = K_{Ta}^2 \cdot \frac{(\sigma_{ан})^2}{E} \cdot F_м . \qquad (7)$$

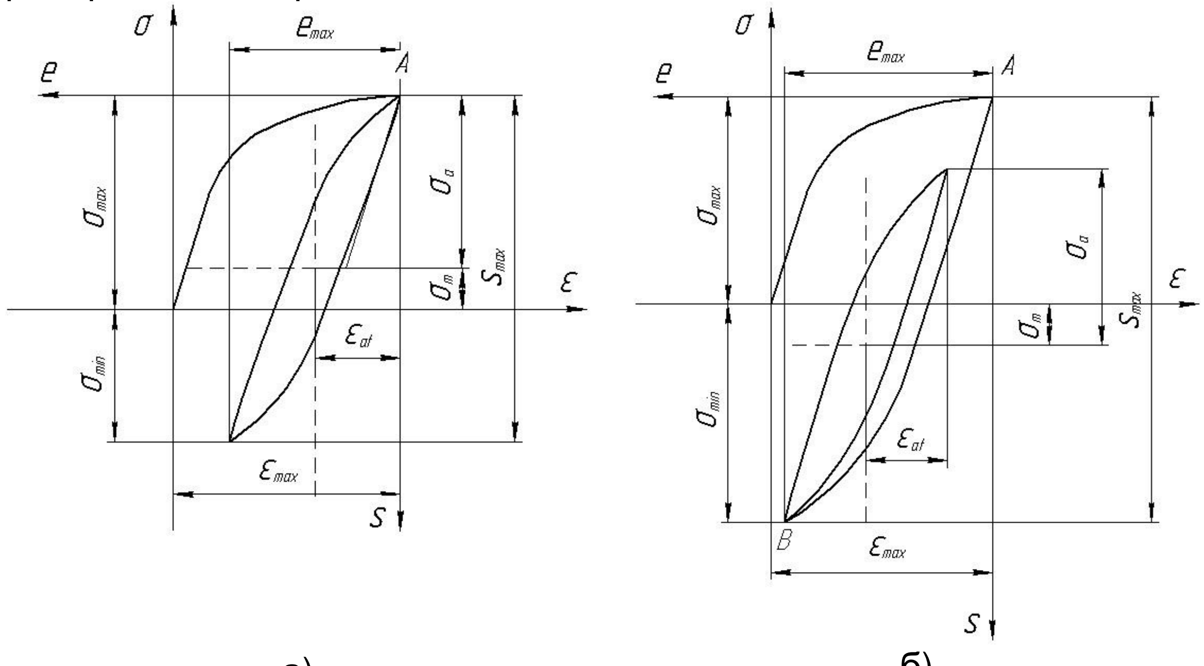
Экспериментально установлено [4], что параметр K в уравнении (7) зависит от среднего напряжения локального цикла нагружения. Тогда в случае асимметричного цикла номинальных напряжений имеем две неизвестные величины – σ_a и σ_m. Поэтому определение амплитудного и среднего локальных напряжений цикла деформирования материала требует использования дополнительных гипотез. В качестве таковых можно рассматривать положение точек реверса напряжений и деформаций в координатах разгрузки [1]:

а) реверс в точке А, при этом $\sigma_m = \sigma_{max} - \sigma_a$;

б) реверс в точке В, при этом $\sigma_m = \sigma_{min} + \sigma_a$.

Под реверсом понимаем изменение направления действия нагрузки.

Схема деформирования с реверсом А показана на рис. 2,а, а с реверсом В - на рис. 2,б.



а) б)

Рис. 2 – Модели деформирования материала в концентраторе напряжений

Первоначальное деформирование материала в концентраторе напряжений на первом полуцикле нагрузки происходит по кривой монотонного (статического) деформирования до достижения максимальных по модулю значений номинальных напряжений цикла

$\sigma_{max\ н}$, которые могут соответствовать как максимальным, так и минимальным суммарным номинальным напряжениям:

$$\begin{cases} \sigma_{max\ н} = \sigma^{\Sigma}_{max\ н} \ \ \textit{при} \ \ \sigma^{\Sigma}_{max\ н} > \left|\sigma^{\Sigma}_{min\ н}\right|; \\ \sigma_{max\ н} = \sigma^{\Sigma}_{min\ н} \ \ \textit{при} \ \ \sigma^{\Sigma}_{max\ н} < \left|\sigma^{\Sigma}_{min\ н}\right|. \end{cases}$$

Или в случае, если K_{Ta} определен по зависимости (5),

$$\begin{cases} \sigma_{max\ н} = \sigma^{o}_{max\ н} \ \ \textit{при} \ \ \sigma^{o}_{max\ н} > \left|\sigma^{o}_{min\ н}\right|; \\ \sigma_{max\ н} = \sigma^{o}_{min\ н} \ \ \textit{при} \ \ \sigma^{o}_{max\ н} < \left|\sigma^{o}_{min\ н}\right|. \end{cases}$$

Величина максимального локального напряжения σ_{max} найдена в результате решения уравнения

$$\sigma_{max} \cdot \varepsilon_{max\ t} = K_T^2 \cdot \frac{\left(\sigma_{max\ н}\right)^2}{E} \cdot F_м^c, \qquad (8)$$

где σ_{max} - локальное максимальное напряжение при упругопластическом деформировании;

$\varepsilon_{max\ t} = \varepsilon_{max\ e} + \varepsilon_{max\ p}$ - полная упругопластическая деформация;

$F_м^c$ - поправочная функция, аналогичная $F_м$, но определенная с использованием диаграммы монотонного деформирования.

Поскольку коэффициент концентрации напряжений зависит от нагрузки, то

$$\begin{cases} K_T = \dfrac{K_T^o \cdot \sigma^o_{max\ н} + K_T^u \cdot \sigma^u_{max\ н}}{\sigma^o_{max\ н} + \sigma^u_{max\ н}} \ \ \textit{при} \ \ \sigma^{\Sigma}_{max\ н} > \left|\sigma^{\Sigma}_{min\ н}\right|; \\ K_T = \dfrac{K_T^o \cdot \sigma^o_{min\ н} + K_T^u \cdot \sigma^u_{min\ н}}{\sigma^o_{min\ н} + \sigma^u_{min\ н}} \ \ \textit{при} \ \ \sigma^{\Sigma}_{max\ н} < \left|\sigma^{\Sigma}_{min\ н}\right|. \end{cases}$$

Или в случае, если K_{Ta} определен по зависимости (5),

$$\begin{cases} K_T = \dfrac{\sigma^y_{max}}{\sigma^o_{max\ н}} \ \ \textit{при} \ \ \sigma^{o}_{max\ н} > \left|\sigma^{o}_{min\ н}\right|; \\ K_T = \dfrac{\sigma^y_{min}}{\sigma^o_{min\ н}} \ \ \textit{при} \ \ \sigma^{o}_{max\ н} < \left|\sigma^{o}_{min\ н}\right|. \end{cases}$$

После подстановки в левую часть зависимости (8) уравнения диаграммы монотонного деформирования получим нелинейную относительно σ_{max} зависимость

$$\sigma_{max}\cdot\left(\frac{\sigma_{max}}{E}+\left(\frac{\sigma_{max}}{K_c}\right)^{\frac{1}{m_c}}\right)=K_T^2\cdot\frac{\left(\sigma_{max\,н}\right)^2}{E}\cdot F_м^c,$$

где K_c, m_c – коэффициенты уравнения монотонного (статического) деформирования.

Это уравнение удобно решать численно по методу Ньютона

$$\sigma_{max}^{i+1}=\sigma_{max}^{i}-\frac{F(\sigma_{max})}{F^{/}(\sigma_{max})},$$

где

$$F=\sigma_{max}\cdot\left(\frac{\sigma_{max}}{E}+\left(\frac{\sigma_{max}}{K_c}\right)^{\frac{1}{m_c}}\right)-K_T^2\cdot\frac{\left(\sigma_{max\,н}\right)^2}{E}\cdot F_м^c;$$

$$F^{/}=\frac{2\cdot\sigma_{max}}{E}+\frac{1}{1+m_c}\cdot\left(\frac{\sigma_{max}}{K_c}\right)^{\frac{1}{m_c}}.$$

В качестве начального приближения целесообразно принимать $\sigma_{max}=K_T\cdot\sigma_{max\,н}$.

