

## ТОЧНОСТЬ ГРАФИЧЕСКОГО СПРЯМЛЕНИЯ КРИВЫХ ЛИНИЙ

М. А. Зайденварг

Если на кривой линии нанести ряд точек и расстояния между соседними точками (хорды) последовательно перенести на прямую линию, полученный на прямой размер можно считать приближенно равным длине кривой линии.

В этом процессе графического спрямления мы сталкиваемся с двумя ошибками — теоретической, которая складывается из разностей между дугами и хордами, и чертежной, зависящей от точности переноса размера.

А. Адлер считает, что чертежная ошибка возрастает вместе с числом операций переноса размера и поэтому применение большого числа их (и, соответственно, небольших хорд) нежелательно [1, стр. 195]. При этом, по-видимому, предполагается, что элементарная чертежная ошибка, которую мы в дальнейшем обозначим  $\gamma$ , всегда уменьшает переносимый размер, то есть имеет отрицательный знак и, значит, увеличивает общую погрешность спрямления. Такое мнение является необоснованным.

Ниже мы покажем, что ошибки переноса  $\gamma$  могут быть как отрицательными, так и положительными, и что:

1) в зависимости от средней величины  $\gamma$  и соотношения отрицательных и положительных ошибок можно подобрать размер хорды для спрямления дуги данного радиуса так, чтобы общая погрешность была минимальной;

2) по мере возрастания числа операций переноса размера возрастает вероятность того, что ошибки  $\gamma$  имеют одинаково часто знаки плюс и минус; поэтому при достаточно большом числе операций ошибки взаимно погашаются и на общую погрешность почти не влияют;

3) для достаточно гладкой кривой линии можно практически подобрать такой размер хорды, чтобы относительная погрешность спрямления не превышала допустимой в практике или заданной наперед величины.

Рассмотрение вопроса начнем с частного вида кривой — окружности. Предположим, что окружность разбита на  $n$  одинаковых частей. При переносе размеров хорд на прямую линию часть чертежных ошибок имеет знак минус и уменьшает переносимые размеры. Остальные ошибки имеют знак плюс, то есть увеличивают переносимые размеры. Общая погрешность спрямления образуется по схеме (рис. 1), в которой:

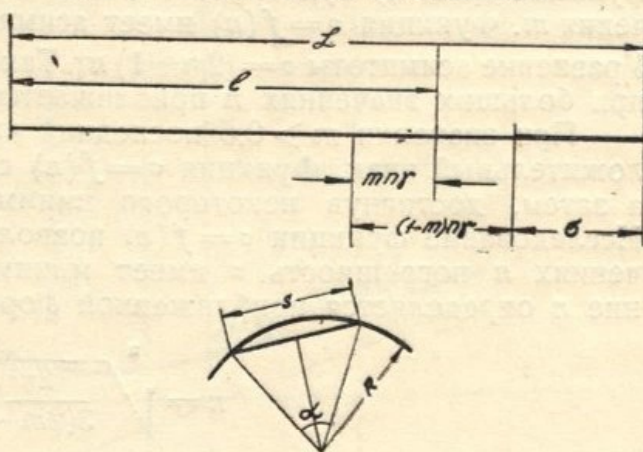


Рис. 1.

$L$  — длина окружности ( $2\pi R$ ),  
 $l$  — периметр вписанного в окружность правильного  $n$ -угольника,  
 $S$  — сторона  $n$ -угольника (хорда, стягивающая две соседние точки),  
 $n$  — число сторон (хорд),  
 $\gamma$  — средняя ошибка, возникающая при переносе размера хорды,  
 $m$  — отношение числа ошибок  $\gamma$ , имеющих отрицательный знак (то есть уменьшающих переносимый размер), к общему числу ошибок,  
 $\sigma$  — общая погрешность спрямления окружности.

Из схемы следует

$$\sigma = L - l + (2m - 1) n\gamma. \quad (1)$$

Если окружность разбита на  $n$  равных частей, то хорда  $s$  (сторона вписанного многоугольника) равна (рис. 1)  $s = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$ .

Центральный угол  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ . Отсюда  $s = 2R \sin \frac{\pi}{n}$ .

Сумма всех хорд (периметр многоугольника)  $l = ns = 2R n \sin \frac{\pi}{n}$ .

Подставляем значения  $L$  и  $l$  в выражение (1)

$$\sigma = 2\pi R - 2R n \sin \frac{\pi}{n} + (2m - 1) n\gamma. \quad (2)$$

Рассмотрим полученную зависимость, как  $\sigma = f(n)$ . График этой функции (рис. 2) будет иметь различный вид в зависимости от значения  $m$ . Функция  $\sigma = f(n)$  имеет асимптоту при любом значении  $m$ . Уравнение асимптоты  $\sigma = (2m - 1) n\gamma$ . Таким образом, зависимость  $\sigma = f(n)$  при больших значениях  $n$  приближается к линейной.

При значении  $m > 0,5$  последний член в формуле (2) имеет положительный знак. Функция  $\sigma = f(n)$  сначала круто убывает (рис. 2), а затем, достигнув некоторого минимума, начинает увеличиваться. Исследование функции  $\sigma = f(n)$  позволяет выяснить, при каких значениях  $n$  погрешность  $\sigma$  имеет минимальную величину. Это значение  $n$  определяется приближенной формулой

$$n = \sqrt[3]{\frac{2\pi^3 R}{3(2m - 1)\gamma}}. \quad (3)$$

При значении  $m < 0,5$  имеем  $2m - 1 < 0$ . По мере увеличения  $n$  в формуле (2)  $\sigma = 2\pi R - 2R n \sin \frac{\pi}{n} + (2m - 1) n\gamma$  разность двух первых членов (в правой части) уменьшается, а третий член, оставаясь отрицательным, возрастает по модулю. В пределе, когда  $n$  стремится к бесконечности, разность двух первых членов стремится к нулю, а последний член — к бесконечности.

Таким образом, функция  $\sigma = f(n)$  — убывающая и в пределе

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = -\infty$$

А так как  $\lim_{n \rightarrow 0} f(n) = 2\pi R$ , то существует значение функции, равное нулю. Чтобы выяснить значение аргумента  $n$ , при котором функция обращается в нуль, следует положить  $f(n) = 0$ .

Предварительно упростим формулу (2). После ряда преобразований получим выражение

$$\sigma = \frac{\pi^3 R}{3n^2} + (2m - 1) n \gamma, \quad (4)$$

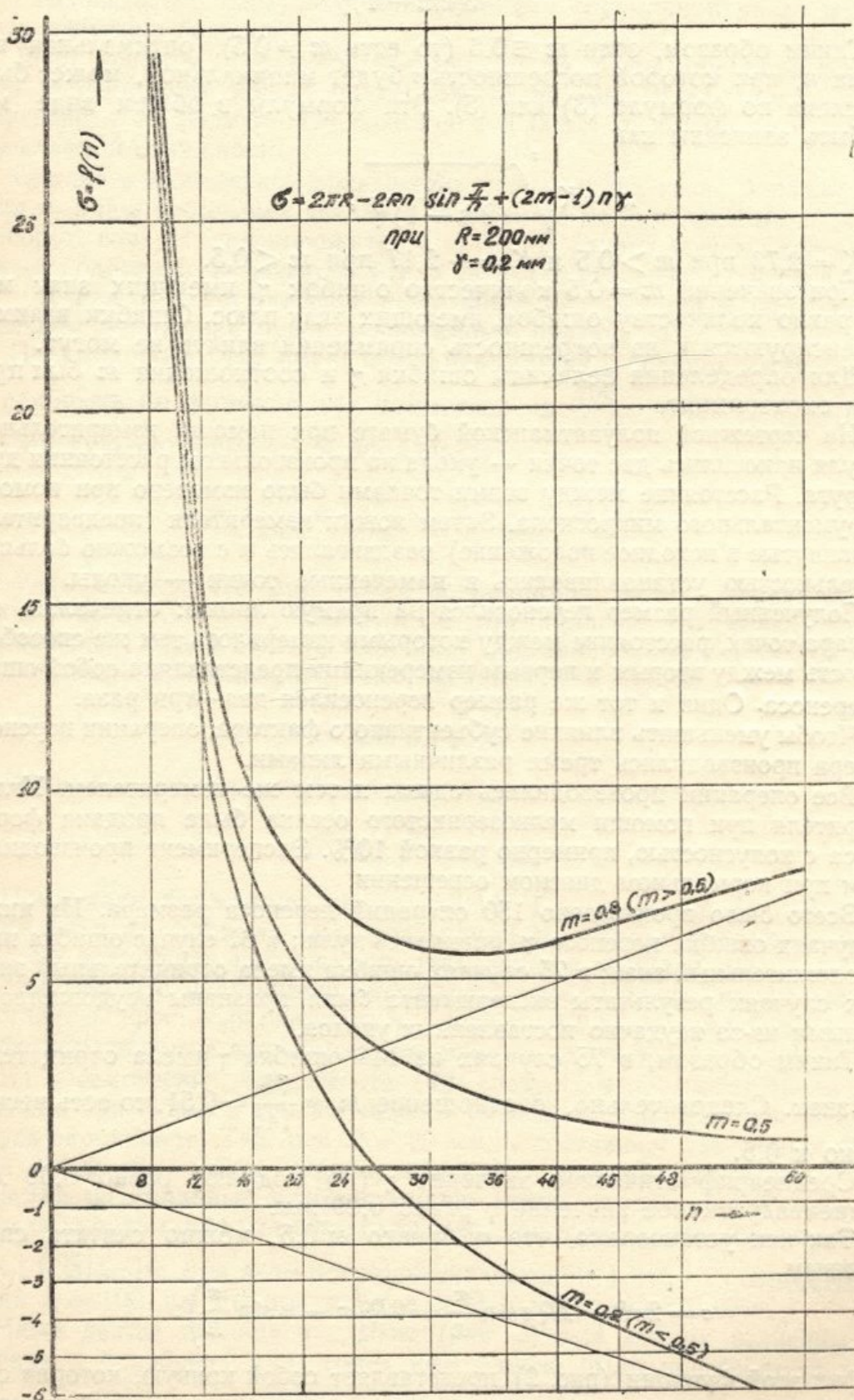


Рис. 2.

которое очень мало отличается от формулы (2). Это упрощенное выражение функции  $\sigma = f(n)$  мы и приравняем нулю. Отсюда

$$n = -\sqrt[3]{\frac{\pi^3 R}{3(2m-1)\gamma}}. \quad (5)$$

Таким образом, если  $m \leq 0,5$  (то есть  $m \neq 0,5$ ), оптимальная величина  $n$ , при которой погрешность  $\sigma$  будет минимальной, может быть вычислена по формуле (3) или (5). Эти формулы в общем виде могут быть записаны как

$$n = K \sqrt[3]{\frac{R}{(2m-1)\gamma}}, \quad (6)$$

где  $K = 2,73$  при  $m > 0,5$  и  $K = -2,17$  при  $m < 0,5$ .

При значении  $m = 0,5$  количество ошибок  $\gamma$ , имеющих знак минус, равно количеству ошибок, имеющих знак плюс. Ошибки взаимно компенсируются и на погрешность спрямления влиять не могут.

Для определения величины ошибки  $\gamma$  и соотношения  $m$  был проведен эксперимент.

На чертежной полуватманской бумаге при помощи измерительного циркуля наносились две точки — укола на произвольном расстоянии друг от друга. Расстояние между этими точками было измерено при помощи инструментального микроскопа. Затем ножки измерителя (предварительно сдвинутые в исходное положение) раздвигались и с возможно большей тщательностью устанавливались в намеченные точки — уколы.

Полученный размер переносился на прямую линию: отмечалась новая пара точек, расстояние между которыми измерялось тем же способом. Разность между вторым и первым измерениями представляла собой ошибку переноса. Один и тот же размер переносился два—три раза.

Чтобы уменьшить влияние субъективного фактора, операции переноса размера производились тремя различными лицами.

Все операции производились одним и тем же измерителем. Иглам измерителя при помощи мелкозернистого оселка была придана форма конуса с конусностью, примерно равной 10%. Эксперимент производился летом при нормальном дневном освещении.

Всего было произведено 150 операций переноса размера. Из них в 10 случаях ошибка переноса  $\gamma$  равнялась нулю; в 61 случае ошибка имела положительный знак; в 75 случаях ошибка имела отрицательный знак; в 4-х случаях результаты эксперимента были признаны неудовлетворительными из-за неудачно поставленных уколов.

Таким образом, в 75 случаях из 146 ошибка  $\gamma$  имела отрицательный знак. Следовательно, соотношение  $m = \frac{75}{146} = 0,51$ , то есть весьма близко к 0,5.

Среднеарифметическое значение  $\gamma$  (по модулю) равно 0,08 мм. Среднеквадратичное значение  $\gamma$  равно 0,09 мм.

Так как установлено, что  $m$  близко к 0,5, можно считать справедливым

$$\sigma = 2\pi R - 2Rn \sin \frac{\pi}{n} = 2R \left( \pi - n \sin \frac{\pi}{n} \right). \quad (7)$$

График этой функции (рис. 2) представляет собой кривую, которая сначала довольно круто идет вниз, а затем асимптотически приближается к оси абсцисс.

Итак, при увеличении числа  $n$

- 1) уменьшается разность между дугами и хордами;
- 2) увеличивается вероятность того, что чертежные ошибки одинаково часто имеют различные знаки и поэтому взаимно погашаются.

Следовательно, для повышения точности спрямления число  $n$  надо брать возможно большим.

Если принять, например,  $n = 180$ , то на основании проведенного нами эксперимента можно предположить  $m = 0,5$ . Тогда погрешность, вычисленная по формуле (7), составляет 0,005% по отношению к длине спрямляемой окружности.

Однако в инженерной практике не применяются такие большие значения  $n$ , а при небольших числах  $n$  становится мало вероятным  $m = 0,5$ . Наоборот, следует предположить  $m \neq 0,5$ . В таком случае величину  $n$  следует подбирать по формуле (6), а погрешность вычислять по формулам (2) или (4). Но значение  $m$  остается неизвестным и при каждом отдельном построении будет, по-видимому, различным.

Предположим, что имеет место наихудший случай, а именно  $m =$  Погрешность по формуле (4) помножим на  $\frac{100}{2\pi R}$ , чтобы получить относительную погрешность в процентах:

$$\sigma_1 = \sigma \frac{100}{2\pi R} = \left[ \frac{\pi^2}{6n^2} + \frac{(2m-1)n\gamma}{2\pi R} \right] 100. \quad (4')$$

Нетрудно видеть, что при  $m = 1$  погрешность будет максимальной. Поэтому вычислим  $n$  по формуле (6), предполагая, что  $m = 1$ . Среднее значение  $\gamma$  будем считать величиной постоянной, равной  $\gamma = 0,09 \text{ мм}^1$  (на основании проведенного нами эксперимента). Тогда

$$n = 6,1 \sqrt[3]{R}. \quad (6')$$

Вычислим оптимальное значение  $n$  для  $R = 8 \text{ мм}$

$$n = 6,1 \sqrt[3]{8} = 12,2.$$

Принимаем ближайшее целое  $n = 12$ . При этом погрешность  $\sigma_1$ , вычисленная по формуле (4'), составит 3,3%. Разумеется, это максимально возможная погрешность (так как мы приняли  $m = 1$ ).

Заметим, что практически окружность удобно делить на 12 частей, и поставим вопрос: если окружность делить на 12 частей, как будет изменяться погрешность в зависимости от радиуса окружности?

Из рассмотрения зависимости (4') следует, что относительная погрешность при одном и том же числе  $n$  уменьшается по мере увеличения радиуса окружности. Так, при  $R = 20 \text{ мм}$   $\sigma_1$  составляет уже только 2%, при  $R = 100 \text{ мм}$  — 1,3%. Разумеется, при делении окружности на 12 частей оптимальные условия имеют место только для  $R = 8 \text{ мм}$ . Чтобы получить такие условия, например, для  $R = 60 \text{ мм}$ , нужно взять  $n = 6,1 \sqrt[3]{20} = 16$ ; при этом погрешность составит 1,8%. Соответственно для  $R = 100 \text{ мм}$  мы получаем  $n = 28$  и погрешность 0,6%.

Ниже дается таблица и график (рис. 3) для выбора величины  $n$ . Значения  $n$  подобраны так, чтобы ими удобно было пользоваться при

<sup>1</sup> Некоторые авторы считают  $\gamma = 0,10 \text{ мм}$  (4, стр. 44).

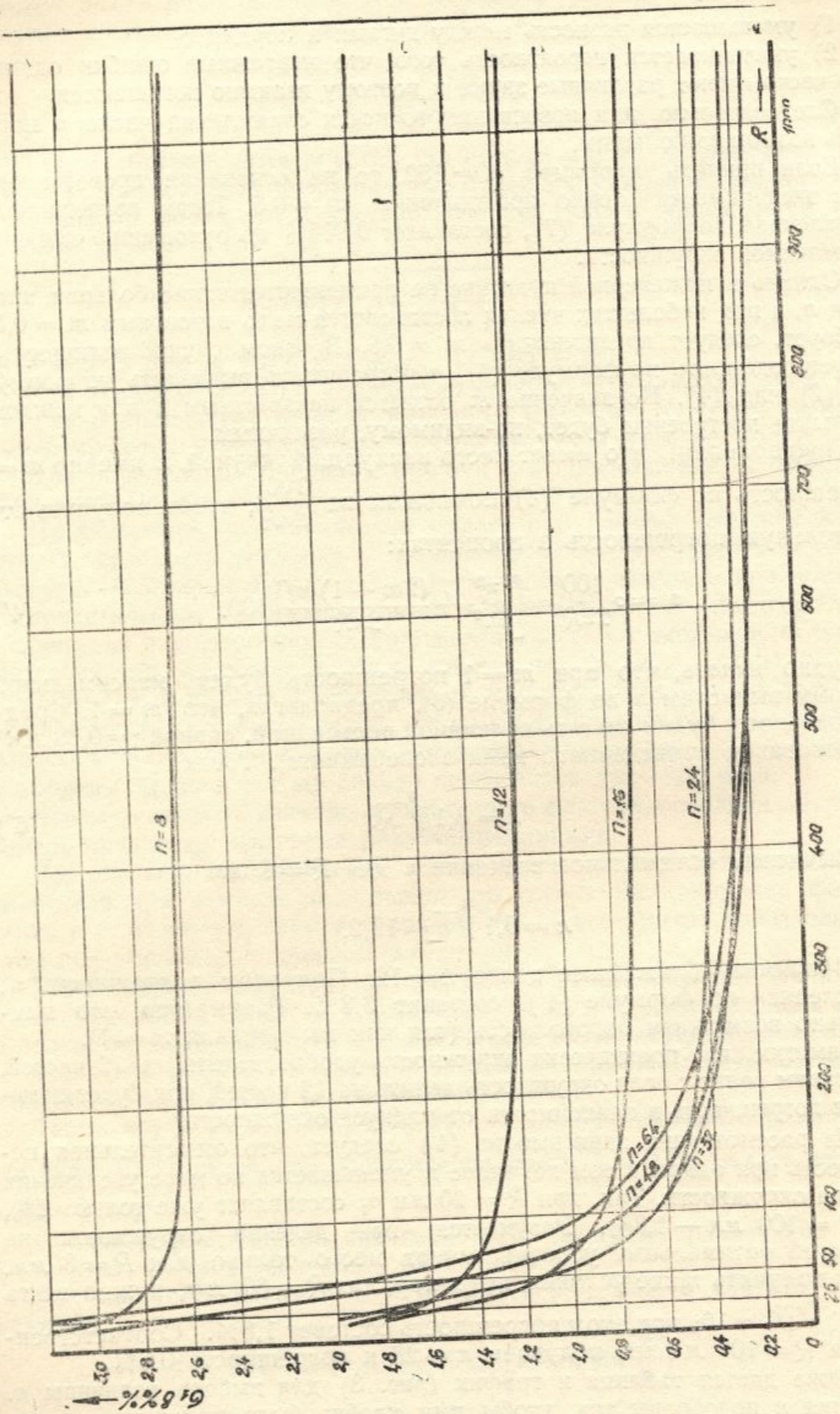


Рис. 3

делении окружности на равное число частей. Зная радиус окружности и допустимую погрешность, можно легко найти соответствующее значение. Так, из таблицы видно, что при  $R = 200$  мм и допустимой погрешности до 1% число  $n$  надо взять равным 16. Если же допускается погрешность в 1,5%, то можно взять  $n = 12$ .

Значение относительной погрешности (в %)

$n$	Радиус окружности в мм													
	5	12	25	50	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
8	4,86	3,53	3,13	2,80	2,69	2,63	2,62	2,60	2,59	2,59	2,59	2,58	2,58	2,58
12	4,60	2,56	1,82	1,48	1,31	1,23	1,20	1,18	1,17	1,17	1,17	1,16	1,16	1,16
16	5,22	2,56	1,56	1,10	0,87	0,76	0,72	0,70	0,69	0,68	0,67	0,67	0,67	0,66
24	7,17	3,15	1,87	1,08	0,63	0,46	0,40	0,38	0,36	0,35	0,34	0,33	0,33	0,32
32	>9%	4,00	2,00	1,08	0,62	0,39	0,31	0,27	0,25	0,24	0,23	0,22	0,22	0,21
48	>9%	5,92	2,83	1,45	0,76	0,41	0,30	0,24	0,21	0,18	0,17	0,16	0,15	0,14
64	>9%	7,84	3,70	1,87	0,96	0,50	0,35	0,27	0,22	0,19	0,17	0,15	0,14	0,13

При пользовании таблицей нужно учитывать следующее:

1. По мере возрастания  $n$  вероятность того, что  $m = 1$ , уменьшается. Поэтому, чем больше  $n$  мы берем, тем больше разность между данными таблицы и действительной погрешностью.

2. При небольших радиусах (примерно до 8—10 мм) погрешность может иметь сравнительно большую величину. Поэтому при небольших  $R$  рекомендуется выбирать  $n$  не по таблице, а более точно, пользуясь формулой (6<sup>1</sup>). Соответствующую относительную погрешность в процентах можно определять по формуле

$$\sigma_1 = \frac{13,2}{\sqrt[3]{R^2}}, \quad (4'')$$

которая получена путем преобразований из формулы (4') при  $m = 1$   $\gamma = 0,09$  мм и  $n = 6,1 \sqrt[3]{R}$ .

Так, при  $R = 5$  мм по формуле (6')  $n = 10$  и по формуле (4'')  $\sigma_1 = 4,3\%$ . Нетрудно видеть, что это большая точность, чем можно получить по таблице, приняв  $n = 8$  или  $n = 12$ .

Зависимости (6') и (4'') представлены в виде графика (рис. 4), которым можно пользоваться для определения  $n$  и  $\sigma_1$  в зависимости от  $R$ .

Рассмотрим вопрос о спрямлении гладкой кривой линии.

Сначала представим себе гладкую кривую, состоящую из сопряженных между собою дуг окружностей  $C_1, C_2 \dots C_m$  с радиусами соответственно равными  $R_1, R_2 \dots R_m$ .

Пусть  $R_v$  — наименьший из всех радиусов. Выберем для  $R_v$  число  $n$  так, чтобы максимальная погрешность не превышала наперед заданного числа. Дугу  $C_v$  будем спрямлять хордой  $a$  равной  $\frac{2\pi R_v}{n}$ . Если этой хордой спрямлять дугу  $C_k$  ( $k = 1, 2 \dots v-1, v+1 \dots m$ ), то погрешность только уменьшится, так как погрешность уменьшается по мере увеличения радиуса (формула 4').

Рассмотрим теперь гладкую кривую с непрерывной кривизной. Допустим, что наибольшая кривизна будет в точке  $A$ . Построим в этой точке круг кривизны и для его спрямления вычислим на основе приведенных выше соображений хорду  $a$ . Хорду  $a$  отложим от точки  $A$  сначала по

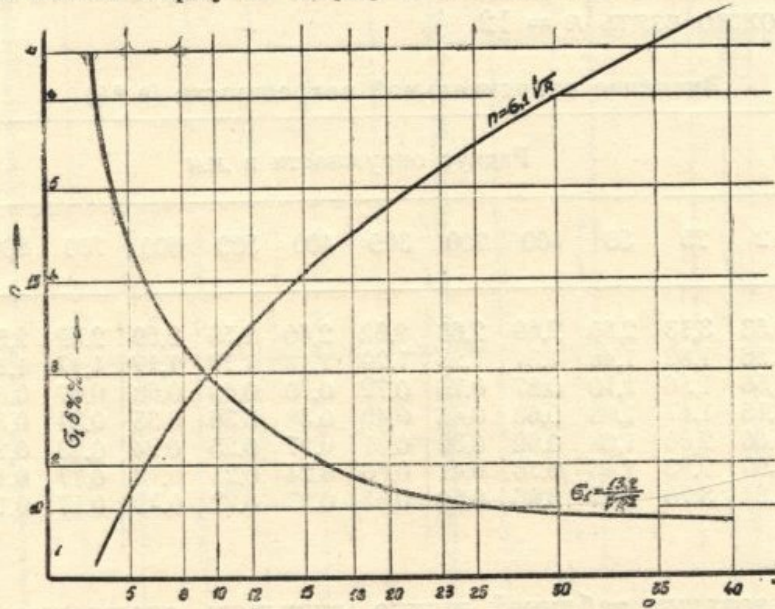


Рис. 4.

кругу, а затем по кривой. Нетрудно видеть, что замена дуги кривой хордой  $a$  дает меньшую ошибку, чем замена дуги круга. Следовательно, измеряя кривую хордой  $a$ , мы получаем меньшую погрешность, чем при измерении круга.

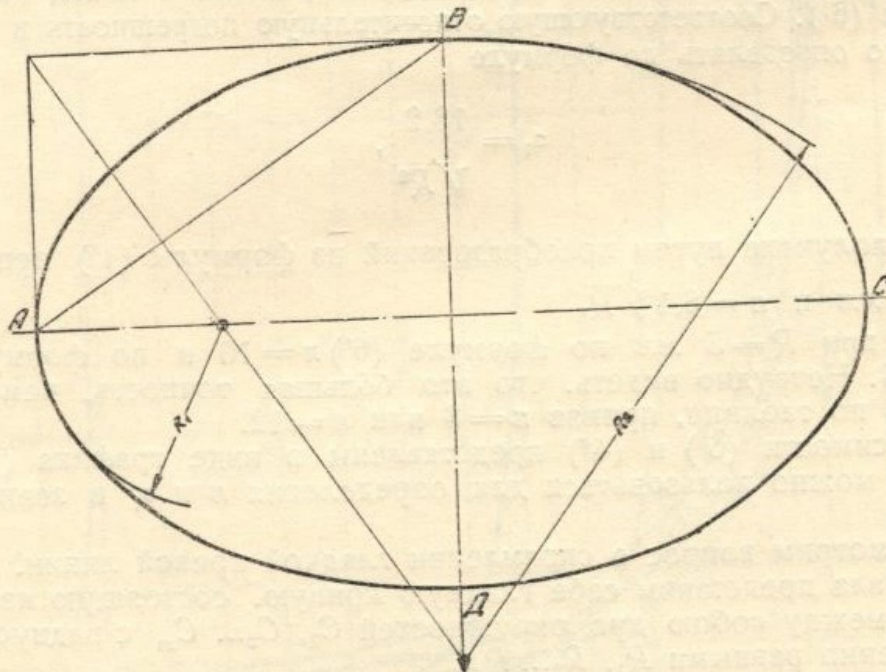


Рис. 5.

Все эти соображения позволяют нам перейти от спрямления окружности к спрямлению гладкой кривой с непрерывной или кусочно непрерывной кривизной. Например, эллипс с полуосями 80 и 60 мм необходимо спрямить так, чтобы погрешность спрямления не превышала 2%. Наименьший радиус кривизны будет в точке  $A$  (рис. 5). Центр кривизны



определяется графическим путем [2, стр. 60], а величину радиуса — непосредственным измерением:  $R_1 = 40$  мм.

Пользуясь графиком (рис. 3), устанавливаем, что если для  $R_1 = 40$  мм выбрать  $n = 12$ , погрешность не превышает 1,5%. Это нас устраивает. Вычисляем хорду

$$a = \frac{2\pi R_1}{n} = \frac{2\pi \cdot 40}{12} \approx 2 \text{ мм.}$$

Разумеется, при пользовании такой хордой общая погрешность будет меньше 1,5%. В точке  $B$ , например,  $R_2 = 135$  мм. Это соответствует числу делений окружности

$$n_1 = \frac{2\pi R_2}{a} = \frac{R_2}{R_1} n \approx 40.$$

При  $n = 40$  для радиуса 135 мм значение погрешности не превышает 0,53%. Кстати, такая высокая точность по условиям задачи не требуется. Поэтому практически для упрощения построений на участках, где радиус кривизны  $R$  больше, чем  $R_1$ , можно брать большие, (хорды, но, конечно, не больше  $a \frac{R}{R_1}$ ).

Могут иметь место случаи, когда на отдельных участках кривой с небольшими радиусами кривизны нельзя гарантировать получение заданной точности. Из графика (рис. 4) видно, что погрешность, не превышающую, например, 2%, можно гарантировать только для  $R \geq 16$  мм. Если наша кривая имеет точки, в которых  $R < 16$  мм, то здесь погрешность будет больше 2%.

В подобных случаях нужно стремиться создать условия, которые позволят получить общую погрешность, не превышающую 2%. Для этого надо выделить участки кривой, в которых  $R < 16$  мм, учесть примерное отношение длины этих участков к длине остальных участков и для последних установить величину допустимой погрешности соответственно меньше, чем 2%.

В заключение мы приходим к следующим выводам:

1. Чем больше делений, на которое мы разбиваем кривую на части для спрямления, тем выше точность спрямления.
2. Однако уже при сравнительно небольшом числе делений относительная погрешность не превышает допустимых в практике величин.
3. Приведенная выше схема расчета позволяет вычислить размер хорды для спрямления (измерения) гладкой кривой линии в зависимости от минимального радиуса кривизны этой кривой и допустимой или заданной относительной погрешности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Адлер. Теория геометрических построений, Учпедгиз, М., 1940.
2. Н. А. Глаголев. Начертательная геометрия, Гостехиздат, М., 1953.
3. Г. В. Емельянова. Справочник по проектированию разверток фасонных частей трубопроводов, Госэнергоиздат, М.—Л., 1952.
4. А. М. Иерусалимский. Начертательная геометрия, Гостехиздат, М., 1954.
5. И. Е. Менделес. Руководство по разметке фасонных частей воздуховодов из кровельной стали, Госиздат строительной литературы, М., 1947.