

ПРУЖИНЕНИЕ ПРИ ГИБКЕ НА ТРЕХ ВАЛКАХ

Ю. Н. Алексеев

В настоящей статье выдвигаются основные положения теории пружинения, применимой в случае гибки листа, профиля или трубы на станках, работающих по схеме гибок тремя валиками при наличии движения изделия. К этому типу станков относятся копировально-гибочные станки, предназначенные для изгиба листового материала, кспировальные профиле-гибочные станки, а также станки, применяемые для гибки труб.

Показано, что изгиб за пределами упругости при наличии движения изделия сильно отличается от изгиба неподвижного изделия и что расчет пружинения без учета движения приводит к большим ошибкам.

Результаты теоретического исследования сравниваются с результатами, полученными экспериментальным путем.

1. Постановка задачи

В работе А. А. Ильюшина¹ приведено решение задачи о пластическом изгибе балки и дан метод определения остаточного радиуса кривизны ее после удаления внешней нагрузки. Ввиду большого значения для промышленности вопроса о пружинении изделия после гибки, многие исследователи пытались использовать это решение для определения остаточного радиуса кривизны при изгибе листов, профилей и труб на гибочных и копировально-гибочных станках. Однако теоретический расчет по этому методу не дает согласных с опытами результатов.

Теоретический анализ, проведенный автором, показал, что решение задачи пружинения при наличии движения изделия сильно отличается от статистического решения, приведенного в работе А. А. Ильюшина.

Основное отличие изгиба движущейся балки от изгиба неподвижной заключается в том, что при перемещении балки ее деформации отличаются от деформаций, получаемых неподвижной балкой за счет различной степени нагружения в процессе изгиба.

2. Изгиб движущейся балки за пределами упругости

Рассмотрим процесс изгиба неподвижной, относительно опор, балки (рис. 1).

При симметричном расположении силы относительно опор A и B эпюра изгибающих моментов имеет вид, представленный на рисунке 1 б. По мере увеличения силы возрастает изгибающий момент. При определенном значении силы P в балке возникают зоны пластических деформаций, распространяющихся по ее длине и высоте.

Балка по длине может быть разбита на три участка:

I — участок упругих деформаций,

II — участок упруго-пластических деформаций,

III — участок упругих деформаций.

¹ А. А. И л ь ю ш и н. Пластичность. Гостехиздат, 1948.

Граница между участком упругих и упруго-пластических деформаций определяется из условия, что максимальные напряжения в сечении на границе этих зон равны пределу пропорциональности данного материала¹, то есть

$$\sigma_{\max} = \sigma_p.$$

Длина участка упругих деформаций для балки может быть определена по формуле:

$$x = \frac{2\sigma_p Y_x}{P y}, \quad (2)$$

где Y_x — момент инерции,
 y — расстояние максимально удаленного волокна балки от нейтральной оси.

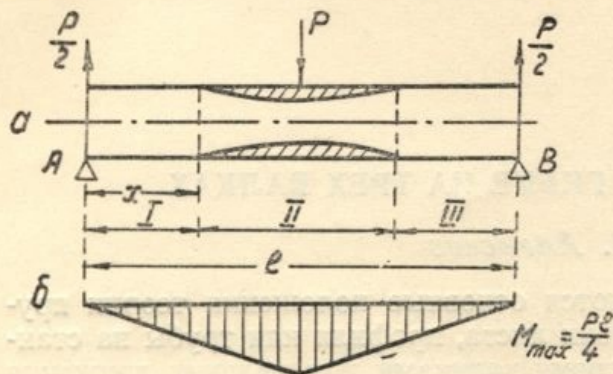


Рис. 1.

После удаления внешней нагрузки начинается процесс разгрузки балки, который приводит к восстановлению первоначальной формы балки на участках I и III, а на участке II балка получает остаточные деформации, которые можно определить, пользуясь теоремой А. А. Ильюшина о разгрузке:

«Перемещения точки тела в некоторый момент стадии разгрузки отличаются на величины упругих перемещений, которые возникли бы в теле, если бы в естественном (напряженном и недеформированном) состоянии к нему были бы приложены внешние силы, равные разностям внешних сил, действующих на тело в указанные моменты»².

В силу симметрии нейтральная ось балки получает симметричные прогибы.

Рассмотрим теперь процесс изгиба движущейся относительно опор балки (рис. 2).

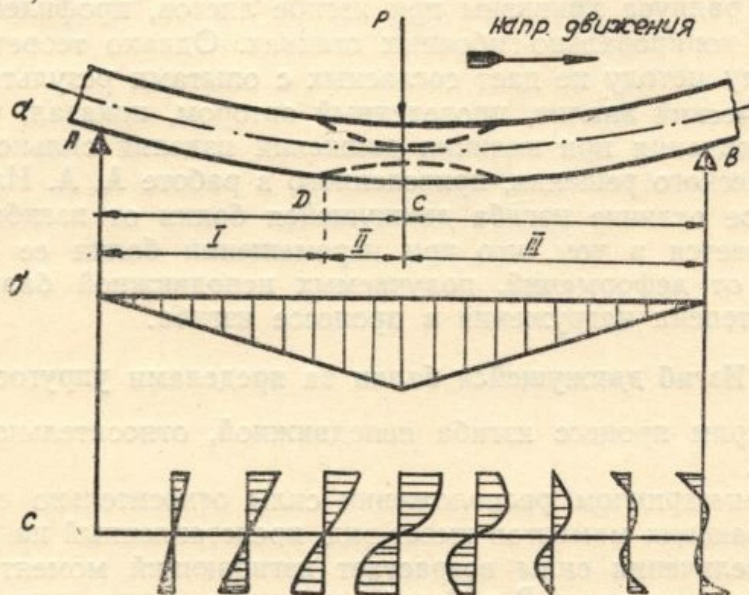


Рис. 2.

Эпюра изгибающих моментов имеет тот же вид (рис. 2б), но напряженно-деформированное состояние сильно изменяется. Выясним ха-

¹ Пределом пропорциональности называется напряжение, соответствующее конечной точке линейного участка диаграммы напряжение — деформации.

² А. А. И л ь ю ш и н. Пластичность. Гостехиздат, 1948, стр. 120.

рактен изменения напряжений в произвольном сечении балки при ее движении вправо. В тот момент, когда сечение расположено под опорой A , напряжения равны нулю, так как изгибающий момент равен нулю. По мере продвижения балки вправо в сечении возникают напряжения, которые распределяются по высоте, по прямолинейному закону. При прочих равных условиях напряжения в поперечном сечении увеличиваются ввиду возрастания изгибающего момента. Прямолинейный характер распределения напряжений по высоте сохраняется на длине AD балки, которая определяется по формуле (2). Следовательно, участок AD характеризуется наличием упругих деформаций и постепенным увеличением изгибающего момента.

При дальнейшем движении балки в сечении появляются пластические деформации. Закон изменения напряжений по высоте поперечного сечения балки становится более сложным и зависит от вида диаграммы напряжение — деформации материала балки. По мере продвижения балки на участке DC пластические деформации возрастают ввиду увеличения изгибающего момента на этом участке. Следовательно, участок DC характерен наличием пластических деформаций и постепенным увеличением изгибающего момента.

Начиная с точки C , при дальнейшем движении балки изгибающий момент постепенно уменьшается, и балка начинает разгружаться. Эпюры напряжений получают вид, представленный на рисунке 2с. На этом участке напряжения можно определить по теореме о разгрузке. Следовательно, участок CB характеризуется постепенным уменьшением изгибающего момента. Вся балка может быть теперь разбита на следующие три участка:

I участок — участок упругих деформаций и постепенного нагружения,

II участок — участок пластических деформаций и постепенного нагружения,

III участок — участок разгрузки.

Покажем теперь, что при движении балки два симметричных относительно опор сечения получают различные деформации. Рассмотрим два сечения ab и cd (рис. 3). Если сечение ab расположено на участке упругих деформаций, то деформация может быть определена по уравнению:

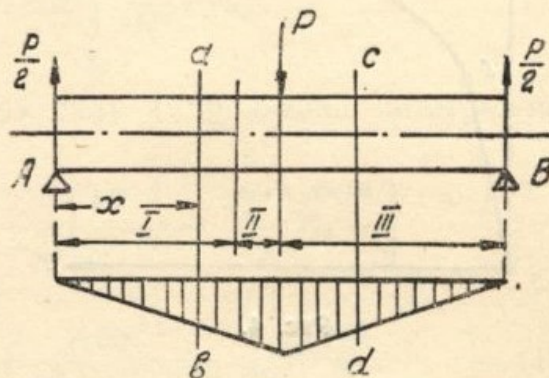


Рис. 3.

$$\varepsilon_1 = \frac{My}{EY_x} = \frac{Pxy}{2EY_x}. \quad (3)$$

Пользуясь теоремой о разгрузке в сечении cd , симметричном сечению ab , деформации можно определить по уравнению:

$$\varepsilon_{II} = \varepsilon_{пл} - \varepsilon_{упр}. \quad (4)$$

Но $\varepsilon_{упр}$ — деформация фиктивная при действии момента, равного разности моментов под силой P , и в сечении cd она равна:

$$\varepsilon_{упр} = \frac{\left(\frac{Pl}{4} - \frac{Px}{2}\right)y}{EY_x}. \quad (5)$$

Сравнивая деформации, получим:

$$\epsilon_{\text{пл}} - \frac{Ply}{4EY_x} + \frac{Pxy}{2EY_x} = \frac{Pxy}{2EY_x}$$

или

$$\epsilon_{\text{пл}} = \frac{My}{EY_x}. \quad (6)$$

Уравнение (6) показывает, что для равенства деформаций в симметричных сечениях необходимо, чтобы деформация балки протекала упруго.

Следовательно, при движении балки в процессе изгиба в симметричных относительно опор точек балка получает различные деформации при наличии пластического деформирования. Нейтральная ось становится несимметричной при симметричной нагрузке.

Асимметрия кривой прогибов вносит существенное изменение в работу балки и особенно влияет на величину пружинения.

3. Расчет пружинения при наличии движения балки

Предположим, что величина силы P такая, что в балке возникают зоны пластических деформаций. Вычислим радиус кривизны нейтральной оси балки на участке AD . Для этого используем уравнение связи радиуса кривизны с изгибающим моментом, моментом инерции и модулем упругости

$$\frac{1}{R_{\text{упр}}} = \frac{M}{EY_x}. \quad (7)$$

Для радиуса кривизны на этом участке получаем выражение

$$R_{\text{упр}} = \frac{2EY_x}{P_x}. \quad (8)$$

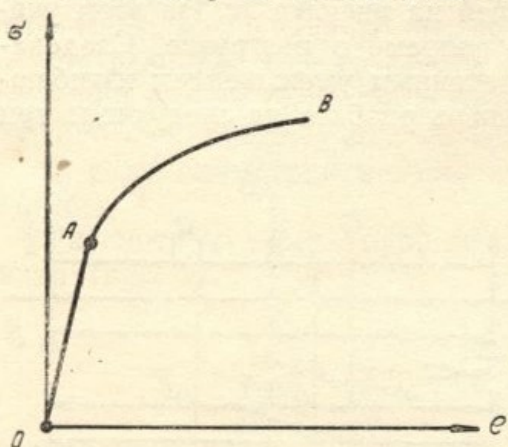


Рис. 4.

Определим теперь радиус кривизны нейтральной оси балки на участке упруго-пластических деформаций. Для определения радиуса

кривизны на этом участке необходимо знать диаграмму напряжение—деформация для данного материала. Эта диаграмма получается в результате испытания материала на растяжение и имеет вид, представленный на рисунке 4. Для некоторых материалов с большой степенью точности эту диаграмму можно представить в виде кривой, состоящей из двух участков: прямолинейного участка OA , выражаемого уравнением

$$\sigma = E\epsilon, \quad (9)$$

и криволинейного участка AB , выражаемого степенным законом

$$\sigma = A\epsilon^m, \quad (10)$$

где A и m — постоянные материала.

На участке DC по высоте балки существуют зоны упругих и пластических деформаций. Определим границу между этими зонами.

Допуская гипотезу плоских сечений, получим

$$\epsilon_p = \frac{y_0}{R}, \quad (11)$$

где ε_p — деформация, соответствующая пределу пропорциональности, y_0 — координата, определяющая границу упругой и пластической областей по высоте балки.

Вводим предел пропорциональности и модуль упругости, получим уравнение для определения границы между зонами упругой и пластической деформации в виде

$$y_0 = \frac{\sigma_p R}{E}. \quad (12)$$

Внешний изгибающий момент должен уравновешиваться системой внутренних напряжений. Для балки прямоугольного сечения получим:

$$M = 2 \int_0^{y_0} \sigma_1 b y dy + 2 \int_{y_0}^{h/2} \sigma_2 b y dx, \quad (13)$$

где h — высота балки.

Выражаем напряжения через расстояние до нейтральной оси y и радиус кривизны R .

$$\sigma_1 = E\varepsilon = \frac{E y}{R}, \quad (14)$$

$$\sigma_2 = A\varepsilon^m = \frac{E y^m}{R^m}. \quad (15)$$

Подставив значение напряжений (14) и (15) в уравнение (13), получим:

$$M = 2 \int_0^{y_0} \frac{E y}{R} b y dy + 2A \int_{y_0}^{h/2} \frac{y^m}{R^m} b y dy. \quad (16)$$

Выражая изгибающий момент через силу и производя интегрирование, получим

$$\frac{P x}{2} = \frac{2b\sigma_p^3 R^2}{3E^2} + 2 \frac{bA}{A^m (m+2)} \left[\frac{h^{m+2}}{2^{m+2}} - \frac{\sigma_p^{m+2} R^{m+2}}{E^{m+2}} \right]$$

или

$$\left[\frac{2b\sigma_p^3}{3E^2} - \frac{2Ab\sigma_p^{m+2}}{(m+2)E^{m+2}} \right] R^2 + \frac{Abh^{m+2}}{2^{m+1}(m+2)} \frac{1}{R^m} = \frac{P x}{2}. \quad (17)$$

Следовательно, на втором участке радиус кривизны определяется из степенного уравнения (17). Для определения остаточного радиуса кривизны на участке разгрузки воспользуемся теоремой о разгрузке, которую можно выразить уравнением:

$$\frac{1}{R_{\text{ост}}} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_{\text{упр}}}, \quad (18)$$

где $R_{\text{упр}}$ — фиктивный радиус, который получила бы балка, если бы на нее действовала нагрузка, равная разности между нагрузкой в конце зоны нагружения, и нагрузкой, действующей на балку в заданном сечении, а деформация балки протекала бы упруго.

Нагрузка, равная разности, равна

$$M = \frac{P(l-x)}{2}. \quad (19)$$

Тогда остаточный радиус кривизны на участке разгрузки CB будет:

$$R_{\text{осн}} = \frac{1}{\frac{1}{R} - \frac{P(l-x)}{2EY}}, \quad (20)$$

а R определяется из уравнения (17) при $x = \frac{l}{2}$.

Следовательно, по формулам (8), (17) и (20) можно определить радиусы кривизны по длине балки. В некоторых случаях удастся заменить диаграмму двумя прямолинейными участками. Однако, как показали расчеты, наилучшие результаты получаются при графическом интегрировании диаграммы напряжения — деформации без всякой ее интерпретации. На рисунке 5 представлена диаграмма $\sigma_i = f(\epsilon_i)$ для материала Д-16.

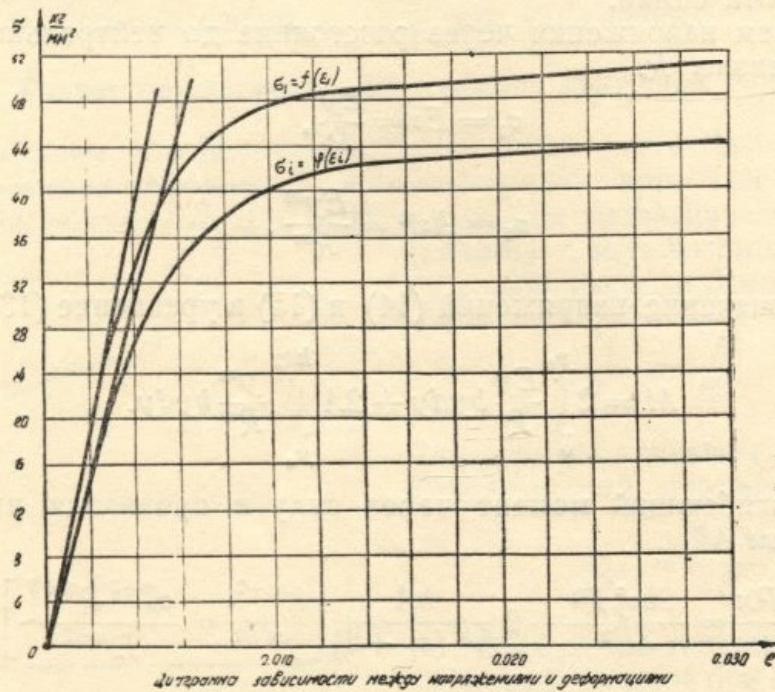


Рис. 5.

Для построения диаграммы распределения радиусов кривизны по длине балки необходимо построить предварительно диаграмму зависимости уравнивающего изгибающего момента от максимальной деформации балки. Для определения этого момента необходимо вычислить интеграл

$$M = 2 \int_0^{h/2} \sigma b y dy. \quad (21)$$

Графическое вычисление этого интеграла производится следующим образом. На диаграмме $\sigma = f(\epsilon)$ выбираем деформацию (например, 0,01 рис. 5) и считаем, что по высоте балки напряжения распределяются по диаграмме так, что в наиболее удаленном от нейтральной оси балки волокне возникает максимальная деформация, равная (0,01). Зная распределение напряжений по высоте, вычисляем графически по уравнению (21) значение момента M . Затем выбираем другую степень деформации и определяем M . Прodelывая это для ряда точек,

получаем диаграмму зависимости момента от степени максимальной деформации. Вид такой диаграммы представлен на рисунке 6.

Строим эпюру изгибающих моментов по длине балки и, пользуясь ею, определяем по диаграмме $M = \varphi(\varepsilon)$ деформации на участке нагружения, а затем по разности нагрузок и диаграмме $M = \varphi(\varepsilon)$ определяем максимальные деформации на участке разгрузки. Получаем распределение деформаций по длине балки. На рисунке 7 представлены диаграммы распределения деформаций по длине балки для четырех значений внешних сил. Ординаты в точке $l = 1$ дают остаточную деформацию балки после изгиба, а пунктирной кривой показано распределение деформаций в случае отсутствия движения при изгибе.

Зная распределение деформаций по длине балки, радиусы кривизны можно определить по уравнению:

$$R = \frac{h}{2\varepsilon}. \quad (22)$$

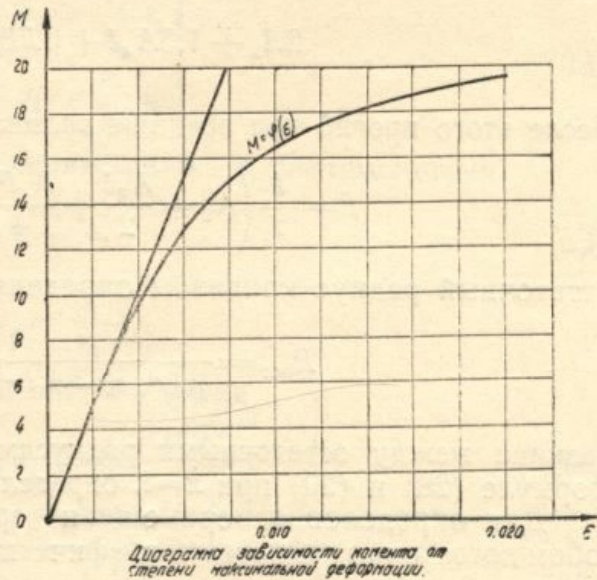


Рис. 6.

Для окончательного решения вопроса о пружинении балки необходимо определить зависимость между остаточным радиусом кривизны балки после изгиба и перемещением среднего валика по высоте. Это можно

сделать аналитическим или графическим методами. Для определения перемещения среднего валика аналитическим методом представим уравнение нейтральной оси после изгиба в виде ряда (например, степенного):

$$y = A_1 + A_2x + A_3x^2 + A_4x^3 + A_5x^4 + \dots \quad (23)$$

Вычислим первую и вторую производные:

$$y' = A_2 + 2A_3x + 3A_4x^2 + 4A_5x^3 + \dots \quad (24)$$

$$y'' = 2A_3 + 6A_4x + 12A_5x^2 + \dots \quad (25)$$

Уравнение нейтральной оси после изгиба должно удовлетворять условиям:

- 1) проходить через точки: а) $x=0, y=0$
и б) $x=l, y=0$,

2) радиус кривизны кривой в любой точке должен быть равен радиусу кривизны, полученному по уравнениям (8), (17) и (20).

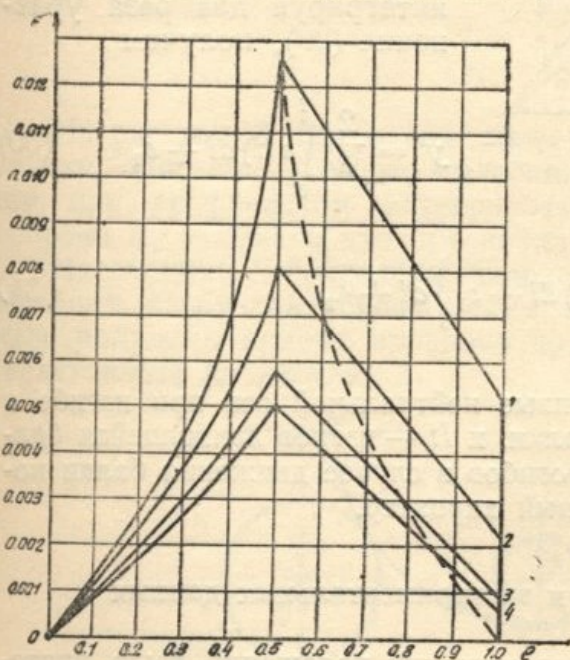


Рис. 7.

Для определения коэффициентов получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} A_2 + A_3 l + A_4 l^2 + A_5 l^3 + \dots &= 0 \\ 2A_3 + 3A_4 l + 3A_5 l^2 + \dots &= \frac{1}{R_1} \\ 2A_3 + 1.5A_4 l + 0.75A_5 l^2 + \dots &= \frac{1}{R_2}. \end{aligned} \quad (26)$$

После этого прогиб под средним валиком определяется по формуле

$$f = \frac{l}{2} \left(A_2 + \frac{A_3 l}{2} + \frac{A_4 l^2}{4} + \frac{A_5 l^3}{8} + \dots \right). \quad (27)$$

Остаточный радиус кривизны определяется по формуле:

$$R_{\text{ост}} = \frac{1}{2(A_3 + 3A_4 l + 6A_5 l^2 + \dots)}. \quad (28)$$

Разница между остаточными радиусами кривизны, вычисленными по формуле (28) и (20) при $x=l$, определяет погрешность решения.

Для определения перемещения среднего валика графическим способом достаточно произвести графическое интегрирование кривой $\varepsilon=f(l)$

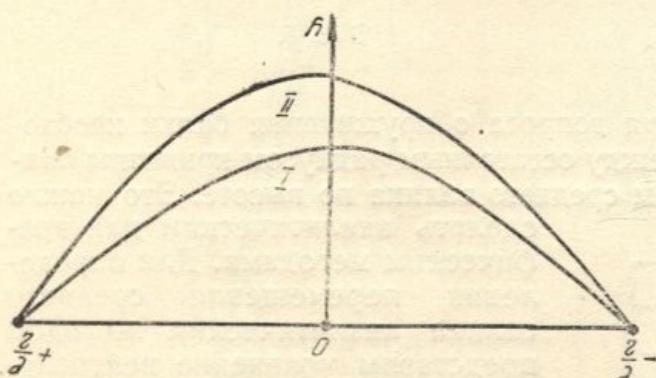


Рис. 8.

(рис. 7), так как $\varepsilon = \frac{h}{2R}$, то

$$y'' = \frac{1}{R} = \frac{2\varepsilon(l)}{h}; \quad (29)$$

интегрируя два раза уравнение (29), получим

$$y' = \frac{2}{h} \int_0^l \varepsilon(l) dl + c_1 \quad (30)$$

$$y'' = \left(\frac{2}{h} \right)^2 \int_0^l \left\{ \int_0^l \varepsilon(l) dl + c_1 \right\} dl + c_2. \quad (31)$$

На рисунке 8 представлены кривые нейтральной оси при изгибе в случаях: *I* — изгиба неподвижной балки, и *II* — изгиба движущейся балки. Как видно на фигуре, кривая прогибов в случае движения балки носит явно выраженный несимметричный характер.

4. Сравнение теоретических и экспериментальных данных

Для проверки правильности теоретических положений было проведено сравнение теоретических и экспериментальных данных для весьма сложного случая гибки листов на стенке с большими диаметрами валиков в большом диапазоне радиусовгиба. Теоретический расчет был проведен графическим методом.

Диаграмма испытания материала на растяжение представлена на рисунке 5. Поскольку изгибу подвергались листы большой ширины по

сравнению с толщиной, то было принято, что поперечные деформации отсутствовали:

$$\xi_2 = 0.$$

Уравнение связи напряжений с деформациями

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} \sigma_2 = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \varepsilon_1 \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2} \sigma_1 = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \varepsilon_2 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

определяет зависимость между напряжениями и деформациями

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \sigma_1 \quad (33)$$

$$\frac{3}{4} \sigma_1 = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \varepsilon_1.$$

Интенсивность напряжений в этом случае равна

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_1, \quad (34)$$

интенсивность деформаций

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_1. \quad (35)$$

Поскольку для расчетов необходима диаграмма $\sigma_1 = f(\varepsilon_1)$, то диаграмма, полученная при растяжении образцов, была перестроена в эти координаты по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_i \\ \varepsilon_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} e_i. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

На рисунке 5 приведена перестроенная диаграмма $\sigma_1 = f(\varepsilon_1)$ по методу, описанному выше; была построена диаграмма $M = \varphi(\varepsilon)$, причем при графическом интегрировании диаграммы $\sigma_1 = f(\varepsilon_1)$ было выбрано $\Delta y = 0,0005$, что обеспечило большую точность вычислений.

На рисунке 7 приведены диаграммы $\varepsilon = f(l)$, полученные путем вариации нагрузки. Графическим интегрированием кривой $\varepsilon = f(e)$ были получены кривые прогибов при изгибе листа, одна из которых представлена на рисунке 8.

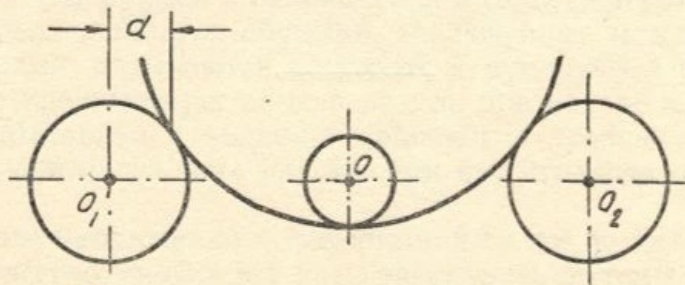


Рис. 9.

Имея кривые прогибов, графическим путем производился учет смещения точки опоры при изгибе листа (которым нельзя было пренебрегать ввиду большого диаметра валков) (рис. 9). Результаты теоретических расчетов и экспериментов приведены в таблице 1.

Таблица 1

Эксперимент		Теоретические значения			
$R_{\text{ост}}$ мм	f мм	статические		при движении	
		$R_{\text{ост}}$ мм	f мм	$R_{\text{ост}}$ мм	f мм
168	9	192	5,6	192	7,7
268	7	455	4,3	455	5,3
649	5	1180	3,2	1180	3,7
969	4	1700	2,6	1700	2,8
1720	3	—	—	—	—

По данным результатов теоретического и экспериментального исследования построена диаграмма зависимости остаточного радиуса кривизны и перемещение среднего валика (рис. 10). При теоретическом расчете

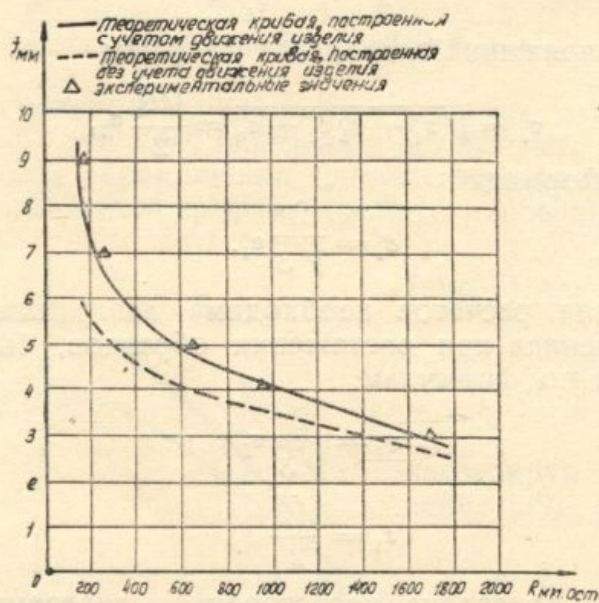


Рис. 10.

моментом от горизонтальной составляющей на опорах по малости пренебрегалось. Как видно из рисунка 10, расчет с учетом движения листа дает хорошее совпадение с данными опыта, в то время как расчет при отсутствии движения дает весьма большое отклонение от действительной картины протекающих явлений.