Рассмотрим последовательно формирование локальных циклов деформирования, принимая в качестве точек реверса точки А и В.

Реверс в точке А. После достижения $\sigma_{max\,н}$ и реверса цикла номинального напряжения координаты разгрузки S – е поместим в точку А.

Предполагаем, что дальнейшее деформирование материала происходит согласно кривой циклического деформирования. Величину максимального локального напряжения в координатах разгрузки найдем из решения уравнения

$$S_{max}\cdot e_{max}=K_{Ta}^2\cdot\frac{\left(S_{max\,н}\right)^2}{E}\cdot F_м.$$

С учетом параметров диаграммы деформирования в координатах разгрузки [5] уравнение примет вид

$$S_{max}\cdot\left(\frac{S_{max}}{E}+2\cdot\varepsilon_{ap}\cdot\left(\frac{S_{max}}{2\cdot\sigma_a}\right)^{\gamma}\right)=K_{Ta}^2\cdot\frac{\left(S_{max\,н}\right)^2}{E}\cdot F_м.$$

Поскольку $S_{max}=2\cdot\sigma_a$ и $S_{max\,н}=2\cdot\sigma_{ан}$, это выражение примет вид

$$\sigma_a\cdot\left(\frac{\sigma_a}{E}+(1+t)\cdot\left(\frac{\sigma_a}{K\ (\sigma_m)}\right)^{\frac{1}{m}}\right)=K_{Ta}^2\cdot\frac{\left(\sigma_{ан}\right)^2}{E}\cdot F_м$$

Уравнение (7) можно решить численно методом Ньютона, учитывая, что

$$\begin{cases}\sigma_m=\sigma_{max}-\sigma_a \quad при \ \sigma_{max\,н}^{\Sigma}>\left|\sigma_{min\,н}^{\Sigma}\right|;\\ \sigma_m=\sigma_a-\sigma_{max} \quad при \ \sigma_{max\,н}^{\Sigma}<\left|\sigma_{min\,н}^{\Sigma}\right|.\end{cases}$$

В качестве начального приближения целесообразно принимать $\sigma_a=K_{Ta}\cdot\sigma_{ан}$ и $\varepsilon_{ap}=\varepsilon_{ar}$.

Реверс в точке В. После достижения $\sigma_{max\,н}$ и реверса цикла номинального напряжения координаты разгрузки S – e поместим в точку А. Дальнейшее деформирование материала происходит согласно кривой монотонного деформирования. Зависимость для нахождения максимального напряжения в координатах разгрузки имеет вид

$$S_{max}\cdot e_{\ max}=\frac{K_{Ta}^2\cdot\left(S_{max}\right)^2}{E}\cdot F_м^c.$$

С учетом уравнения диаграммы деформирования последнее соотношение примет вид

$$S_{max}\cdot\left(\frac{S_{max}}{E}+2\cdot\varepsilon_{ap}\cdot\left(\frac{S_{max}}{2\cdot\sigma_{max}}\right)^{\gamma}\right)=\frac{K_{Ta}^2\cdot\left(S_{max}\right)^2}{E}\cdot F_м^c. \qquad (9)$$

Уравнение (9) можно решить аналогично (8) методом Ньютона, при этом

$$F=S_{max}\cdot\left(\frac{S_{max}}{E}+2\cdot\varepsilon_{ap}\cdot\left(\frac{S_{max}}{2\cdot\sigma_{max}}\right)^{\gamma}\right)-\frac{K_{Ta}^2\cdot\left(S_{max}\right)^2}{E}\cdot F_м^c;$$

$$F^{/} = \frac{2 \cdot S_{max}}{E} + 2(\gamma \ \ + 1) \cdot \varepsilon_{ap} \cdot \left(\frac{S_{max}}{2 \cdot \sigma_{max}} \right)^{\gamma}.$$

В качестве начального приближения можно принять $S_{max} = 2 \cdot \sigma_{ан}$.

Тогда

$$\sigma_{min} = \sigma_{max} - S_{max}.$$

После достижения $\sigma_{min\ н}$ и реверса цикла номинального напряжения координаты разгрузки S – е поместим в точку B.

Последующее деформирование материала происходит согласно кривой циклического деформирования.

Дальнейший расчет амплитуды локального напряжения в концентраторе выполнен аналогично реверсу в точку А.

Проведено сопоставление значений упругопластических напряжений, полученных согласно (8) с $F_м = 1$ и МКЭ. Для этой цели выполнены расчеты НДС рабочей зоны образца с выборкой глубиной 2 мм и отверстием диаметром 5 мм при нагружении сжатием. Такой вариант нагружения выбран, поскольку при нем реализуется наибольшее значение величины отношения напряжений от изгиба к осевым напряжениям [3]. Параметры диаграмм монотонного и циклического деформирования соответствуют характеристикам сплава Д16. Применительно к монотонному деформированию результаты расчета показаны на рис.3, сплошная кривая соответствует уравнению (8), пунктирная – МКЭ.

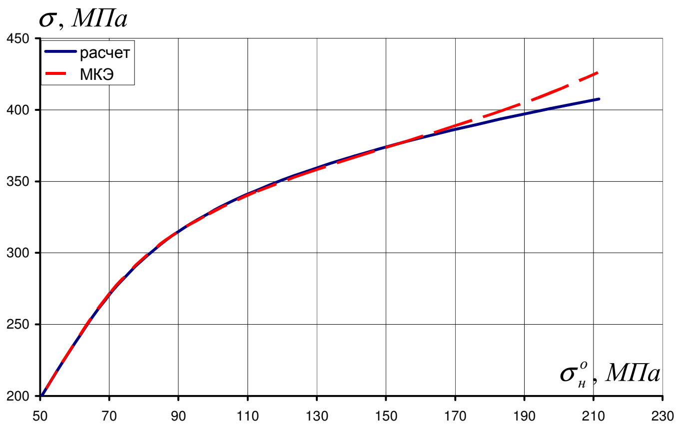


Рис. 3 – Сопоставление упругопластических напряжений

Максимальное отличие упругопластических напряжений для кривой монотонного деформирования не превышает 5%, а для циклической кривой - 1%.

Такое отличие напряжений сопоставимо с разбросами результатов расчетов в зависимости от используемой конечно-элементной сетки и КЭ пакета. С другой стороны, изменение амплитуды упругопластических напряжений на 1…2% для материалов Д16 и В95 приведет к изменению долговечности не более чем на 10%. Поэтому при расчете упругопластических напряжений в элементах конструкций из малопластичных материалов типа Д16 и В95 следует принимать $F_M = F_M^c = 1$.

Выводы

Разработана методика определения локальных упругопластических напряжений и деформаций в условиях совместного действия растяжения-сжатия и изгиба. Предложена зависимость для определения обобщенного коэффициента концентрации напряжений, позволяющая учесть изменение коэффициента концентрации напряжений в зависимости от действующей нагрузки. Установлено хорошее согласование напряжений, полученных с использованием предложенной методики и метода конечных элементов.

Предложенная методика позволяет сформировать цикл локального упругопластического деформирования материала в концентраторе напряжений.

Список использованных источников

1. Махутов Н.А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкции на прочность / Н.А. Махутов – М.: Машиностроение, 1981. – 272 с.
2. Гребенюк Я.В. Прогнозирование долговечности по локальному напряженно-деформированному состоянию элементов конструкций с геометрическими нерегулярностями: дис. канд. техн. наук. – Х., 2004. – 204 с.
3. Третьяков А.С. Анализ напряженно-деформированного состояния плоских образцов нагруженных комбинацией растяжения-сжатия и изгиба / А.С. Третьяков // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. Сб. науч. тр. Вып. 2 (58). Х., 2009. – С. 59 – 65.
4. Фомичев П.А. Изменение амплитуды пластической деформации при регулярном и программном нагружении сталей. / П.А. Фомичев, И.Ю. Трубчанин // Пробл. прочности. - 1991. - N 2. - С. 39 – 44.
5. Фомичев П.А. Уравнение контура и коэффициент формы петли гистерезиса. / П.А. Фомичев, И.Ю. Трубчанин // Пробл. прочности. - 1997. - N 3. - С. 30 – 38.

Поступила в редакцию 21.09.09.
Рецензент: д-р техн. наук, проф. Я.С. Карпов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков