УДК 629.7.023.2 М. Жаркан (Mohammed R Gharkan)

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЧНОСТНЫХ СВОЙСТВ СЛОИСТОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА, АРМИРОВАННОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНЫМИ СТЕРЖНЯМИ

Дополнительное армирование композиционного материала (КМ) стержнями имеет целью улучшение трансверсальных физико-механических свойств (модулей упругости, межслоевой прочности и жесткости и др.).

Задача достоверного прогнозирования прочности трансверсально-армированного слоистого композиционного материала представляется исключительно актуальной и важной из-за большого количества варьируемых параметров (углы армирования, последовательность укладки слоев, диаметр и пространственное положение стержней, тип КМ и др.), что практически исключает формирование базы экспериментальных данных.

Методика прогнозирования прочностных свойств армированных КМ построена на базе критерия прочности Мизеса–Хилла, как наиболее широко используемого в расчетах авиаконструкций и достаточно полно подтвержденного экспериментально.

Под пределом прочности представительного элемента КМ, армированного стержнями, будем понимать величину средних напряжений, которые приводят к разрушению какого-либо слоя в какой-либо точке. Это определение основано на общепринятом для слоистых КМ подходе [1, 2] и учитывает переменную анизотропию материала. Материал стержней и чистое связующее в "спутной" зоне представляется в виде слоя с физико-механическими свойствами на границе этих условных слоев, равными соответствующим трансверсальным характеристикам. Для наклонных стержней прочностные свойства в направлениях осей $x$, $y$, $z$ пересчитываются по известным методикам [3, 4].

Критерий прочности используется в следующей форме:

$$\frac{\sigma_{1i}^2}{F_{1i}^2}-\frac{\sigma_{1i}}{F_{1i}}\frac{\sigma_{2i}}{F_{2i}}+\frac{\sigma_{2i}^2}{F_{2i}^2}+\frac{\tau_{12i}^2}{F_{12i}^2}\le 1, \tag{1}$$

где $\sigma_{1i}^2$, $\sigma_{2i}^2$, $\tau_{12i}^2$ – действующие напряжения в $i$-м слое в произвольной точке элемента в местной системе координат;

$F_{1i}$, $F_{2i}$, $F_{12i}$ – соответственно пределы прочности $i$-го слоя в местной системе координат, определяемые по следующему правилу:

$$\sigma_{1i} \geq 0 : F_{1i} = F_{1ip}; \ \sigma_{1i} < 0 : F_{1i} = F_{1ic};$$
$$\sigma_{2i} \geq 0 : F_{2i} = F_{2ip}; \sigma_{2i} < 0 : F_{2i} = F_{2ic}. \qquad (2)$$

Здесь индексы "р" и "с" означают "на растяжение" и "на сжатие" соответственно.

Ввиду статической неопределимости многослойных структур напряжения $\sigma_{1i}^2$, $\sigma_{2i}^2$, $\tau_{12i}^2$ выражаются через деформации пакета в целом по известному алгоритму [5–8].

Ранее в работе [9] получены зависимости для определения упругих констант трехмерного тела трансверсально-армированного слоистого КМ на микроуровне в области материала, не содержащего армирующих стержней.

При выводе формул для вычисления упругих констант пакета были использованы две модели деформирования представительного элемента, что приводит к двум методикам прогнозирования прочностных свойств КМ с переменной анизотропией.

В работе [10] были определены деформативные свойства конечно-размерного объема композиционного материала с трансверсальным армированием.

Для плоского напряженного состояния деформация пакета в произвольной точке определяется по формуле (1) с учетом (3) из [10]:

$$\varepsilon_x^* = \frac{\varepsilon_x(x_2 - x_1)}{E_x \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{E_x}}. \qquad (3)$$

В соответствии с установленным выше определением понятия «предел прочности» КМ с переменными свойствами по объему деформация материала

$$\varepsilon_x = \sigma_{xcp} / E_{xн}. \qquad (4)$$

Деформация рассматриваемого элемента по оси y и на сдвиг находятся по (1) из [9] при $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$:

$$\varepsilon_y^* = -\mu_{xy}\varepsilon_x^* = -\mu_{xy}\frac{\varepsilon_x(x_2 - x_1)}{E_x\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{E_x}};$$

$$\gamma_{xy}^* = \eta_{xy,x}\varepsilon_x^* = \eta_{xy,x}\frac{\varepsilon_x(x_2 - x_1)}{E_x\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{E_x}}. \qquad (5)$$

Подставив (4) в (3) и (5), получим

$$\varepsilon_x^* = \frac{\sigma_{xcp}(x_2 - x_1)}{E_{xн}E_x\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{E_x}};\ \varepsilon_y^* = -\mu_{xy}\frac{\sigma_{xcp}(x_2 - x_1)}{E_{xн}E_x\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{E_x}};$$

$$\gamma_{xy}^* = \eta_{xy,x}\frac{\sigma_{xcp}(x_2 - x_1)}{E_{xн}E_x\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{E_x}}. \qquad (6)$$

Введем обозначение:

$$\Phi_{xн} = \frac{x_2 - x_1}{E_x\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{E_x}}. \qquad (7)$$

С учетом этого деформации слоев в связанной системе координат вычисляются по формулам (3) из [9]:

$$\varepsilon_{1i} = \Phi_{xн}\frac{\sigma_{xcp}}{E_{xн}}(\cos^2\varphi_i - \mu_{xy}\sin^2\varphi_i + \eta_{xy,x}\sin\varphi_i\cos\varphi_i);$$

$$\varepsilon_{2i} = \Phi_{xн}\frac{\sigma_{xcp}}{E_{xн}}(\sin^2\varphi_i - \mu_{xy}\cos^2\varphi_i - \eta_{xy,x}\sin\varphi_i\cos\varphi_i); \qquad (8)$$

$$\gamma_{12i} = \Phi_{xн}\frac{\sigma_{xcp}}{E_{xн}}[-(1 + \mu_{xy})\sin 2\varphi_i + \eta_{xy,x}\cos 2\varphi_i].$$

После подстановки (8) в (4) из [9], а полученного результата в критерий (1) получим следующее выражение для определения предела прочности:

$$F_{\substack{x\ p\ н\\(c)}} = \min_{\substack{1 \le i \le n\\ x_1 \le x \le x_2\\ y_1 \le y \le y_2}} \left(\frac{A_{x1i}^2}{F_{1i}^2} - \frac{A_{x1i}A_{x2i}}{F_{1i}^2} + \frac{A_{x2i}^2}{F_{2i}} + \frac{A_{x12i}^2}{F_{12i}^2}\right)^{-0,5} \cdot \frac{E_{xн}}{\Phi_{xн}}. \quad (9)$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned}
&A_{x1i} = \overline{E_{1i}} \cdot [\cos^2\varphi_i(1-\mu_{21i}\cdot\mu_{xy}) + \sin^2\varphi_i(\mu_{21i}-\mu_{xy}) + \\
&+\eta_{xy,x}\sin\varphi_i\cos\varphi_i(1-\mu_{21i})]; \\
&A_{x2i} = \overline{E_{2i}} \cdot [\cos^2\varphi_i(\mu_{12i}-\mu_{xy}) + \sin^2\varphi_i(1-\mu_{12i}\cdot\mu_{xy}) + \\
&+\eta_{xy,x}\sin\varphi_i\cos\varphi_i(\mu_{12i}-1)]; \\
&A_{x12i} = G_{12i}\cdot[\eta_{xy,x}\cos 2\varphi_i - \sin 2\varphi_i(1+\mu_{xy})].
\end{aligned} \quad (10)$$

При прогнозировании прочности на растяжение имеет место правило:

$$\begin{aligned}
&A_{x1i} \ge 0 : F_{1i} = F_{1ip}; \quad A_{x1i} < 0 : F_{1i} = F_{1ic}; \\
&A_{x2i} \ge 0 : F_{2i} = F_{2ip}; \; A_{x2i} < 0 : F_{2i} = F_{2ic}.
\end{aligned} \quad (11)$$

Вычисление предела прочности на сжатие проводится при следующих значениях $F_{1i}$ и $F_{2i}$:

$$\begin{aligned}
&A_{x1i} \ge 0 : F_{1i} = F_{1ic}; \quad A_{x1i} < 0 : F_{1i} = F_{1ip}; \\
&A_{x2i} \ge 0 : F_{2i} = F_{2ic}; \; A_{x2i} < 0 : F_{2i} = F_{2ip}.
\end{aligned} \quad (12)$$

При плоском деформированном состоянии (см. (8) из [10]) имеем

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x^* = \sigma_{xcp}\Phi_{xд}; \; \varepsilon_y^* = -\mu_{xy}\sigma_{xcp}\Phi_{xд}; \\
&\gamma_{xy}^* = \eta_{xy,x}\sigma_{xcp}\Phi_{xд},
\end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\Phi_{xд} = \frac{y_2 - y_1}{\int\limits_{y_1}^{y_1} E_x dy}. \quad (14)$$

После некоторых преобразований получим

$$F_{\substack{x\ p\ \partial\\(c)}}=\frac{1}{\Phi_{x\partial}}\min_{\substack{1\le i\le n\\x_1\le x\le x_2\\y_1\le y\le y_2}}\left(\frac{A_{x1i}^2}{F_{1i}^2}-\frac{A_{x1i}A_{x2i}}{F_{1i}^2}+\frac{A_{x2i}^2}{F_{2i}^2}+\frac{A_{x12i}^2}{F_{12i}^2}\right)^{-0,5},\tag{15}$$

где $F_{1i}$ и $F_{2i}$ определяются согласно (11) и (12).

В направлении оси y получим следующие зависимости для определения предела прочности:

$$F_{\substack{y\ p\ н\\(c)}}=\frac{E_{yн}}{\Phi_{yн}}\cdot\min_{\substack{1\le i\le n\\x_1\le x\le x_2\\y_1\le y\le y_2}}\left(\frac{A_{y1i}^2}{F_{1i}^2}-\frac{A_{y1i}A_{y2i}}{F_{1i}^2}+\frac{A_{y2i}^2}{F_{2i}^2}+\frac{A_{y12i}^2}{F_{12i}^2}\right)^{-0,5};\tag{16}$$

$$F_{\substack{y\ p\ \partial\\(c)}}=\frac{1}{\Phi_{y\partial}}\min_{\substack{1\le i\le n\\x_1\le x\le x_2\\y_1\le y\le y_2}}\left(\frac{A_{y1i}^2}{F_{1i}^2}-\frac{A_{y1i}A_{y2i}}{F_{1i}^2}+\frac{A_{y2i}^2}{F_{2i}^2}+\frac{A_{y12i}^2}{F_{12i}^2}\right)^{-0,5}.\tag{17}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\Phi_{yн}=\frac{y_2-y_1}{E_y\int\limits_{y_1}^{y_1}\frac{dy}{E_y}};\ \Phi_{y\partial}=\frac{x_2-x_1}{\int\limits_{x_1}^{x_1}E_y dx};\tag{18}$$

$$A_{y1i}=\overline{E_{1i}}\cdot[\cos^2\varphi_i(\mu_{21i}-\mu_{yx})+\sin^2\varphi_i(1-\mu_{21i}\cdot\mu_{yx})+$$
$$+\eta_{xy,y}\sin\varphi_i\cos\varphi_i(1-\mu_{21i})];$$
$$A_{y2i}=\overline{E_{2i}}\cdot[\cos^2\varphi_i(1-\mu_{12i}\cdot\mu_{yx})+\sin^2\varphi_i(\mu_{12i}-\mu_{yx})+\tag{19}$$
$$+\eta_{xy,y}\sin\varphi_i\cos\varphi_i(\mu_{12i}-1)];$$
$$A_{y12i}=G_{12i}\cdot[\sin 2\varphi_i(1+\mu_{yx})+\eta_{xy,y}\cos 2\varphi_i].$$

Прочность на растяжение включает в себя следующее правило для назначения $F_{1i}$ и $F_{2i}$:

$$\begin{gathered}A_{y1i}\ge 0: F_{1i}=F_{1ip};\quad A_{y1i}<0: F_{1i}=F_{1ic};\\A_{y2i}\ge 0: F_{2i}=F_{2ip};\ A_{y2i}<0: F_{2i}=F_{2ic}.\end{gathered}\tag{20}$$

При сжатии значения $F_{1i}$ и $F_{2i}$ определяются так:

$$\begin{gathered}A_{y1i}\ge 0: F_{1i}=F_{1ic};\quad A_{y1i}<0: F_{1i}=F_{1ip};\\A_{y2i}\ge 0: F_{2i}=F_{2ic};\ A_{y2i}<0: F_{2i}=F_{2ip}.\end{gathered}\tag{21}$$

Рассмотрим нагружение представительного элемента сдвиговыми усилиями в плоскости слоев. Согласно (1) из [9] имеем

$$\varepsilon_x^* = \eta_{x,xy} \cdot \gamma_{xy}^*; \; \varepsilon_y^* = \eta_{y,xy} \cdot \gamma_{xy}^* \tag{22}$$

При плоском деформированном состоянии

$$\gamma_{xy}^* = \tau_{xyср} \Phi_{xyд}; \tag{23}$$

$$\Phi_{xyд} = \frac{y_2 - y_1}{\int\limits_{y_1}^{y_1} G_{xy} dy}. \tag{24}$$

Подставив (22) и (23) в (3) из [9], а полученный результат в (4) из [9], тогда из критерия прочности (1) следует

$$F_{xyд} = \frac{1}{\Phi_{xyд}} \min_{\substack{1 \le i \le n \\ x_1 \le x \le x_2 \\ y_1 \le y \le y_2}} \left( \frac{A_{xy1i}^2}{F_{1i}^2} - \frac{A_{xy1i} A_{xy2i}}{F_{1i}^2} + \frac{A_{xy2i}^2}{F_{2i}^2} + \frac{A_{xy12i}^2}{F_{12i}^2} \right)^{-0,5}, \tag{25}$$

где приняты обозначения:

$$\begin{aligned} A_{xy1i} = \overline{E_{1i}} \cdot [&\cos^2 \varphi_i (\eta_{x,xy} + \eta_{y,xy} \mu_{21i}) + \\ &+ \sin^2 \varphi_i (\eta_{y,xy} + \eta_{x,xy} \mu_{21i}) + \\ &+ \sin \varphi_i \cos \varphi_i (1 - \mu_{21i})]; \\ A_{xy2i} = \overline{E_{2i}} \cdot [&\cos^2 \varphi_i (\eta_{y,xy} + \eta_{x,xy} \mu_{12i}) + \\ &+ \sin^2 \varphi_i (\eta_{x,xy} + \eta_{y,xy} \mu_{12i}) + \\ &+ \sin \varphi_i \cos \varphi_i (\mu_{12i} - 1)]; \\ A_{xy12i} = G_{12i} \cdot [&\sin 2\varphi_i (\eta_{y,xy} - \eta_{x,xy}) + \cos 2\varphi_i]. \end{aligned} \tag{26}$$

Для слоев с углами армирования $\varphi_i \ge 0$ имеет место правило:

$$\begin{aligned} &A_{xy1i} \ge 0 : F_{1i} = F_{1ip}; \quad A_{xy1i} < 0 : F_{1i} = F_{1ic}; \\ &A_{xy2i} \ge 0 : F_{2i} = F_{2ip}; \; A_{xy2i} < 0 : F_{2i} = F_{2ic}. \end{aligned} \tag{27}$$

Для слоев с армированием $\varphi_i < 0$ значения $F_{1i}$ и $F_{2i}$ назначаются следующими образом:

$$\begin{aligned} &A_{xy1i} \ge 0 : F_{1i} = F_{1ic}; \quad A_{xy1i} < 0 : F_{1i} = F_{1ip}; \\ &A_{xy2i} \ge 0 : F_{2i} = F_{2ic}; \; A_{xy2i} < 0 : F_{2i} = F_{2ip}. \end{aligned} \tag{28}$$

Для плоского напряженного состояния формула для определения прочности на сдвиг примет вид

$$F_{xyн} = \frac{G_{xyн}}{\Phi_{xyн}} \cdot \min_{\substack{1 \le i \le n \\ x_1 \le x \le x_2 \\ y_1 \le y \le y_2}} \left( \frac{A_{xy1i}^2}{F_{1i}^2} - \frac{A_{xy1i} A_{xy2i}}{F_{1i}^2} + \frac{A_{xy2i}^2}{F_{2i}^2} + \frac{A_{xy12i}^2}{F_{12i}^2} \right)^{-0,5}, \quad (29)$$

где

$$\Phi_{xyн} = \frac{x_2 - x_1}{G_{xy} \int\limits_{x_1}^{x_1} \frac{dx}{G_{xy}}}. \quad (30)$$

При вычислении пределов прочности трансверсально-армированных КМ по приведенным выше формулам минимизация выражений в скобках проводится без учета "спутной" зоны и сечения стержня. Обоснованием этого является то, что прочность связующего и материала стержней из КМ заведомо меньше прочности слоев в своей плоскости. Кроме того, в таком случае учитывается вероятный непроклей между стержнями и КМ или быстрое разрушение связи между ними. Строго говоря, процедуру прогнозирования прочности КМ по формулам (9), (14) – (16), (23) и (26) необходимо реализовать с соответствующей коррекцией значений $E_{xн}, E_{yн}, G_{xyн}$ путем интегрирования только по зоне КМ. Проведенные численные эксперименты показывают, что влияние учета сечения стержня и "спутной" зоны на величину осредненных упругих свойств незначительно (до 9%). Это позволяет использовать в расчетах вычисленные ранее значения модулей упругости, что существенно сокращает время работы программного комплекса.

Рассматривая нагружение элемента КМ по оси z, будем учитывать, что при $\sigma_z = const\,(x_1 \le x \le x_2, y_1 \le y \le y_2)$ разрушение КМ происходит от нарушения связи между слоями. В то же время методы испытания таких материалов соответствуют случаю $\varepsilon_z = const$, в связи с чем для трансверсально-армированных КМ рассмотрим механизм разрушения при условии $\varepsilon_z = const$.

Из физического закона (1) из [9] найдем деформации пакета

$$\varepsilon_x = -\mu_{zx} \frac{\sigma_z}{E_z}; \varepsilon_y = -\mu_{zy} \frac{\sigma_z}{E_z}; \gamma_{xy} = \eta_{xy,z} \frac{\sigma_z}{E_z}, \quad (31)$$

где напряжения

$$\sigma_z = \sigma_{zср} \frac{E_z}{E_{zд}}. \quad (32)$$

С учетом этого (31) принимают вид

$$\varepsilon_x = -\mu_{zx}\frac{\sigma_{zcp}}{E_{z\partial}};\varepsilon_y = -\mu_{zy}\frac{\sigma_{zcp}}{E_{z\partial}};\gamma_{xy} = \eta_{xy,z}\frac{\sigma_{zcp}}{E_{z\partial}}. \quad (33)$$

Подставив выражение (32) и (33) в (7) из [9], получим

$$\sigma_{1i} = A_{z1i}\frac{\sigma_{zcp}}{E_{zg}}; \quad \sigma_{2i} = A_{z2i}\frac{\sigma_{zcp}}{E_{zg}};$$
$$\tau_{12i} = A_{z12i}\frac{\sigma_{zcp}}{E_{zg}}; \sigma_{3i} = \sigma_z = \frac{E_z\sigma_{zcp}}{E_{zg}}, \quad (34)$$

где

$$A_{z1i} = E_z a_{1i} - \overline{E_{1i}}\cdot[\cos^2\varphi_i(\mu_{zx} + \mu_{zy}\mu_{21i}) +$$
$$+\sin^2\varphi_i(\mu_{zy} + \mu_{zx}\mu_{21i}) +$$
$$+\eta_{xy,z}\sin\varphi_i\cos\varphi_i(\mu_{21i} - 1)];$$
$$A_{z2i} = E_z a_{2i} - \overline{E_{2i}}\cdot[\cos^2\varphi_i(\mu_{zy} + \mu_{zx}\mu_{12i}) + \quad (35)$$
$$+\sin^2\varphi_i(\mu_{zx} + \mu_{zy}\mu_{12i}) +$$
$$+\eta_{xy,z}\sin\varphi_i\cos\varphi_i(1 - \mu_{12i})];$$
$$A_{z12i} = G_{12i}\cdot[\sin 2\varphi_i(\mu_{zx} - \mu_{zy}) + \eta_{xy,z}\cos 2\varphi_i];$$

$$a_{1i} = \frac{\mu_{13i} + \mu_{12i}\mu_{23i}}{1 - \mu_{12i}\mu_{21i}}; a_{2i} = \frac{\mu_{23i} + \mu_{21i}\mu_{13i}}{1 - \mu_{12i}\mu_{21i}}. \quad (36)$$

Критерий прочности принимается в виде

$$\frac{\sigma_{1i}^2}{F_{1i}^2} + \frac{\sigma_{2i}^2}{F_{2i}^2} + \frac{\sigma_{3i}^2}{F_{3i}^2} + \frac{\tau_{12i}^2}{F_{12i}^2} - \frac{\sigma_{1i}\sigma_{2i}}{F_{1i}^2} - \frac{\sigma_{1i}\sigma_{3i}}{F_{1i}^2} - \frac{\sigma_{2i}\sigma_{3i}}{F_{2i}^2} \le 1. \quad (37)$$

Тогда прогнозируемая прочность пакета слоев на растяжение находится из зависимости

$$F_{z\,p\,(c)} = E_{zg}\cdot\min_{\substack{1\le i\le n\\ x_1\le x\le x_2\\ y_1\le y\le y_2}}\left(\frac{A_{z1i}^2}{F_{1i}^2} + \frac{A_{z2i}^2}{F_{2i}^2} + \frac{E_z^2}{F_{3i}^2} + \frac{A_{z12i}^2}{F_{12i}^2} - \frac{A_{z1i}A_{z2i}}{F_{1i}^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{A_{z1i}E_z}{F_{1i}^2} - \frac{A_{z2i}E_z}{F_{2i}^2}\right)^{-0,5}, \quad (38)$$

где

$$A_{z1i} \geq 0 : F_{1i} = F_{1ip}; \quad A_{z1i} < 0 : F_{1i} = F_{1ic};$$
$$A_{z2i} \geq 0 : F_{2i} = F_{2ip}; A_{z2i} < 0 : F_{2i} = F_{2ic}; F_{3i} = F_{3ip}. \tag{39}$$

При расчете предела прочности на сжатие используется выражение (38), в котором:

$$A_{z1i} \geq 0 : F_{1i} = F_{1ic}; A_{z1i} < 0 : F_{1i} = F_{1ip};$$
$$A_{z2i} \geq 0 : F_{2i} = F_{2ic}; A_{z2i} < 0 : F_{2i} = F_{2ip}; F_{3i} = F_{3ic}. \tag{40}$$

Прогнозирование предела прочности $F_{xzн}$ по схеме плоских напряжений основывается на том, что сдвиговые деформации в произвольной точке

$$\gamma^*_{xz} = \Phi_{xzн} \frac{\tau_{xzср}}{G_{xzн}}, \tag{41}$$

где

$$\Phi_{xzн} = \frac{x_2 - x_1}{G_{xzн} \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{G_{xzн}}}. \tag{42}$$

Определив по (1) из [9] деформации $\gamma^*_{xz}$ и подставив эти значения в (7) из [9], получим следующие значения напряжений:

$$\tau_{13i} = \Phi_{xzн} \frac{\tau_{xzср}}{G_{xzн}} (\cos\varphi_i + \eta_{yz,xz} \sin\varphi_i);$$
$$\tau_{23i} = \Phi_{xzн} \frac{\tau_{xzср}}{G_{xzн}} (\eta_{yz,xz} \cos\varphi_i - \sin\varphi_i). \tag{43}$$

Принимая критерий прочности слоя в виде

$$\frac{\tau^2_{13i}}{F^2_{13i}} + \frac{\tau^2_{23i}}{F^2_{23i}} \leq 1 \tag{44}$$

получим следующую зависимость для искомого предела прочности представительного элемента:

$$F_{xzн} = \frac{G_{xzн}}{\Phi_{xzн}} \cdot \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_1 \leq x \leq x_2 \\ y_1 \leq y \leq y_2}} \left( \frac{(\cos\varphi_i + \eta_{yz,xz} \sin\varphi_i)^2}{F^2_{13i}} + \right.$$
$$\left. + \frac{(\eta_{yz,xz} \cos\varphi_i - \sin\varphi_i)^2}{F^2_{23i}} \right)^{-0,5}. \tag{45}$$

Для плоского деформированного состояния

$$\gamma^{*}_{xz} = \tau_{xzcp} \Phi_{xz\partial}, \tag{46}$$

где

$$\Phi_{xz\partial} = \frac{y_2 - y_1}{\int\limits_{y_1}^{y_2} G_{xz} dy}. \tag{47}$$

С учетом этих значений деформаций формула для предела прочности принимает вид

$$F_{xz\partial} = \frac{1}{\Phi_{xz\partial}} \cdot \min_{\substack{1 \le i \le n \\ x_1 \le x \le x_2 \\ y_1 \le y \le y_2}} \left( \frac{(\cos\varphi_i + \eta_{yz,xz} \sin\varphi_i)^2}{F^2_{13i}} + \frac{(\eta_{yz,xz} \cos\varphi_i - \sin\varphi_i)^2}{F^2_{23i}} \right)^{-0,5}. \tag{48}$$

Путем аналогичных выкладок и преобразований выводятся зависимости для прогнозирования сдвиговой прочности в плоскости $yz$:

$$F_{yz\text{н}} = \frac{G_{yz\text{н}}}{\Phi_{yz\text{н}}} \cdot \min_{\substack{1 \le i \le n \\ x_1 \le x \le x_2 \\ y_1 \le y \le y_2}} \left[ \frac{(\eta_{xz,yz} \cos\varphi_i + \sin\varphi_i)^2}{F^2_{13i}} + \frac{(\cos\varphi_i - \eta_{xz,yz} \sin\varphi_i)^2}{F^2_{23i}} \right]^{-0,5}. \tag{49}$$

$$F_{yz\partial} = \frac{1}{\Phi_{yz\partial}} \cdot \min_{\substack{1 \le i \le n \\ x_1 \le x \le x_2 \\ y_1 \le y \le y_2}} \left[ \frac{(\eta_{xz,yz} \cos\varphi_i + \sin\varphi_i)^2}{F^2_{13i}} + \frac{(\cos\varphi_i - \eta_{xz,yz} \sin\varphi_i)^2}{F^2_{23i}} \right]^{-0,5}. \tag{50}$$

Здесь приняты обозначения:

$$\Phi_{yz\partial} = \frac{y_2 - y_1}{G_{yz} \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{G_{yz}}}; \tag{51}$$

$$\Phi_{yz\partial} = \frac{x_2 - x_1}{\int\limits_{x_1}^{x_2} G_{yz} dx}. \qquad (52)$$

Для того чтобы замкнуть методику прогнозирования прочностных свойств трансверсально-армированного слоистого КМ рассмотрим алгоритм определения пределов прочности слоев в произвольной точке, а также стержней.

Прочностные свойства слоев вычисляются по общей формуле после определения новых структурных параметров КМ:

$$\Phi_к(\theta) = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}\{\theta_2\Phi_к(\theta_1) - \theta_1\Phi_к(\theta_2) + \theta[\Phi_к(\theta_2) - \Phi_к(\theta_1)]\}, \qquad (53)$$

где $\Phi_к$ принимает последовательно следующие значения:

$E_1$ – модуль упругости вдоль волокон;

$E_2$ – модуль упругости поперек волокон;

$E_3$ – трансверсальный модуль упругости;

$G_{12}, G_{13}, G_{23}$ – модули сдвига;

$\mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{23}, \mu_{21}, \mu_{31}, \mu_{32}$ – коэффициенты Пуассона;

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – коэффициенты линейного температурного расширения вдоль волокон, поперек и в трансверсальном направлении;

$F_{1p}, F_{1c}$ – пределы прочности на растяжение и сжатие вдоль волокон;

$F_{2p}, F_{2c}$ – пределы прочности на растяжение и сжатие поперек волокон в плоскости слоя;

$F_{3p}, F_{3c}$ – трансверсальная прочность;

$F_{12}, F_{13}, F_{23}$ – пределы прочности на сдвиг.

В формуле обозначено:

$\theta$ – текущее значение объемного содержания волокон, определяемое по описанной выше методике;

$\theta_1, \theta_2$ – фиксированные значения объемного содержания волокон, для которых экспериментально определены свойства КМ.

Пределы прочности элементов трансверсального армирования с достаточной точностью можно определить на основе критерия прочности Мизеса–Хилла [11–13]. После выполнения общепринятых выкладок получим

$$F_{1i\,\underset{(c)}{p}} = \Big(\frac{\sin^4\beta_z}{F^2_{c1\,\underset{(c)}{p}}} - \frac{\sin^2\beta_z\cos^2\beta_z}{F^2_{c1\,\underset{(c)}{p}}} +$$

$$+\frac{\cos^4\beta_z}{F^2_{c3\,\underset{(c)}{p}}} + \frac{\sin^2\beta_z\cos^2\beta_z}{F^2_{c13}}\Big)^{-0.5};$$

$$F_{2i\,\underset{(c)}{p}} = F_{c2\,\underset{(c)}{p}}; \qquad (54)$$

$$F_{3i\,\underset{(c)}{p}} = \Big(\frac{\cos^4\beta_z}{F^2_{c1\,\underset{(c)}{p}}} - \frac{\sin^2\beta_z\cos^2\beta_z}{F^2_{c1\,\underset{(c)}{p}}} +$$

$$+\frac{\sin^4\beta_z}{F^2_{c3\,\underset{(c)}{p}}} + \frac{\sin^2\beta_z\cos^2\beta_z}{F^2_{c13}}\Big)^{-0.5}.$$

В соответствии с общепринятым правилом знаков касательных напряжений [5, 6] предел прочности на сдвиг в осях 1,3 при $\beta_z \geq 0$ будет положительным, а при $\beta_z < 0$ – отрицательным:

$$F_{13i+} = \Big[\sin 2\beta_z\Big(\frac{2}{F^2_{c1p}} + \frac{1}{F^2_{c3c}} - \frac{1}{F^2_{c13}}\Big) + \frac{1}{F^2_{c13}}\Big]^{-0.5}, \qquad (55)$$

и наоборот, при $\beta_z \geq 0$ предел прочности на сдвиг в осях 1,3 будет отрицательным, а при $\beta_z < 0$ – положительным:

$$F_{13i-} = \Big[\sin 2\beta_z\Big(\frac{2}{F^2_{c1c}} + \frac{1}{F^2_{c3p}} - \frac{1}{F^2_{c13}}\Big) + \frac{1}{F^2_{c13}}\Big]^{-0.5}; \qquad (56)$$

$$F_{12i} = F_{c23}; \qquad (57)$$

$$F_{23i} = F_{c23} = F_{c13}. \qquad (58)$$

Прочностные свойства чистого связующего, образующегося в "спутной" зоне "обтекания" стержня волокнами КМ невозможно определить на основе теории армирования [14–18], в связи с чем их необходимо найти экспериментальным путем.

## Вывод

На базе достаточно достоверного критерия прочности Мизеса–Хилла разработана теория прогнозирования прочностных свойств КМ с переменными физико-механическими характеристиками по объему. Это является основой для оценки эффективности трансверсального армирования слоистых КМ, а также построения алгоритмов проектирования структурных параметров.

Таким образом, полученные в работе зависимости составляют теоретическую основу механики слоистых КМ, армированных трансверсальными элементами.

## Список использованных источников

1. Гольденблат И.И. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов / И.И. Гольденблат, В.А. Копнов. – М.: Машиностроение, 1968. – 191 с.
2. Композиционные материалы: справ. / под ред. Д.М. Карпиноса. – К.: Наук. думка, 1985. – 592 с.
3. Ашкенази Е.К. Анизотропия конструкционных материалов / Е.К. Ашкенази, З.В. Ганов. – Л.: Машиностроение, 1972. – 216 с.
4. Васильев В.В. Некоторые вопросы оптимального проектирования тонкостенных конструкций из композиционных материалов / В.В. Васильев // Актуальные проблемы авиационной науки и техники. – М.: Машиностроение, 1984. – С. 66–67.
5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
6. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки / С.Г. Лехницкий. – М.: Гос. изд-во техн. лит., 1957. – 463 с.
7. Образцов И.Ф. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов / И.Ф. Образцов, В.В. Васильев, В.А. Бунаков. – М.: Машиностроение, 1977. – 144 с.
8. Рабинович А.Л. Введение в механику армированных полимеров / А.Л. Рабинович. – М.: Наука, 1970. – 482 с.
9. Жаркан М. (Gharkan Mohammed R). Упругие константы трехмерного тела трансверсально-армированного слоистого композиционного материала / М. Жаркан (Mohammed R Gharkan) // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных

аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»: – Вып.2(58). – Х., 2009. – С.16–24.

10. Карпов Я.С. Определение деформативных свойств конечно-размерного объема композиционного материала с трансверсальным армированием / Я.С. Карпов, О.В. Ивановская, М. Жаркан (Mohammed R Gharkan). // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»: – Вып.3(59). – Х., 2009. – С. 53–66.
11. Композиционные материалы: в 8 т. / под ред. Л. Браутмана и Р. Крока. – М.: Мир, 1978. – Т. 2: Механика композиционных материалов. – 566 с.
12. Композиционные материалы: в 8 т. / под ред. Л. Браутмана и Р. Крока.– М.: Машиностроение, 1978. – Т. 7: Анализ и проектирование конструкций. – 342 с.
13. Композиционные материалы: в 8 т. / под ред. Л. Браутмана и Р. Крока.– М.: Машиностроение, 1978. – Т. 8: Анализ и проектирование конструкций. – 264 с.
14. Андриевская Г.Д. Высокопрочные ориентированные стекло-пластики / Г.Д. Андриевская. – М.: Наука, 1966. – 370 с.
15. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов / Г.А. Ванин. – К.: Наук. думка, 1985. – 302 с.
16. Ван Фо Фы Г.А. Теория армированных материалов / Г.А. Ван Фо Фы. – К.: Наук. думка, 1971. – 232 с.
17. Скудра А.М. Структурная теория армированных пластиков / А.М. Скудра, Ф.Я. Булавс. – Рига: Зинатне, 1978. – 192 с.

*Поступила в редакцию 15.03.2010 г.*
*Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.Е. Гайдачук, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков*