УДК 517.977 А.Г. Николаев, д-р физ.-мат. наук

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НАПРЯЖЕННО–ДЕФОРМИРОВАННЫМ СОСТОЯНИЕМ СОСТАВНОГО ТЕЛА ПРИ ПОМОЩИ СТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

При конструировании механических объектов, которые предполагается эксплуатировать в условиях температурных полей, может быть поставлена задача оптимального управления НДС тела при помощи температурного поля, которая позволит минимизировать напряжения в областях их возможной концентрации в теле, в частности, на межфазной границе.

Подчеркнём, что задачи оптимального управления пространственными распределенными системами относятся к весьма сложному классу задач управления. Методы их исследования обычно основаны на использовании принципа максимума Понтрягина или его обобщений для записи необходимых условий экстремальности. Однако, в пространственных распределенных системах при реализации принципа максимума возникает ряд сложностей, с которыми можно познакомиться в монографии [1]. Другие подходы к решению указанных задач приведены в работах [2-4].

В настоящей статье предложен новый прямой метод построения решения задач оптимального управления, основанный на представлении вектора состояния системы и управляющего воздействия в форме разложений по базисным решениям краевых задач для соответствующих эллиптических дифференциальных уравнений. Метод может быть применен к многофазной упругой среде, границы фаз которой являются каноническими поверхностями. При удовлетворении граничных условий используется обобщенный метод Фурье (ОМФ) [5].

Для определённости рассмотрено двухфазное тело в форме шара со сферической неоднородностью. Для решения поставленной проблемы впервые развит аппарат ОМФ на задачи термоупругости в сферических системах координат, начала которых сдвинуты друг относительно друга по оси симметрии.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу оптимального управления при помощи температурного поля напряженно-деформированным состоянием кусочно–однородного составного шара радиуса R_1 со сферическим включением радиуса R_2, центры которых $O_i\,(i=1,2)$ сдвинуты друг относительно друга на a $(a+R_2<R_1)$. Границы указанных шаров обозначим соответственно через $\Gamma_i\,(i=1,2)$, а области однородности через Ω_i $(i=1,2)$. Термомеханические

характеристики двухфазного тела обозначим через $(G_i, \nu_i, \alpha_i, k_i)$ $(i = 1{,}2)$, где G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, α – коэффициент линейного температурного расширения, k – коэффициент теплопроводности.

Требуется определить температурное поле в шаре O_1 (фактически на его границе), которое подчиняется следующим условием:

$$\nabla^2 \vec{\text{Ш}}_i + \frac{1}{1-2\nu_j} \nabla\left(\nabla \vec{\text{Ш}}_i\right) = \alpha_i \frac{2(1+\nu_i)}{1-2\nu_i} \nabla \text{T}_i \text{ в } \Omega_\text{i}, \tag{1}$$

$$\nabla^2 \text{T}_\text{i} = 0 \text{ в } \Omega_\text{i} \tag{2}$$

$$\text{T}_{1|\Gamma_2} = \text{T}_{2|\Gamma_2};\ k_1 \frac{\partial \text{T}_1}{\partial r_2}\bigg|\Gamma_2 = k_2 \frac{\partial \text{T}_2}{\partial r_2}\bigg|\Gamma_2, \tag{3}$$

$$\vec{\text{Ш}}_{1|\Gamma_2} = \vec{\text{Ш}}_{2|\Gamma_2};\ \vec{F}_{1|\Gamma_2} = \vec{F}_{2|\Gamma_2}, \tag{4}$$

$$\vec{F}_{1|\Gamma_1} = -p\vec{n}, \tag{5}$$

$$\int\limits_{\Gamma_2} |F_n|^2 dS \to inf. \tag{6}$$

Здесь через T_i, $\vec{\text{Ш}}_i$, $\vec{F}_i$ $(i = 1{,}2)$ обозначены температурное поле и векторы перемещений и напряжений в областях Ω_i, $\vec{n}$ – вектор нормали к соответствующей поверхности.

2. Построение решения задачи (1)-(6). Введем две одинаково направленные сферические системы координат $\{r_i, \theta_i, \varphi_i\}$ $(i = 1{,}2)$, начала которых совместим с центрами O_i, а ось Oz направим по оси симметрии тела. Координаты в них связаны формулами

$$r_1 \sin\theta_1 = r_2 \sin\theta_2;\ r_1 \cos\theta_1 = r_2 \cos\theta_2 + a.$$

В введенных координат поверхность Γ_i имеет уравнение $r_i = R_i$.

Температурное поле в шаре O_1 можно определить по граничному условию, которое в силу осевой симметрии задачи имеет вид

$$\text{T}_{1|\Gamma_1} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n P_n(\cos\theta_1), \tag{7}$$

и получается разложением граничного значения температуры в ряд по функциям Лежандра.

Таким образом, решением задачи (1)-(6) является набор коэффициентов $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ из разложения (7).

Решение уравнения (2) будем искать в виде

$$\mathrm{T}_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^n P_n(\cos\theta_1) + b_n\left(\frac{R_2}{r_2}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta_2)\right] \text{ в } \Omega_1, \qquad (8)$$

$$\mathrm{T}_2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(\frac{r_2}{R_2}\right)^n P_n(\cos\theta_2) \text{ в } \Omega_2, \qquad (9)$$

где $P_n^{(m)}(x)$ – функции Лежандра первого рода, a_n, b_n, c_n – неизвестные коэффициенты.

При удовлетворении граничным условиям (3), (7) используются теоремы сложения гармонических функций

$$r_1^n P_n(\cos\theta_1) = a^n \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{r_2}{a}\right)^k P_k(\cos\theta_2), \qquad (10)$$

$$\frac{1}{r_2^{n+1}} P_n(\cos\theta_2) = \frac{1}{a^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!k!}\left(\frac{a}{r_1}\right)^{k+n+1} P_{k+n}(\cos\theta_1), \qquad (10)$$

которые могут быть получены из формул [6] предельным переходом. Формулы (10), (11) позволяют записать температурное поле T_1 раздельно в каждой из введенных систем координат

$$\mathrm{T}_1 = \sum_{k=0}^{\infty}\left[a_k\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^k + \left(\frac{a}{r_1}\right)^{k+1} \sum_{n=0}^{k} b_n \frac{k!}{n!(k-n)!}\left(\frac{R_2}{a}\right)^{n+1}\right] P_k(\cos\theta_1), \qquad (12)$$

$$\mathrm{T}_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\left[b_n\left(\frac{R_2}{r_2}\right)^{n+1} + \left(\frac{r_2}{a}\right)^n \sum_{k=n}^{\infty} a_k \frac{k!}{n!(k-n)!}\left(\frac{a}{R_1}\right)^k\right] P_k(\cos\theta_2). \qquad (13)$$

После удовлетворения условий (3), (7) получаем

$$c_n + \sum_{s=0}^{\infty} t_{ns}^{(1)} c_s = \sum_{k=0}^{\infty} f_{nk} d_k\,,\ n = 0,1,\ldots; \qquad (14)$$

$$a_n + \sum_{s=0}^{\infty} t_{ns}^{(2)} a_s = d_n\,,\ n = 0,1,\ldots; \qquad (15)$$

$$b_n = (1-\gamma_n)c_n,\ n = 0,1,\ldots; \qquad (16)$$

где

$$t_{ns}^{(1)} = \left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right)\frac{1}{\gamma_n}\frac{s}{2s+1}\left(\frac{R_2}{a}\right)^{n+s+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{n!(k-n)!}\frac{k!}{s!(k-s)!}\left(\frac{a}{R_1}\right)^{2k+1},$$

$$t_{ns}^{(2)} = \left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right)\left(\frac{a}{R_1}\right)^{n+s+1} \sum_{k=0}^{s} \frac{k}{2k+1}\frac{1}{\gamma_k}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{s!}{k!(s-k)!}\left(\frac{R_2}{a}\right)^{2k+1},$$

$$f_{nk}=\frac{k!}{n!(k-n)!}\frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{R_2}{a}\right)^n\left(\frac{a}{R_1}\right)^k,\ \gamma_n=1-\left(1-\frac{k_2}{k_1}\right)\frac{n}{2n+1}.$$

Как известно, общее решение уравнения (1) в областях Ω_i записывается следующим образом:

$$\vec{\text{П}}_i=\vec{\text{П}}_{io}+\vec{\text{П}}_i^{\text{T}},\qquad(17)$$

где $\vec{\text{П}}_{io}$ – общее решение однородного уравнения (1), $\vec{\text{П}}_i^{\text{T}}$ – частное решение неоднородного уравнения (1) в областях Ω_i. Решения $\vec{\text{П}}_{io}$ представим в виде

$$\vec{\text{П}}_{10}=\sum_{j=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n^{(j)}\vec{w}_{j,n}^{-}(r_1,\theta_1)+b_n^{(j)}\vec{w}_{j,n}^{+}(r_2,\theta_2)\right],\qquad(18)$$

$$\vec{\text{П}}_{20}=\sum_{j=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(j)}\vec{w}_{j,n}^{-}(r_2,\theta_2),\qquad(19)$$

