УДК 629.01

ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА УСЛОВНОГО ГРАДИЕНТА В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ НА ПЕРЕСТАНОВОЧНОМ МНОГОГРАННИКЕ

Гончаренко Антон Сергеевич студент группы 345*
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Доклад посвящен исследованию методов нелинейной оптимизации на перестановочном многограннике с учетом специфики евклидового множества перестановок и свойств функций, заданных на них.

Пусть $E \subset R^n$ – конечное множество точек арифметического евклидового пространства.

Рассмотрим следующую задачу дискретной оптимизации:

$$f(x) \to \min, \tag{1}$$

$$g_i(x) \le 0,\ i \in J_k, \tag{2}$$

$$g_i(x) = 0,\ i \in J_m \setminus J_k, \tag{3}$$

$$x \in E, \tag{4}$$

где функции $f(x), g_i(x), i \in J_m$ определены и непрерывно дифференцируемы на E. Здесь и далее обозначим $J_l = \{1,...,l\}$.

Рассмотрим в качестве множества E следующее комбинаторное множество арифметического евклидового пространства. Пусть $A = \{a_1,...,a_n\}$– множество n действительных чисел, среди которых s различны. Не теряя общности, будем полагать что $a_i \le a_{i+1},\ i \in J_{n-1}$.

В результате порождается множество E_{ns}, элементами которого являются упорядоченные наборы $x = (x_1,...,x_n)$, где $x_i = a_{\pi_i}$, $i \in J_n$, а $\pi = (\pi_1,...,\pi_n)$ – перестановка первых n натуральных чисел. Если все элементы множества A различны, то такое множество называется евклидовым множеством перестановок. Если же множество A содержит одинаковые элементы, то имеем евклидово множество перестановок с повторениями.

Евклидовые множества перестановок и перестановок с повторениями достаточно хорошо изучены. Отметим тот важный факт, что они являются вершинно расположенными, т.е. совпадают с множеством вершин своей выпуклой оболочки. Выпуклой оболочкой множества E_{ns} является так называемый перестановочный многогранник Π_{ns}. Известно, что он описывается следующей системой линейных уравнений и неравенств

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i;\\ \sum_{i\in\omega} x_i \ge \sum_{i=1}^{|\omega|} a_i,\ \forall\omega \subseteq J_n,\ |\omega| < n.\end{gathered} \qquad (5)$$

где $|\omega|$ – мощность множества ω.

Рассмотрим оптимизационную задачу вида (1) - (4), при условии, что множество E описывается системой (5). Нетрудно видеть, что данная задача является задачей нелинейной оптимизации на перестановочном многограннике при наличии дополнительных ограничений.

Известно, что метод условного градиента предполагает линеаризацию целевой функции в некоторой окрестности точки с последующей оптимизацией линейной функции на множестве допустимых решений. Особенностью задачи оптимизации линейных функций на перестановочном многограннике является тот факт, что ее решение непосредственно выписывается путем упорядочивания коэффициентов целевой функции. Минимум линейной функции $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ на множестве Π_{ns} достигается в точке $x^* = \left(x_1^*, ..., x_n^*\right)$, где $x_{\pi_i}^* = a_i$, $i \in J_n$, а $\pi = (\pi_1, ..., \pi_n)$ – перестановка первых n натуральных чисел, такая что $c_{\pi_i} \ge c_{\pi_{i+1}}$, $i \in J_{n-1}$.

Таким образом, можно построить итерационный процесс решения последовательности вспомогательных задач оптимизации функций на перестановочном многограннике. На каждом шаге при определении направления убывания функции решается задача оптимизации линейной функции, коэффициентами которой являются компоненты ее градиента в соответствующей точке.

Заметим, что если функции $f(x)$, $g_i(x)$, $i \in J_k$ выпуклы на Π_{ns} , а функции $g_i(x)$, $i \in J_m \setminus J_k$ линейны, то метод сходится к точному решению поставленной задачи.

Полученные результаты представляют самостоятельный интерес с точки зрения решения условных задач оптимизации на перестановочном многограннике с учетом функциональных ограничений. С другой стороны, описанные задачи можно рассматривать как релаксационные в различных схемах комбинаторной оптимизации, в частности на множестве перестановок.

**Научный руководитель – Яковлев С. В., д.ф.-м.н., профессор каф. 304.*