где

$$\vec{w}_{1,n}^{+}(r_2,\theta_2)=\nabla w_{n-1}^{+}(r_2,\theta_2),\ w_n^{+}(r_2,\theta_2)=\frac{n!}{r_2^{n+1}}P_n(\cos\theta_2),\qquad(20)$$

$$\vec{w}_{2,n}^{+}(r_2,\theta_2)=[z_2\nabla+(4\nu-3)\vec{e}_z]w_n^{+}(r_2,\theta_2)-\frac{R^2}{2n+3}\nabla w_{n+1}^{+}(r_2,\theta_2),\qquad(21)$$

$$\vec{w}_{1,n}^{-}(r_1,\theta_1)=\nabla w_{n+1}^{-}(r_1,\theta_1),\ w_n^{-}(r_1,\theta_1)=\frac{r_1^n}{n!}P_n(\cos\theta_1),\qquad(22)$$

$$\vec{w}_{2,n}(r_1,\theta_1)=[z_1\nabla+(4\nu-3)\vec{e}_z]w_n^{-}(r_2,\theta_2)-\frac{R^2}{2n-1}\nabla w_{n-1}^{-}(r_1,\theta_1),\qquad(23)$$

причем в решениях $\vec{w}_{2,n}^{\pm}$ параметры ν, R в областях Ω_i принимают значение ν_i, R_i, $\vec{e}_z$ – орт декартовой системы координат.

Базисные решения (20)-(23) являются осесимметричным вариантом общих решений для шара, введенных в работе [7]. Определение и обоснование базисности приведено в [8].

Для решений (20)-(23) в области Ω_1 доказаны следующие теоремы сложения:

$$\vec{w}_{j,n}^{-}(r_1,\theta_1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{a^{n-k}}{(n-k)!}\left\{\vec{w}_{j,k}^{-}(r_2,\theta_2)+\delta_{j2}\beta_{nk}^{(2)}\vec{w}_{1,k}^{-}(r_2,\theta_2)\right\},\qquad(24)$$

$$\vec{w}_{j,n}^{+}(r_2,\theta_2)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{a^{k-n}}{(k-n)!}\left\{\vec{w}_{j,k}^{+}(r_1,\theta_1)+\delta_{j2}\beta_{nk}^{(1)}\vec{w}_{1,k}^{+}(r_2,\theta_2)\right\},\qquad(25)$$

где

$$\beta_{nk}^{(1)} = n-k+\frac{(k-n)(k-n+1)}{2k-1}\left(\frac{R_1}{a}\right)^2 - \frac{(k-n)(k-n-1)}{2n+3}\left(\frac{R_2}{a}\right)^2,$$

$$\beta_{nk}^{(2)} = n-k-1+\frac{(n-k)(n-k-1)}{2k+3}\left(\frac{R_2}{a}\right)^2 - \frac{(n-k)(n-k-1)}{2n-1}\left(\frac{R_1}{a}\right)^2,$$

δ_{jk} – дельта-символ Кронекера.

Остановимся на построении частных решений уравнения (1) в областях Ω_i.

Будем искать решение $\vec{\text{Ш}}_1^{\text{T}}$ в виде

$$\vec{\text{Ш}}_1^{\text{T}} = z_1\nabla\Phi_1 + \nabla\Phi_0, \tag{26}$$

где Φ_i – гармонические функции в Ω_1. Подстановка $\vec{\text{Ш}}_1^{\text{T}}$ в (1) приводит к уравнению

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = \alpha_1\frac{2(1+\nu_1)}{3-4\nu_1}\text{T}_1. \tag{27}$$

Учитывая формулу (8), соотношение

$$\frac{\partial}{\partial z}w_{n\mp1}^{\pm} = \mp w_n^{\pm} \tag{28}$$

и требование точности решения $\vec{\text{Ш}}_1^{\text{T}}$ на поверхностях Γ_i, предлагается следующий вариант вектор-функции $\vec{\text{Ш}}_1^{\text{T}}$:

$$\vec{\text{Ш}}_1^{\text{T}} = \alpha_\nu^{(1)}\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_{n-1}\frac{(n-1)!}{R_1^{n-1}}\vec{\tilde{w}}_{2,n}^{-}(r_1,\theta_1) - b_{n+1}\frac{R_2^{n+2}}{(n+1)!}\vec{\tilde{w}}_{2,n}^{+}(r_2,\theta_2)\right] +$$

$$+\alpha_\nu R_2 b_0\vec{\tilde{w}}(r_2,\theta_2), \tag{29}$$

где

$$\vec{\tilde{w}}_{2,n}^{-}(r_1,\theta_1) = z_1\nabla w_n^{-}(r_1,\theta_1) - \frac{R_1^2}{2n-1}\nabla w_{n-1}^{-}(r_1,\theta_1), \tag{30}$$

$$\vec{\tilde{w}}_{2,n}^{+}(r_2,\theta_2) = z_2\nabla w_n^{+}(r_2,\theta_2) - \frac{R_2^2}{2n+3}\nabla w_{n+1}^{+}(r_2,\theta_2) \tag{31}$$

$$\vec{\tilde{w}}(r_2,\theta_2) = \nabla r_2,\ \alpha_\nu^{(j)} = \alpha_j\frac{2(1+\nu_j)}{3-4\nu_j},\ \alpha_\nu = \alpha_1\frac{1+\nu_1}{2(1-\nu_1)}.$$

Здесь и далее слагаемые с отрицательными индексами коэффициентов в суммах отсутствуют. Заметим, что последний член в формуле (29) необходим в силу того, что векторная функция $b_0 R_2 \vec{\tilde{w}}^{+}_{2,-1}(r_2,\theta_2)$ не является регулярной в области Ω_1.

Аналогично строится решение $\vec{\text{Ц}}^{\mathrm{T}}_2$ в Ω_2

$$\vec{\text{Ц}}^{\mathrm{T}}_2=\alpha_\nu^{(2)}\sum_{n=0}^{\infty}c_{n-1}\frac{(n-1)!}{R_2^{n-1}}\vec{\tilde{w}}^{-}_{2,n}(r_2,\theta_2). \tag{32}$$

Для базисных частных решений $\vec{\tilde{w}}^{\pm}_{2,n}$, $\vec{\tilde{w}}$ доказаны следующие теоремы сложения в Ω_1:

$$\vec{\tilde{w}}^{-}_{2,n}(r_1,\theta_1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{a^{n-k}}{(n-k)!}\left\{\vec{\tilde{w}}^{-}_{2,k}(r_2,\theta_2)+\beta^{(2)}_{nk}\vec{w}^{-}_{1,k}(r_2,\theta_2)\right\}, \tag{33}$$

$$\vec{\tilde{w}}^{+}_{2,n}(r_2,\theta_2)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{a^{k-n}}{(k-n)!}\left\{\vec{\tilde{w}}^{+}_{2,k}(r_1,\theta_1)+\beta^{(1)}_{nk}\vec{w}^{+}_{1,k}(r_1,\theta_1)\right\}, \tag{34}$$

$$\vec{\tilde{w}}(r_2,\theta_2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\left\{-\frac{1}{2k-1}\nabla\left[r_1^2 w_k^{+}(r_1,\theta_1)\right]+\frac{a^2}{2k+3}\nabla w_k^{+}(r_1,\theta_1)\right\}. \tag{35}$$

Используя формулы (24), (25), (33) – (35), вектор перемещения $\vec{\text{Ц}}_1$ можно представить раздельно в каждой сферической системе координат

$$\begin{aligned}\vec{\text{Ц}}_1=&\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(j)}\vec{w}^{-}_{j,k}(r_1,\theta_1)+\sum_{k=0}^{\infty}\vec{w}^{+}_{1,k}(r_1,\theta_1)\cdot\\&\cdot\sum_{n=0}^{k}\frac{a^{k-n}}{(k-n)!}\left[b_n^{(1)}+\beta^{(1)}_{nk}b_n^{(2)}+\alpha_\nu^{(1)}\frac{R_2^{n+2}}{(n+1)!}\beta^{(1)}_{nk}b_{n+1}\right]+\\&+\sum_{k=0}^{\infty}\vec{w}^{+}_{2,k}(r_1,\theta_1)\sum_{n=0}^{k}\frac{a^{k-n}}{(k-n)!}b_n^{(2)}+\alpha_\nu^{(1)}\sum_{k=0}^{\infty}a_{k-1}\frac{(k-1)!}{R_1^{k-1}}\vec{\tilde{w}}^{-}_{2,k}(r_1,\theta_1)-\\&-\alpha_\nu^{(1)}\sum_{k=0}^{\infty}\vec{\tilde{w}}^{+}_{2,k}(r_1,\theta_1)\sum_{n=0}^{k}\frac{a^{k-n}}{(k-n)!}\frac{R_2^{n+2}}{(n+1)!}b_{n+1}+\\&+\alpha_\nu R_2 b_0\sum_{k+0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\left\{-\frac{1}{2k-1}\nabla\left[r_1^2 w_k^{+}(r_1,\theta_1)\right]+\right.\\&\left.+\frac{a^2}{2k+3}\nabla w_k^{+}(r_1,\theta_1)\right\},\end{aligned} \tag{36}$$

$$\vec{\Pi}_1 = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(j)} \vec{w}_{j,k}^{+}(r_2,\theta_2) + \sum_{k=0}^{\infty} \vec{w}_{1,k}^{-}(r_2,\theta_2)\cdot$$

$$\cdot\sum_{n=k}^{\infty} \frac{a^{n-k}}{(n-k)!}\left[a_n^{(1)} + \beta_{nk}^{(2)} a_n^{(2)} + \alpha_\nu^{(1)} \frac{(n-1)!}{R_1^{n-1}} \beta_{nk}^{(2)} a_{n-1}\right] +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty} \vec{w}_{2,k}^{-}(r_2,\theta_2) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a^{n-k}}{(n-k)!} a_n^{(2)} + \alpha_\nu^{(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\vec{w}}_{2,k}^{-}(r_2,\theta_2) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a^{n-k}}{(n-k)!}\cdot$$

$$\cdot\frac{(n-1)!}{R_1^{n-1}} a_{n-1} - \alpha_\nu^{(1)} \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} \frac{R_2^{k+2}}{(k+1)!} \tilde{\vec{w}}_{2,k}^{+}(r_2,\theta_2) + \tilde{\vec{w}}(r_2,\theta_2). \quad (37)$$

После перехода в формулах (36), (37) к напряжениям и удовлетворения граничных условий (4), (5) получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов

$$\frac{1}{k}\tilde{b}_k^{(1)} + \frac{k+2}{2k+3}\tilde{b}_k^{(2)} + \frac{R_1}{R_2}\sum_{n=k}^{\infty} w_{nk} \frac{1}{k+1}\left[\tilde{a}_n^{(1)} + \beta_{nk}^{(2)} \tilde{a}_n^{(2)} +\right.$$

$$\left.+\alpha_\nu^{(1)} \beta_{nk}^{(2)} \frac{1}{n} a_{n-1}\right] + \frac{k-1}{2k-1}\frac{R_1}{R_2}\sum_{n=k}^{\infty} w_{nk}\tilde{a}_n^{(2)} +$$

$$+\alpha_\nu^{(1)} \frac{k-1}{2k-1}\frac{R_1}{R_2}\sum_{n=k}^{\infty} w_{nk}\frac{1}{n}a_{n-1} - \alpha_\nu^{(1)} b_{k+1}\frac{k+2}{(k+1)(2k+3)} -$$

$$-\alpha_\nu b_0 \delta_{k1} = \frac{1}{k+1}\tilde{c}_k^{(1)} + \frac{k-1}{2k-1}\tilde{c}_k^{(2)} + \alpha_\nu^{(2)} \frac{k-1}{k(2k-1)} c_{k-1}, \quad (38)$$

$$\tilde{b}_0^{(1)} = 0, \quad (39)$$

$$-\tilde{b}_k^{(1)} + \left[4\nu_1 - 3 - \frac{(k+1)^2}{2k+3}\right]\tilde{b}_k^{(2)} + \frac{R_1}{R_2}\sum_{n=k}^{\infty} w_{nk}\left[a_n^{(1)} + \beta_{nk}^{(2)} a_n^{(2)} +\right.$$

$$\left.+\alpha_\nu^{(1)}\beta_{nk}^{(2)}\frac{1}{n}a_{n-1}\right] + \left(4\nu_1 - 3 + \frac{k^2}{2k-1}\right)\frac{R_1}{R_2}\sum_{n=k}^{\infty} w_{nk}\tilde{a}_n^{(2)} +$$

$$+\alpha_\nu^{(1)}\frac{k^2}{2k-1}\frac{R_1}{R_2}\sum_{n=k}^{\infty} w_{nk}\frac{1}{n}a_{n-1} + \alpha_\nu^{(1)}\frac{k+1}{2k+3}b_{k+1} + \alpha_\nu b_0\delta_{k1} =$$

$$= \tilde{c}_k^{(1)} + \left(4\nu_2 - 3 + \frac{k^2}{2k-1}\right)\tilde{c}_k^{(2)} + \alpha_\nu^{(2)}\frac{k}{2k-1}c_{k-1}, \quad (40)$$

$$-\frac{k+1}{k}\tilde{b}_k^{(1)}-\left[\frac{(k+2)(k+3)}{2k+3}-2\nu_1\right]\tilde{b}_k^{(2)}+\frac{k}{k+1}\sum_{n=k}^{\infty}w_{nk}\left[\tilde{a}_n^{(1)}+\right.$$

$$\left.+\beta_{nk}^{(2)}\tilde{a}_n^{(2)}+\alpha_\nu^{(1)}\beta_{nk}^{(2)}\frac{1}{n}a_{n-1}\right]+\left[\frac{(k-1)(k-2)}{2k-1}+2\nu_1\right]\sum_{n=k}^{\infty}w_{nk}\left[\tilde{a}_n^{(2)}+\right.$$

$$+\alpha_\nu^{(1)}\left[\frac{(k-1)(k-2)}{2k-1}-\frac{3}{2}\right]\sum_{n=k}^{\infty}w_{nk}\frac{1}{n}a_{n-1}+$$

$$+\alpha_\nu^{(1)}\frac{1}{k+1}\left[\frac{(k+2)(k+3)}{2k+3}+\frac{3}{2}\right]b_{k+1}+\alpha_\nu b_0\delta_{k1}=$$

$$=\frac{G_2}{G_1}\frac{k}{k+1}\tilde{c}_k^{(1)}+\frac{G_2}{G_1}\left[\frac{(k-1)(k-2)}{2k-1}+2\nu_2\right]\tilde{c}_k^{(2)}+$$

$$+\alpha_\nu^{(2)}\frac{G_2}{G_1}\frac{1}{k}\left[\frac{(k-1)(k-2)}{2k-1}+\frac{3}{2}\right]c_{k-1}, \tag{41}$$

$$(k+1)\tilde{b}_k^{(1)}+(k+1)\left[\frac{(k+1)(k+3)}{2k+3}+1-2\nu_1\right]\tilde{b}_k^{(2)}+$$

$$+k\sum_{n=k}^{\infty}w_{nk}\left[\tilde{a}_n^{(1)}+\beta_{nk}^{(2)}\tilde{a}_n^{(2)}+\alpha_\nu^{(1)}\beta_{nk}^{(2)}\frac{1}{n}a_{n-1}\right]+$$

$$k\left[\frac{k(k-2)}{2k-1}+2\nu_1-1\right]\sum_{n=k}^{\infty}w_{nk}\tilde{a}_n^{(2)}+\alpha_\nu^{(1)}k\left[\frac{k(k-2)}{2k-1}+\frac{1}{2}\right]\cdot$$

$$\cdot\sum_{n=k}^{\infty}w_{nk}\frac{1}{n}a_{n-1}-\alpha_\nu^{(1)}\left[\frac{(k+1)(k+3)}{2k+3}-\frac{1}{2}\right]b_{k+1}-\alpha_\nu b_0\delta_{k1}=$$

$$=\frac{G_2}{G_1}k\tilde{c}_k^{(1)}+\frac{G_2}{G_1}k\left[\frac{k(k-2)}{2k-1}+2\nu_2-1\right]\tilde{c}_k^{(2)}+$$

$$+\alpha_\nu^{(2)}\frac{G_2}{G_1}\left[\frac{k(k-2)}{2k-1}+\frac{1}{2}\right]c_{k-1}, \tag{42}$$

$$\frac{k}{k+1}\tilde{a}_k^{(1)}+\left[\frac{(k-1)(k-2)}{2k-1}+2\nu_1\right]\tilde{a}_k^{(2)}-\frac{k+1}{k}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\sum_{n=0}^{k}w_{kn}\left[\tilde{b}_n^{(1)}+\right.$$

$$+\beta^{1}_{nk}\tilde{b}^{(2)}_{n}+\alpha^{(1)}_{\nu}\beta^{(2)}_{nk}\frac{1}{n+1}b_{n+1}\Bigg]-\left[\frac{(k+2)(k+3)}{2k+3}-2\nu_1\right]\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\cdot$$

$$\cdot\sum_{n=0}^{k}w_{kn}\tilde{b}^{(2)}_{n}+\alpha^{(1)}_{\nu}\frac{1}{k}\left[\frac{(k-1)(k-2)}{2k-1}+\frac{3}{2}\right]a_{k-1}+$$

$$+\alpha^{(1)}_{\nu}\left[\frac{(k+2)(k+3)}{2k+3}-\frac{3}{2}\right]\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\sum_{n=0}^{k}w_{kn}\frac{1}{n+1}b_{n+1}-$$

$$-\alpha_{\nu}\frac{R_2}{R_1}\left(\frac{a}{R_1}\right)^{k+1}\left[\frac{3k+5}{2k+3}-\frac{k-1}{2k-1}\left(\frac{R_1}{a}\right)^2\right]b_0=\frac{p}{2G_1}\delta_{k1}, \quad (43)$$

$$k\tilde{a}^{(1)}_{k}+k\left[\frac{k(k-2)}{2k-1}+2\nu_1-1\right]\tilde{a}^{(2)}_{k}+(k+1)\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\sum_{n=0}^{k}w_{kn}\Bigg[\tilde{b}^{(1)}_{n}+$$

$$+\beta^{1}_{nk}\tilde{b}^{(2)}_{n}+\alpha^{(1)}_{\nu}\beta^{(2)}_{nk}\frac{1}{n+1}b_{n+1}\Bigg]+$$

$$+(k+1)\left[\frac{(k+1)(k+3)}{2k+3}-2\nu_1+1\right]\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\cdot$$

$$\cdot\sum_{n=0}^{k}w_{kn}\tilde{b}^{(2)}_{n}+\alpha^{(1)}_{\nu}\left[\frac{k(k-2)}{2k-1}+\frac{1}{2}\right]a_{k-1}-$$

$$-\alpha^{(1)}_{\nu}(k+1)\left[\frac{(k+1)(k+3)}{2k+3}-\frac{1}{2}\right]\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\sum_{n=0}^{k}w_{kn}\frac{1}{n+1}b_{n+1}+\alpha_{\nu}\frac{R_2}{R_1}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{a}{R_1}\right)^{k+1}\left[\frac{k(k+3)}{2k+3}-\frac{k(k+1)}{2k-1}\left(\frac{R_1}{a}\right)^2\right]b_0=-\frac{p}{2G_1}\delta_{k1}, \quad (44)$$

где

$$\tilde{a}^{(j)}_{k}=a^{(j)}_{k}\frac{R_1^{k-1}}{k!},\ \tilde{b}^{(j)}_{k}=b^{(j)}_{k}\frac{k!}{R_2^{k+2}},\ \tilde{c}^{(j)}_{k}=c^{(j)}_{k}\frac{R_2^{k-1}}{k!},$$

$$w_{nk}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{R_2}{a}\right)^k\left(\frac{a}{R_1}\right)^n.$$

Заметим также, что интеграл, входящий в формулу (6), равен

$$\int_{\Gamma_2}|F_n|^2ds=8\pi G_2^2R_2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1/2}\left\{\left[\frac{k}{k+1}\tilde{c}^{(1)}_{k}+\left(\frac{(k-1)(k-2)}{2k-1}+2\nu_2\right)\tilde{c}^{(2)}_{k}+\right.\right.$$

$$+\alpha_{\nu}^{(2)}\frac{1}{k}\left(\frac{(k-1)(k-2)}{2k-1}+\frac{3}{2}\right)c_{k-1}\Bigg]^{2}k(k+1)+\Bigg[k\tilde{c}_{k}^{(1)}+k\left(\frac{k(k-2)}{2k-1}+\right.$$

$$\left.+2\nu_{2}-1\right)\tilde{c}_{k}^{(2)}+\alpha_{\nu}^{(2)}\left(\frac{k(k-2)}{2k-1}+\frac{1}{2}\right)c_{k-1}\Bigg]^{2}\Bigg\}. \qquad (45)$$

Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений (14), (15), (16), (38)-(44) могут быть записаны в операторной форме

$$\left(\mathrm{I}+\mathrm{T}^{(1)}\right)\bar{c}=F\bar{d}, \qquad (46)$$

$$\left(\mathrm{I}+\mathrm{T}^{(2)}\right)\bar{a}=\bar{d}, \qquad (47)$$

$$\bar{b}^{(j)}=B_{j}\left\{\bar{a},\bar{c}^{(1)},\bar{c}^{(2)},\bar{c}\right\}, \qquad (48)$$

$$\bar{a}^{(j)}=A_{j}\left\{\bar{a},\bar{c}^{(1)},\bar{c}^{(2)},\bar{c},p\bar{f}\right\}, \qquad (49)$$

$$(\mathrm{I}+C)\left\{\bar{c}^{(1)},\bar{c}^{(2)}\right\}=C_{1}\{\bar{a},\bar{c}\}+p\bar{f}_{1}, \qquad (50)$$

где $\bar{d}=(d_i)_{i=0}^{\infty}$, $\bar{a}=(a_i)_{i=0}^{\infty}$, $\bar{c}=(c_i)_{i=0}^{\infty}$, $\bar{a}^{(j)}=\left(\tilde{a}_i^{(j)}\right)_{i=0}^{\infty}$, $\bar{b}^{(j)}=\left(\tilde{b}_i^{(j)}\right)_{i=0}^{\infty}$, $\bar{c}^{(j)}=\left(\tilde{c}_i^{(j)}\right)_{i=0}^{\infty}$, $\bar{f}$, $\bar{f}_1$ – элементы гильбертова пространства l_2, $\bar{f}$, $\bar{f}_1$ – известные правые части, $\mathrm{T}^{(j)}$, C – линейные компактные операторы, действующие соответственно в пространствах l_2 и $l_2\times l_2$; A_j, B_j, C_1, F – линейные ограниченные операторы в соответствующих пространствах. Все перечисленные операторы являются матричными.

Компактность операторов $\mathrm{T}^{(j)}$ и C обусловлена тем, что модули их матричных коэффициентов можно оценить сверху линейными комбинациями выражений вида

$$t_{nk}=n^{\alpha}k^{\beta}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{R_2}{a}\right)^{k}\left(\frac{a}{R_1}\right)^{n},$$

для которых $\sum\limits_{n,k=0}^{\infty}t_{nk}<\infty$.

Из компактности операторов $\mathrm{T}^{(j)}$ и C и единственности решения краевых задач теплопроводности и термоупругости следует непрерывная обратимость операторов в системах (46), (47), (50). Решением этих систем будут последовательности

$$\overline{c}^{(j)} = D^{(j)}\overline{d} + p\overline{g}_j,\ (j = -1{,}2), \tag{51}$$

$$\overline{c} = D\overline{d}\,, \tag{52}$$

где $D^{(j)}$, D – линейные ограниченные операторы в l_2, $\overline{g}_j \in l_2$. Явный вид операторов $D^{(j)}$, D и правых частей может быть получен численно, например, методом редукции.

Подстановка соотношений (51), (52) в (45) выражает функционал $\int\limits_{\Gamma_2} |F_n|^2 ds$ в виде:

$$\int\limits_{\Gamma_2} |F_n|^2 ds = \sum_{j=1}^{2} \left\| V_j\overline{d} + p\overline{g}_j \right\|^2, \tag{53}$$

где операторы V_j ограничены в l_2, $\overline{g}_j \in l_2$. Записывая необходимое условие экстремума функционала (53), получаем для определения неизвестных $(d_i)_{i=0}^{\infty}$ линейную алгебраическую систему.

Заметим, что численная реализация предложенного подхода весьма эффективна, ввиду того, что каждая из систем (46), (47), (50) обращается раздельно и матричные коэффициенты систем экспоненциально убывают. Последнее обстоятельство позволяет, удерживая в системах лишь несколько уравнений и неизвестных, получать приближенные решения с достаточной точностью за минимальное число операций.

3. Иллюстрирующий пример. Для иллюстрации приведенной методики рассмотрим частный случай поставленной задачи, когда $a = 0$ (шар и включение соосны) и температурное поле в шаре постоянно и равно T_0. В этом случае разрешающие системы можно обратить точно. В результате

$$F_{n|\Gamma_2} = -\frac{\dfrac{1-\nu_1}{1+\nu_1}\dfrac{3p}{R_2^3} + \left(\dfrac{1-3\nu_1}{1-\nu_1}\alpha_1 G_2 + \dfrac{1-3\nu_2}{1-\nu_2}\alpha_2 G_1\right)\left(\dfrac{4}{R_2^3} - \dfrac{4}{R_1^3}\right)\mathrm{T}_0}{\left(\dfrac{2-4\nu_2}{1+\nu_2}\dfrac{G_1}{G_2} + 1\right)\dfrac{1}{R_2^3} + \left(\dfrac{2-4\nu_1}{1+\nu_1} - \dfrac{2-4\nu_2}{1+\nu_2}\right)\dfrac{1}{R_1^3}}. \tag{54}$$

Из формулы (54) следует, что при $\nu_j > \dfrac{1}{3}$ минимум функционала (53) равен $\min\limits_{\mathrm{T}_0} \int\limits_{\Gamma_1} |F_n|^2 ds = 0$ и достигается на температуре

$$
\mathrm{T}_0 = -\frac{3p\dfrac{1-\nu_1}{1+\nu_1}\dfrac{1}{R_2^3}}{\left(\dfrac{1-3\nu_1}{1-\nu_1}\alpha_1 G_2 + \dfrac{1-3\nu_2}{1-\nu_2}\alpha_2 G_1\right)\left(\dfrac{4}{R_2^3} - \dfrac{4}{R_1^3}\right)}.
$$

Формула (54) показывает, что каждая подобная задача требует численного анализа ее разрешимости в зависимость от значений термомеханических характеристик многофазного тела.

Список использованных источников

1. Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики / К.А. Лурье. – М.: Наука, 1975. – 480 с.

2. Дейнека В.С. Оптимальное управление неоднородными распределенными системами / В.С. Дейнека, И.В. Сергиенко. – К.: Наука. думка, 2003. – 506 с.

3. Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами / Ж.-Л. Лионс. –М.: Наука, 1987. – 368 с.

4. Сергиенко И.В. Идентификация параметров динамической теории упругости тела с включением / И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека // Кибернетика и системный анализ.– 2009. – №3. – С. 75-97.

5. Kurennov S.S. First fundamental axisymmetric problem of thermoelasticity for a compressed spheroid with a concentric spherical cavity / S.S. Kurennov, A.G. Nikolaev // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. –2004. – V. 45, №1.– P. 76-81.

6. Проценко В.С. Формулы переразложения для решений уравнения Лапласа в сферических и вытянутых сфероидальных координатах / В.С. Проценко, А.Г. Николаев // Доклады АН УССР. – 1983. – Сер. А. – №7. – С. 10–13.

7. Николаев А.Г. Формулы переразложения векторных решений уравнения Ламе в сферической и сфероидальной системах координат / А.Г. Николаев // Математ. методы анализа динамических систем. – Харьков, ХАИ. – 1984. – Вып. 8. – С.100–104.

8. Николаев А.Г. Обоснование метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей / А.Г. Николаев // Доповіді НАН України. – 1998. – №2. – С. 78–83.

Поступила в редакцию 15.06.2009.
Рецензент: д-р физ.–мат. наук, проф. В.С. Проценко,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков