МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

В. М. Вартанян, В. Л. Петрик, О. О. Воляк

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Частина 1

Навчальний посібник до самостійного вивчення дисципліни

Харків «ХАІ» 2013

УДК 330.45:519.8(075.8)

В18

Рецензенти: д-р екон. наук, проф. Т. В. Шталь,
канд. екон. наук, доц. О. П. Мельникова

Вартанян, В. М.

В18 Економіко-математичне моделювання [Текст] : навч. посіб. до самостійного вивч. дисципліни : у 2 ч. / В. М. Вартанян, В. Л. Петрик, О. О. Воляк. – Х. : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харк. авіац. ін-т», 2013. – Ч. 1. – 92 с.

Навчальний посібник являє собою практичний довідник, спрямований на побудову й аналіз економіко-математичних моделей. Наведено методику розв`язання типових задач, опис їх реалізації на комп'ютері за допомогою інтегрованого інструментарію Excel.

Для викладачів, аспірантів, студентів економічних спеціальностей і широкого кола користувачів.

Іл. 23. Табл. 19. Бібліогр.: 9 назв

УДК 330.45:519.8(075.8)

ВСТУП

Одна з характерних особливостей сучасної науки – широке застосування методів математики в різних областях дослідження.

Метою «Економіко-математичного моделювання» як однієї з фундаментальних математичних дисциплін є кількісне оцінювання економічних процесів, що відбуваються в межах досліджуваної економічної системи.

Економіко-математичне моделювання (ЕММ) – опис економічних процесів та явищ у вигляді економіко-математичних моделей.

Як і будь-яке моделювання, ЕММ ґрунтується на принципі аналогії, тобто можливості вивчення об'єкта не безпосередньо, а через розгляд іншого, подібного йому і більш доступного об'єкта та його моделі, у цьому випадку – економіко-математичної моделі.

Важливі задачі сучасності – управління економічними системами, оптимізація їхньої структури, траєкторії розвитку й функціонування з метою досягнення максимальної економічної ефективності.

Методи розроблення кількісно обґрунтованих рекомендацій щодо прийняття оптимальних рішень визначили науковий напрям, що має назву *математичного програмування.*

Існує великий клас оптимізаційних моделей. Такі задачі розв'язують з метою оптимізації планування економічних систем і управління ними.

У загальному вигляді постановка задач є такою: знайти змінні $x_1, x_2,..., x_n$, які задовольняють системі нерівностей (рівнянь) $\varphi_i(x_1, x_2,..., x_n) \leq b_i$ $(i = 1, 2,…, m)$ і надають цільовій функції $Z = f(x_1, x_2,..., x_n)$ максимуму (мінімуму).

Точку $X = (x_1, x_2,..., x_n)$, яка задовольняє цим обмеженням, називають *допустимим розв'язком.* Серед допустимих точок визначають таку, у якій функція $f(x_1, x_2,..., x_n)$ набирає найбільшого (найменшого) значення. Таку точку називають *оптимальною,* або *оптимальним розв'язком.*

Класичні методи оптимізації не застосовують, якщо множина допустимих значень аргументу є дискретною або функцію Z задано таблично, тоді використовують методи математичного програмування – одного з головних інструментів для розв'язання оптимізаційних задач.

Математичне програмування – це математична дисципліна, предметом вивчення якої є теорії й методи знаходження екстремумів функцій багатьох змінних за наявності додаткових обмежень для цих змінних, які подано у вигляді рівностей або нерівностей.

Функцію, для якої визначають екстремальне значення, називають *цільовою*.

Математичне програмування набуло широкого застосування в економіці: планування виробництва; управління запасами й трудовими ресурсами; розміщення об'єктів; технічне обслуговування устаткування; робота над проектами й календарне планування; побудова обчислювальних, електроенергетичних, військових, транспортних систем; організація міської сфери обслуговування, охорони здоров'я, туризму, спорту та розваг тощо.

Виділяють різні класи задач математичного програмування, що пов'язано з набором обмежень для цільової функції f, умов φ_i і допустимої множини значень змінних.

Якщо $f(x_1, x_2,..., x_n)$ та умови $\varphi_i(x_1, x_2,..., x_n)$ – лінійні функції, то маємо задачу *лінійного програмування*.

Якщо виходячи зі змістовного значення розв'язки задачі лінійного програмування мають бути цілими числами, то це задача *цілочислового лінійного програмування.*

Якщо $f(x_1, x_2,..., x_n)$ і (або) $\varphi_i(x_1, x_2,..., x_n)$ – нелінійні функції, то маємо задачу *нелінійного програмування*, яке, у свою чергу, може бути *опуклим* ($f(x_1, x_2,..., x_n)$ і (або) $\varphi_i(x_1, x_2,..., x_n)$ – опуклі функції) і *квадратичним* (цільова функція $f(x_1, x_2,..., x_n)$ є квадратичною, а обмеження $\varphi_i(x_1,x_2...,x_n)$ – лінійні функції).

Якщо область допустимих розв'язків складається зі скінченної кількості точок, то такий клас задач називають *дискретним програмуванням*.

Якщо функції $f(x_1, x_2,..., x_n)$ і $\varphi_l(x_1, x_2,..., x_n)$ залежать від випадкових чинників, то такий клас задач називають *стохастичним програмуванням*.

Задачі, у яких прийняття оптимального рішення подано у вигляді деякого багатокрокового процесу, є задачами *динамічного програмування*.

Існують й інші методи прийняття виробничо-економічних рішень, наприклад, *теорія ігор,* предметом вивчення якої є прийняття рішень в умовах конфліктних ситуацій, а також знаходження оптимальних розв'язків в умовах невизначеності тощо.

1. МОДЕЛІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

1.1. Загальна постановка задачі лінійного програмування

Математичні методи застосовують не безпосередньо до реальності, що вивчається, а лише до математичних моделей тих або інших процесів або об'єктів, тому необхідно формалізувати задачу, тобто побудувати *економіко-математичну модель.*

Економіко-математична модель – математичний опис досліджуваного економічного процесу або об'єкта, яке виражає закономірності економічного процесу в абстрактному вигляді за допомогою математичних співвідношень.

Процес економіко-математичного моделювання складається з таких етапів:

1. Вивчення й усвідомлення властивостей предметної області. Аналізують особливості функціонування об'єкта, визначають чинники, що впливають на його функціонування, їх кількість і ступінь впливу, вибирають критерій оптимізації, що відображає мету задачі, яка розглядається.

2. Економічне моделювання. Визначають і словесно формулюють основні зв'язки між характеристиками процесу або явища залежно від критерію, що оптимізується.

3. Математичне моделювання. Переводять економічну модель на формальну математичну мову.

4. Вибір або створення методу розв'язання.

5. Вибір або написання програми для розв'язання задачі на ЕОМ.

6. Розв'язання задачі на ЕОМ.

7. Аналіз отриманого розв'язку.

Усі екстремальні математичні задачі, описані раніше, і задачі, що їм еквівалентні, належать до загального класу задач лінійного програмування (ЗЛП). Проте запис цільової функції і, головним чином, обмежень у різних задачах є різним. Тому сформулюємо загальну задачу лінійного програмування й розглянемо спосіб зведення будь-якої ЗЛП до більш простої й зручної для дослідження форми.

У *загальній задачі лінійного програмування* (ЗЗЛП) частина обмежень складається з нерівностей, частина – з рівнянь, не на всі змінні накладається умова невід'ємності: необхідно знайти екстремальне значення цільової функції

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max(min)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i (i = 1,2,...,k), \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i (i = k+1, k+2,...,m), \end{cases} \qquad (1.1)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, ...,\ x_r \ge 0,\ к \le m \le n,\ 0 \le r \le n.$$

Якщо всі змінні є невід'ємними $(x_j \ge 0,\ j = 1,2,...,n)$, тобто $r = n$, і система обмежень (1.1) складається лише з нерівностей, тобто $k = m$, то таку ЗЛП називають *стандартною задачею лінійного програмування.*

Якщо система обмежень (1.1) складається тільки з рівностей, тобто $k = 0$, то таку ЗЛП називають *канонічною задачею лінійного програмування*, яка в матричній формі має вигляд

$$L = CX \to max\ (min)$$

при обмеженнях

$$AX = B,\ X \ge 0.$$

Усі три форми задач еквівалентні в тому значенні, що кожну з них можна простими перетвореннями звести до будь-якої з двох.

Зведення стандартної задачі до канонічної форми. Розглянемо лінійну нерівність із n невідомими

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \le b.$$

Для зведення нерівності до рівності додамо до лівої частини невід'ємну величину $x_{n+1} \ge 0$ – додаткову змінну, унаслідок чого одержуємо рівняння з $n+1$ змінними:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + x_{n+1} = b.$$

Якщо нерівність має знак «≥», то від її лівої частини віднімемо величину $x_{n+1} \ge 0$.

У кожну з m нерівностей системи обмежень стандартної задачі введемо додаткові змінні $x_{n+1}, x_{n+2},..., x_{n+m}$ і розглянемо таку канонічну задачу: знайти максимальне (мінімальне) значення цільової функції

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + Ca_nx_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + ... + 0x_{n+m} \to max(min)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ ... \ + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ ... \ + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{22}x_2 + \ ... \ + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, ...,\ x_n \ge 0,\ x_{n+1} \ge 0,\ x_{n+2} \ge 0, ...,\ x_{n+m} \ge 0.$$

Аналогічно зводимо ЗЗЛП до канонічної форми.

Пошук мінімуму цільової функції $Z = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n$ можна звести до задачі максимізації, замінивши знаки коефіцієнтів C_j на протилежні: $Z' = - C_1x_1 - C_2x_2 - ... - C_nx_n$, і навпаки.

Максимальне (мінімальне) значення $d = CX^*$ цільової функції називають *значенням* задачі, де $X^* = (x^*_1, x^*_2,..., x^*_n)$ – оптимальний розв'язок.

Допустимий розв'язок, або *план,* $X = (x_1, x_2,..., x_n)$ називають *опорним*, якщо вектори $A_i (i = 1,2,..., m)$, що входять у розклад $A_1x_1 + A_2x_2 +...+ A_nx_n = B$ з додатними коефіцієнтами x_i, є лінійно незалежними.

Опорний план є *невиродженим*, якщо містить m додатних компонентів, інакше – *виродженим*.

Перелічимо деякі типи екстремальних задач.

1. *Фізичні* екстремальні задачі – це задачі на виведення фізичних закономірностей, вибір конструкції: наприклад, визначення розмірів циліндричної посудини заданого об'єму, що має поверхню мінімальної площі (тобто оптимізація витрати матеріалу). Щоб скласти математичну модель такої задачі, потрібно:

- фізично інтерпретувати задачу, тобто застосувати відповідні фізичні закони й формули;
- визначити критерій оптимальності;
- визначити обмеження на фізичні змінні.

2. *Задачі оптимального регулювання* для систем і процесів, що перебувають у рівноважному стані. Мета оптимізації – забезпечення таких параметрів керувальної дії, що забезпечують стабільний стан системи (керована ядерна реакція, автоматичне підстроювання частоти радіоприймача).

3. *Задачі стеження.* Це підвид задач про зустрічний рух, у яких один з об'єктів (некерований) переміщається незалежно від стану іншого (керованого). Розв'язати таку задачу означає знайти точку зустрічі й розрахувати параметри керувальної дії, що забезпечують зустріч об'єктів, наприклад, у космічній навігації та під час знищення некерованих ракет.

4. *Задача оптимального розміщення центра* полягає, наприклад, у визначенні координат телевізійного мовного центру, радіорелейної станції, сервера комп'ютерної мережі, сумарна відстань від яких до решти об'єктів або джерел ресурсів є мінімальною при урахуванні обмежень (перешкоди і т.ін.).

5. *Планування роботи складних систем*. Класичний приклад – каскад гідроелектростанцій, на кожній із яких частина води йде на вироблення електроенергії, а частина – скидається у водосховище, що розташоване нижче дамби і в яке, крім того, впадають притоки. Задача полягає у визначенні режиму експлуатації, який забезпечує максимальне вироблення електроенергії або максимальний прибуток від її реалізації.

6. Практичні задачі, що полягають в *оцінюванні економічної ефективності виробництва:*

- мінімум собівартості;
- мінімум капітальних вкладень;
- максимум прибутку (задача розподілення ресурсів);
- лінійна модель оптимального розкроювання;
- модель оптимальної суміші;
- модель оптимізації використання кормів;
- модель однотоварної транспортної задачі;
- оптимальне розподілення випуску однорідної продукції між структурними підрозділами;
- розподілення випуску продукції на підприємстві по місяцях, кварталах і т.д.;
- визначення обсягу регулярних поставок і т. ін.

1.2. Побудова економіко-математичних моделей задач оцінювання економічної ефективності виробництва

Практична діяльність економіста фінансової установи, промислового підприємства або комерційної фірми пов'язана з пошуком найефективніших методів використання фінансових, виробничих, часових і людських ресурсів, що забезпечують прийняття управлінських та інженерних рішень. Пошук найприйнятнішого варіанту – основна задача оптимізації. Частіше за все таким варіантом буде екстремальний: максимум прибутку, мінімум собівартості й відходів виробництва і т. ін. Такі задачі належать до задач лінійного програмування.

Основою розв’язання є правильна *постановка задачі оптимізації*.

Постановка оптимізаційної задачі складається з таких *етапів*:

- змістовна, тобто неформалізована, постановка задачі;
- формалізація;
- визначення типу й принципу розв’язання задачі;
- визначення обмежень для системи, що оптимізується;
- визначення кількісних критеріїв для аналізу різних варіантів.

Розглянемо економіко-математичні моделі задач оцінювання економічної ефективності виробництва.

1. *Задача на мінімум собівартості:*

$$Z = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \to min$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \geq B,$$
$$\sum_{i=1}^{m} k_i x_i \leq K,$$
$$x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, ..., m).$$

2. *Задача на мінімум капіталовкладень:*

$$Z = \sum_{i=1}^{m} k_i x_i \to min$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \geq B,$$
$$\sum_{i=1}^{m} c_i x_i \leq C,$$
$$x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, ..., m).$$

У наведених формулах позначено:

– *B* – необхідній обсяг виробництва;
– *C* – ліміт капіталовкладень;
– x_i – обсяг виробництва продукції за варіантом *i* ($i = 1,2,...,m$);
– c_i – собівартість продукції за варіантом *i*;
– k_i – питомі капіталовкладення за варіантом *i*.

3. *Задача на максимум прибутку (задача розподілення ресурсів):*

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1, 2,...,m,$$
$$0 \le x_j \le d_j,\ j = 1,2,...,n,$$

де n – кількість видів продукції;

m – кількість видів сировини;

x_j – обсяг виробництва одиниці j-ї продукції;

d_j – можлива максимальна кількість j-ї продукції;

b_i – запаси сировини i-го вигляду;

a_{ij} – кількість одиниць i-ї сировини, що йде на виготовлення одиниці j-ї продукції;

c_j – прибуток, одержаний при реалізації одиниці j-ї продукції.

4. *Лінійна модель оптимального розкроювання*.

Знайти план розкроювання, при якому забезпечується мінімум відходів сировини:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \to min$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{m} t_{ij} x_j = t_i,$$
$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij} x_j = d_i,$$
$$x_i \ge 0,\ i = 1,2,...,m,\ \ j = 1,2,...,n,$$

де n – кількість видів заготовок;

m – кількість заготовок за j-м способом розкроювання;

d_{ij} – вихід заготовок i-го вигляду за j-м способом розкроювання;

r_j – обсяг відходів за j-м способом розкроювання;

t_j – витрати часу на розкроювання одного листа матеріалу за j-м способом розкроювання;

x_j – кількість листів матеріалу, які необхідно розкроїти за j-м способом розкроювання.

5. *Модель оптимальної суміші:*

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to min$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i,\ i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,n,$$

де x_j – кількість кожного компонента в суміші;

a_{ij} – норма вмісту i-го елемента в одиниці j-го компонента;

b_i – необхідна кількість i-го елемента в одиниці j-ї суміші;

c_j – вартість одиниці кожного компонента в суміші.

Модель використовується для розв'язання задач оптимального складу пряжі, сплавів і т.д.

6. *Модель оптимізації використання кормів.*

Розраховується на основі моделі оптимізації сумішей

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to min$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \text{ , } i = 1,2,...,m, \; j = 1,2,...,n,$$

де m – кількість елементів харчування в j-му кормі;

n – кількість кормів, що використовуються в раціоні;

x_j – кількість одиниць корму j-го вигляду;

b_i – необхідна кількість i-ї харчувальної речовини в раціоні, який складають ($i = 1, 2,..., m$);

a_{ij} $(i = 1, 2,..., m; j = 1,2,...,n)$ – кількість одиниць i-ї харчувальної речовини, що міститься в одиниці j-го корму;

c_j – вартість одиниці j-го корму.

7. *Модель однотоварної транспортної задачі:*

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \, , i = 1,2,..., m; \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \, , j = 1,2,..., n; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \; i = 1,2,...,m, \; j = 1,2,...,n,$$

де m – кількість постачальників $A_1, A_2,..., A_m$;

n – кількість споживачів $B_1, B_2,..., B_n$;

a_i – кількість одиниць вантажу, який має i-й постачальник;

b_j – кількість одиниць вантажу, замовленого j-м споживачем;

c_{ij} – вартість перевезення одиниці вантажу від i-го постачальника до j-го споживача.

Розглянемо приклади побудови економіко-математичних моделей найпростіших економічних задач.

Задача про закріплення літаків за повітряними лініями. Необхідно m типів літаків розподілити між n авіалініями. Місячний обсяг перевезень кожним літаком i-го типу на j-й авіалінії дорівнює a_{ij}, а відповідні експлуатаційні витрати становлять b_{ij}.

Визначити кількість літаків i-го типу x_{ij}, які планується закріпити за j-ю авіалінією для забезпечення перевезення одиниць вантажу a_j ($i = 1,2,…,m$;

$j = 1, 2,..., n$) при мінімальних сумарних експлуатаційних витратах, якщо відомо, що є N_i літаків i-го типу ($i = 1, 2,..., m$).

Оскільки обсяг перевезень на j-й авіалінії становить $a_{1j}x_{1j}$ +...+ $a_{nj}x_{nj}$ ($j = 1, 2,..., n$), а сумарні витрати становлять $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ij}x_{ij}$, задача полягає в мінімізації цільової функції $F = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ij}x_{ij}$ при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{1j}x_{1j} + a_{2j}x_{2j} + \cdots + a_{mj}x_{mj} \geq a_j (j = 1, 2,...,n), \\ x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} = N_i (i = 1, 2,...,m), \\ x_{ij} \geq 0 \ (i = 1, 2,...,n; \ j = 1, 2,...,n). \end{cases}$$

Задача розподілу ресурсів (планування виробництва). Для виготовлення n видів продукції P_j ($j = 1, 2,..., n$) використовують m видів сировини S_i $(i = 1, 2,..., m)$ у кількості b_i $(i = 1, 2,..., m)$. Відомо, що a_{ij} – кількість одиниць i-ї сировини, що йде на виготовлення одиниці j-ї продукції; c_j – прибуток, одержаний від реалізації одиниці j-ї продукції. Усі дані зведено в табл. 1.1.

Необхідно скласти план виробництва продукції, при якому прибуток від її реалізації буде максимальним.

Таблиця 1.1

Вид сировини	Запас сировини	Кількість одиниць сировини a_{ij}, витраченої на виготовлення одиниці продукції P_j			
		P_1	P_2	...	P_n
S_1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
S_2	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...
S_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}
Прибуток від реалізації одиниці продукції, грош. од.		c_1	c_2	...	c_n

Нехай x_j ($j = 1, 2,..., n$) – кількість одиниць j-ї продукції, запланованої до випуску. Тоді економіко-математична модель задачі має такий вигляд: знайти план випуску продукції $X = (x_1, x_2,..., x_n)$, що задовольняє системі нерівностей

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

та відповідає умові невід'ємності $x_j \geq 0$ ($j = 1, 2,\dots, n$) і при якому цільова функція

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

набуває максимального значення.

Модель задачі отримано в стандартній формі.

Задача про використання потужностей (завантаження устаткування). Для підприємства задано план виробництва продукції за часом і номенклатурою. Необхідно випустити $n_1, n_2,\dots,n_k$ одиниць продукції $P_1, P_2,\dots,P_к$. Продукцію виготовляють на верстатах $S_1, S_2,\dots,S_m$. Для кожного верстата є відомими продуктивність a_{ij} (тобто кількість одиниць продукції P_j, виготовленої на верстаті S_i) і витрати b_{ij} на виготовлення продукції P_j на верстаті S_i в одиницю часу.

Необхідно скласти такий план роботи верстатів, щоб витрати на виробництво всієї продукції були мінімальними.

Побудуємо економіко-математичну модель задачі. Позначимо через x_{ij} час, протягом якого на верстаті S_i виготовлятиметься продукція P_j ($i = 1,2,\dots,m$; $j = 1,2,\dots,k$).

Оскільки час роботи кожного верстата обмежений і не перебільшує T, нерівності системи мають вигляд

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1k} \leq T, \\ x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2k} \leq T, \\ \qquad \cdots \\ x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mk} \leq T. \end{cases} \tag{1.2}$$

Для виконання плану випуску необхідно задати такі рівняння:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + \cdots + a_{m1}x_{m1} = n_1, \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + \cdots + a_{m2}x_{m2} = n_2, \\ \qquad \cdots \\ a_{1k}x_{1k} + a_{2k}x_{2k} + \cdots + a_{mk}x_{mk} = n_k. \end{cases} \tag{1.3}$$

Крім того,

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,k). \tag{1.4}$$

Витрати на виробництво всієї продукції можна виразити функцією

$$F = b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12} + ... + b_{mk}x_{mk}. \tag{1.5}$$

Економіко-математична модель задачі: знайти розв'язок $X = (x_{11}, x_{12},...,x_{mk})$, який задовольняє системам (1.2), (1.3) і умові (1.4), при якій функція (1.5) набуває мінімального значення.

Якщо фінанси, устаткування, сировину й навіть людей уважати ресурсами, то значну кількість задач в економіці можна розглядати як задачі на розподілення ресурсів.

Приклад 1.1. Визначити, у якій кількості треба випускати продукцію різних типів P_1, P_2, P_3, P_4, причому для її виготовлення потрібні ресурси трьох видів: трудові, сировинні, фінансові. Норми витрат, наявність ресурсу, а також прибуток від реалізації одиниці кожного типу продукції наведено в табл. 1.2.

Необхідно скласти такий план випуску продукції, щоб при її реалізації отримати максимальний прибуток.

Таблиця 1.2

Види ресурсів	Наявність ресурсу	Кількість ресурсу на одиницю продукції			
		P_1	P_2	...	P_n
Трудові	16	1	1	1	1
Сировинні	110	6	5	4	3
Фінансові	100	4	6	10	13
Прибуток від реалізації одиниці продукції, грош. од.		60	70	120	130

Побудуємо економіко-математичну модель задачі.

1. Змістовна постановка задачі. На виробництво кожного виду продукції потребується певна кількість ресурсів, що є обмеженими. Ресурси необхідно розподілити між видами продукції оптимально, щоб отримати максимальний прибуток від продажу готової продукції.

2.Формалізація задачі. При випуску n видів продукції P_j $(j = 1, 2,...,n)$ використовуються m видів ресурсів S_i $(i = 1, 2,..., m)$. Позначимо через c_j прибуток від реалізації одиниці j-ї продукції.

Нехай x_j – кількість одиниць j-ї продукції, яку необхідно виготовити. Для цього буде потрібно $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 +...+ a_{in}x_n$ одиниць i-ї сировини, де a_{ij} – кількість одиниць i-го ресурсу, що витрачається на виготовлення одиниці j-ї продукції.

Оскільки обсяг витрат ресурсів не повинен перебільшувати їх запасів b_i (i = 1, 2,...,m), зв'язок між витратами ресурсів і їх запасами можна виразити системою нерівностей $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 +...+ a_{in}x_n \le b_i$ (i = 1, 2,...,m).

Прибуток від реалізації j-ї продукції становитиме c_jx_j. Тоді задачу буде зведено до визначення значень x_j, що забезпечують максимум функції

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

при дотриманні таких умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases}$$

3. Визначення типу й принципу розв'язання задачі. Оптимальне розподілення ресурсів знаходять, розв'язавши задачу на максимум прибутку.

Використовуючи симплексний метод, необхідно підібрати такі значення кількості продукції, що випускається, при яких виконуються задані умови обмежень і забезпечується максимальне значення функції прибутку *Z.*

4. Визначення обмежень системи, що оптимізується. Система має такі обмеження:

- додатність розв'язку, тобто продукцію виготовляють чи ні;
- кількість видів продукції $j = 1, 2,..., n;$
- кількість ресурсів $i = 1, 2,..., m.$

5. *Визначення кількісних критеріїв.* Уведемо змінні величини:

x_1 – кількість одиниць продукції P_1;

x_2 – кількість одиниць продукції P_2;

x_3 – кількість одиниць продукції P_3;

x_4 – кількість одиниць продукції P_4.

Тоді маємо систему обмежень

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 16, \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 110, \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \le 100, \end{cases} \tag{1.6}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,$$

яка показує, що кількість ресурсів, що витрачаються на виготовлення продукції, не може бути більшою від кількості їх запасів.

Визначимо прибуток від реалізації всіх видів продукції, який складається із прибутків від реалізації кожної продукції:

$$Z = 60\ x_1 + 70\ x_2 + 120\ x_3 + 130\ x_4. \tag{1.7}$$

Отже, сформуємо таку економіко-математичну модель задачі: знайти такі значення x_1, x_2, x_3, x_4, які відповідають умовам (1.6) і забезпечують максимум цільової функції (1.7).

Приклад 1.2. Літаки трьох типів розподілити між чотирма авіалініями так, щоб при мінімальних сумарних експлуатаційних витратах перевезти на кожній із чотирьох авіаліній не менше 300, 200, 1000 і 500 одиниць вантажу. У табл. 1.3 наведено кількість літаків кожного типу, місячний обсяг перевезень кожним літаком на кожній авіалінії та відповідні експлуатаційні витрати.

Таблиця 1.3

Тип літаків	Кількість літаків	Місячний обсяг перевезень одним літаком по авіалініях				Експлуатаційні витрати на один літак по авіалініях, грош. од.			
		1	2	3	4	1	2	3	4
1	50	15	10	20	50	15	20	25	40
2	20	20	25	10	10	70	28	15	45
3	30	35	50	30	45	40	70	40	65

Побудуємо економіко-математичну модель задачі.

1. Змістовна постановка задачі. Кожен літак може перевезти за місяць певну кількість вантажу, що є обмеженою. Літаки необхідно розподілити між авіалініями, щоб при мінімальних сумарних експлуатаційних витратах перевезти задану кількість вантажу.

2.Формалізація задачі. Нехай x_{ij} – кількість літаків i-го типу (i = 1, 2, 3), що планується закріпити за j-ю (j = 1, 2, 3, 4) авіалінією. Тоді мінімальні сумарні експлуатаційні витрати виразимо функцією

$$Z = 15x_{11} + 20x_{12} + 25x_{13} + 40x_{14} + 70x_{21} + 28x_{22} + 15x_{23} + 45x_{24} + \\ + 40x_{31} + 70x_{32} + 40x_{33} + 65x_{34} \to min.$$

Обмеження за кількістю вантажу, що перевозиться кожною з авіакомпаній, мають вигляд

$$\begin{cases} 15x_{11} + 20x_{21} + 35x_{31} \geq 300, \\ 10x_{12} + 25x_{22} + 50x_{32} \geq 200, \\ 20x_{13} + 10x_{22} + 30x_{33} \geq 1000, \\ 50x_{14} + 10x_{24} + 45x_{34} \geq 500. \end{cases}$$

Обмеження за кількістю літаків на кожній авіалінії подамо як систему рівнянь

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 50, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 20, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 30, \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3, 4.$$

3. Визначення типу й принципу розв'язання задачі. Оптимальне розподілення літаків знаходять, розв'язавши задачу на мінімум сумарних експлуатаційних витрат. Використовуючи симплексний метод, необхідно підібрати такі значення кількості літаків, при яких виконуються задані умови обмежень і забезпечується мінімальне значення функції витрат *Z.*

4. Визначення обмежень системи, що оптимізується. Система має такі обмеження:

- додатність розв'язку, тобто літаки використовуються авіалініями чи ні;

- кількість літаків i-го типу (i = 1, 2, 3), що планується закріпити за j-ю (j = 1, 2, 3, 4) авіалінією.

5. Визначення кількісних критеріїв. Уведемо змінні величини:

x_{i1} – кількість літаків i-го типу (i = 1, 2, 3), що планується закріпити за першою авіалінією;

x_{i2} – кількість літаків i-го типу (i = 1, 2, 3), що планується закріпити за другою авіалінією;

x_{i3} – кількість літаків i-го типу (i = 1, 2, 3), що планується закріпити за третьою авіалінією;

x_{i4} – кількість літаків *i*-го типу (i = 1, 2, 3), що планується закріпити за четвертою авіалінією.

Задачу отримано в загальній формі. Щоб звести її до канонічної форми, потрібно від кожного з перших чотирьох обмежень-нерівностей відняти по одній додатній змінній x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44}.

Приклад 1.3. Виходячи з наявних ресурсів фермер може використовувати для годування худоби не більше 50 кг сіна й не більше 85 кг силосу на добу. При цьому раціон повинен мати певну поживність: кількість кормових одиниць – не менше 30, уміст білків – не менше 1 кг, кальцію – не менше 100 г, фосфору – не менше 80 г.

Дані про вміст харчувальних речовин на 1 кг кожного продукту й собівартість продуктів наведено в табл. 1.4.

Таблиця 1.4

Поживні речовини	Мінімальна норма, г/кг	Кількість одиниць поживних речовин на 1 кг корму	
		Сіно	Силос
Білки	1000	40	10
Кальцій	100	1,25	2,5
Фосфор	80	2	1
Поживна цінність корму у всьому раціоні		0,5	0,5
Вартість 1 кг корму, грош. од.		1,2	0,8

Побудуємо економіко-математичну модель задачі.

Необхідно визначити оптимальну кількість сіна й силосу в раціоні тварин з урахуванням мінімуму собівартості кормів.

1. Змістовна постановка задачі. Кожній тварині залежно від її виду, віку, маси й продуктивності необхідна певна кількість поживних речовин, а також найважливіших елементів харчування. Нестача в раціоні якої-небудь поживної речовини негативно впливає на продуктивність худоби. Якщо тварин не обмежують у кормах, то нестача окремих елементів харчування покривається більшою кількістю кормів, унаслідок чого матиме місце перевитрата кормів на одиницю продукції.

Необхідно з кормів, що є в господарстві, скласти раціон, при якому буде забезпечено повноцінне харчування тварин при мінімальній собівартості кормів.

2. Формалізація задачі. У господарстві є n видів кормів собівартістю c_j у кількості d_j ($j = 1, 2,..., n$). Позначимо оптимальний уміст j-го корму в суміші через x_j. Тоді загальна вартість j-го корму в раціоні тварини становитиме $c_j x_j$, і задача зводиться до визначення значень x_j, що забезпечують мінімум функції

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to min$$

при дотриманні умов повноцінності харчування.

Сформулюємо умову повноцінності харчування.

Позначимо: b_i $(i = 1, 2,...,m)$ – необхідна кількість i-го елемента в повному раціоні, a_{ij} – фактична кількість i-го елемента в одиниці j-го корму. Тоді умову повноцінності харчування можна записати так:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \ .$$

3. Визначення типу й принципу розв'язання задачі. Раціон розраховують на основі моделі оптимальної суміші. Використовуючи симплексний метод, необхідно підібрати такі значення витрати кормів, при яких виконуються задані обмеження й забезпечується мінімальне значення функції собівартості *Z.*

4. Визначення обмежень системи, що оптимізується. Система, що оптимізується, має такі обмеження:

- додатність розв'язку, тобто тварини можуть їсти якийсь корм або ні;
- кількість витрачених кормів не повинна бути більше ліміту, тобто $0 \leq x_j \leq d_j$;
- кількість видів кормів $j = 1, 2,..., n$;
- кількість елементів харчування, що регламентуються, $i = 1, 2,...,m$.

5. Визначення кількісних критеріїв. Уведемо змінні величини:

x_1 – кількість сіна в добовому раціоні;

x_2 – кількість силосу в добовому раціоні.

З табл. 1.4 видно, що поживність 1 кг сіна становить 0,5 од., отже, поживна цінність усього сіна в добовому раціоні – $0{,}5x_1$, аналогічно поживність силосу в добовому раціоні – $0{,}5x_2$. З умови задачі випливає, що сумарна цінність кормів повинна бути не менше 30 од., тобто маємо нерівність

$$0{,}5\, x_1 + 0{,}5\, x_2 \geq 30.$$

Аналогічно запишемо нерівності для білка, кальцію та фосфору:

$$40\, x_1 + 10\, x_2 \geq 1000;$$
$$1{,}25\, x_1 + 2{,}5\, x_2 \geq 100;$$
$$2x_1 + x_2 \geq 80.$$

У задачі ресурси кормів обмежені: витрата сіна не повинна бути більше 50 кг, а силосу – не більше 85 кг, тобто

$$x_1 \leq 50,\ x_2 \leq 85.$$

Визначимо вартість добового раціону, що є сумою вартостей сіна й силосу в добовому раціоні:

$$Z = 1{,}2\, x_1 + 0{,}8\, x_2.$$

Отже, сформулюємо таку економіко-математичну модель задачі: знайти такі значення x_1 і x_2, які відповідають умовам

$$\begin{cases} x_1 \le 50; \\ x_2 \le 85; \\ 0{,}5\,x_1 + 0{,}5\,x_2 \ge 30; \\ 40\,x_1 + 10\,x_2 \ge 1000; \\ 1{,}25\,x_1 + 2{,}5\,x_2 \ge 100; \\ 2\,x_1 + x_2 \ge 80, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

і забезпечують мінімум цільової функції

$$Z = 1{,}2\,x_1 + 0{,}8\,x_2.$$

Приклад 1.4. Для виготовлення двох видів продукції P_1, P_2 використовують чотири види сировини S_1, S_2, S_3, S_4. Запаси сировини, кількість одиниць сировини, що йде на виготовлення одиниці продукції, прибуток від реалізації одиниці продукції наведено в табл. 1.5.

Необхідно скласти такий план випуску продукції, щоб при її реалізації отримати максимальний прибуток.

Таблиця 1.5

Вид сировини	Запас сировини	Кількість одиниць сировини, що йде на виробництво однієї одиниці продукції	
		P_1	P_2
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5	-	1
S_4	21	3	-
Прибуток від одиниці продукції, грн		2	3

Побудуємо економіко-математичну модель задачі.

Позначивши через x_1 кількість одиниць продукції P_1, через x_2 – кількість одиниць продукції P_2, одержуємо систему обмежень

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ x_2 \le 5, \\ 3x_1 \le 21, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Система показує, що кількість сировини, що витрачається на виготовлення продукції, не може бути більше кількості її запасів. Якщо продукцію P_1 не випущено, то $x_1 = 0$, якщо навпаки, то $x_1 > 0$. Аналогічно для P_2. Отже, на величини x_1 і x_2 має бути накладено обмеження невід'ємності: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Кінцеву мету задачі (отримання максимального прибутку, грн, від реалізації продукції) виразимо як функцію двох змінних x_1 і x_2:

$$Z = 2x_1 + 3x_2.$$

Задачу отримано в стандартній формі. Щоб звести її до канонічної форми, необхідно в кожне обмеження-нерівність додати по одній додатній змінній x_3, x_4, x_5, x_6:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16, \\ x_2 + x_5 = 5, \\ 3x_1 + x_6 = 21, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,...,6.$$

1.3. Оптимізація моделі за допомогою Excel

Розв’язання оптимізаційних задач в Excel дає можливість оперативно вивчати, як змінення незалежних змінних впливає на цільову функцію, і групувати в одному документі декілька можливих розв’язків.

Процедура пошуку розв’язку полягає в знаходженні оптимального значення функції, заданої в цільовій комірці. Оптимальний розв’язок визначається шляхом оброблення формул і значень, що містяться в інших комірках, прямо або побічно зв'язаних з формулою в цільовій комірці. Для отримання заданого результату в цільовій комірці процедура пошуку розв’язку змінює значення в комірках, що впливають. Щоб звузити множину значень у моделі, застосовують обмеження.

Команда *Пошук розв’язку* дає можливість розрахувати значення в комірках, що впливають, які забезпечують екстремальне значення в залежній комірці. У процедурі *Пошук розв’язку* використовуються алгоритми нелінійної оптимізації, симплексного методу й методу розв’язання лінійних і цілочислових задач з обмеженнями.

Щоб відкрити діалогове вікно *Пошук розв’язку,* необхідно виконати команду *Сервіс / Пошук розв’язку* (рис. 1.1).

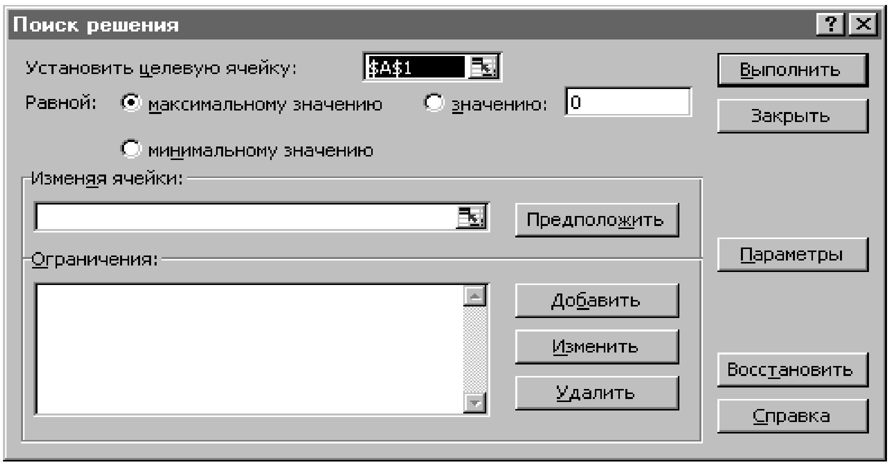


Рис. 1.1

Вікна *Додавання обмеження* і *Змінення обмеження* – це одне й те саме вікно, назва якого змінюється залежно від ситуації (рис. 1.2).

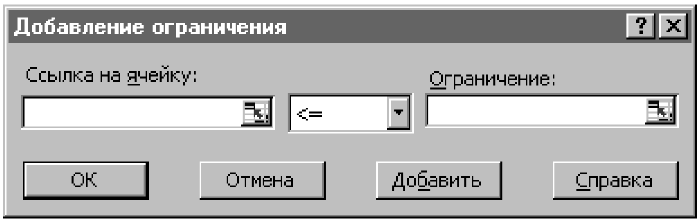


Рис. 1.2

Клацання по кнопці *Параметри* в діалоговому вікні *Пошук розв'язку* виводить на екран діалогове вікно *Параметри пошуку розв'язку* (рис. 1.3), у якому можна змінювати умови й варіанти пошуку розв'язку для лінійних і нелінійних задач, а також завантажувати й зберігати моделі, що оптимізуються.

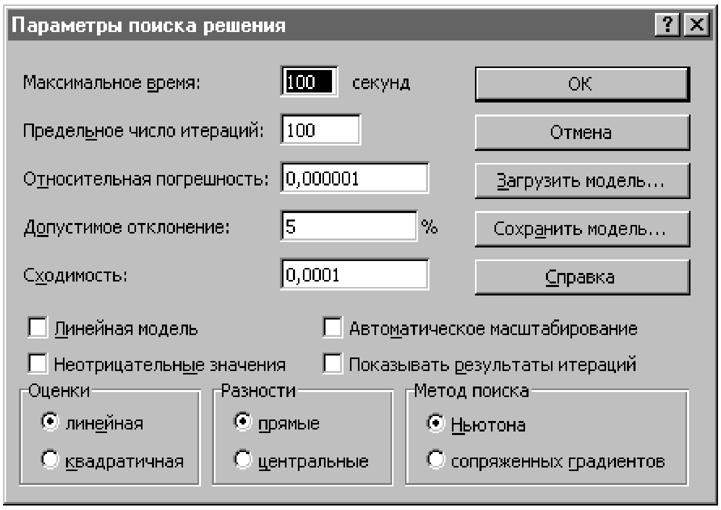


Рис. 1.3

Діалогове вікно *Результати пошуку розв'язку* (рис. 1.4) призначено для виведення на екран знайденого розв'язку й підсумкового повідомлення. Це ж вікно відкривається й після завершення роботи команди *Пошук розв'язку.*

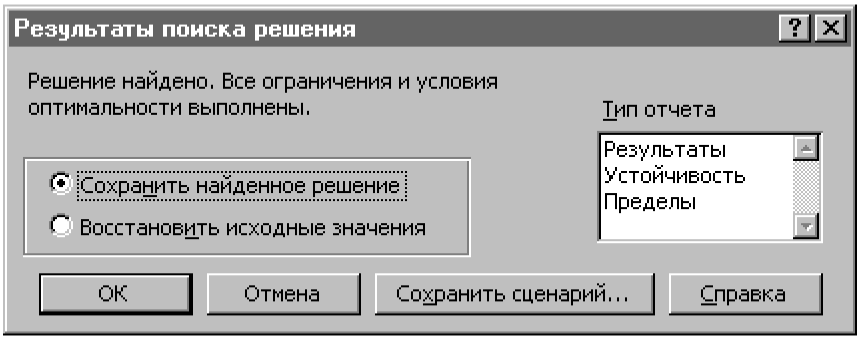


Рис. 1.4

У лівому верхньому кутку діалогового вікна можна прочитати такі повідомлення:

1. Розв'язок знайдено. Усі обмеження й умови оптимальності виконано. Значення в цільовій комірці знайдено з необхідною точністю.

2. Пошук звівся до поточного розв'язку. Усі обмеження виконано. Обчислення припинено за параметром *Збіжність.* Для пошуку більш точного розв'язку потрібно зменшити значення збіжності.

3. Пошук не може поліпшити поточного розв'язку. Усі обмеження виконано. Знайдено приблизний розв'язок і знайти кращий неможливо, оскільки подальше уточнення є неможливим або задано дуже високу похибку. Можна зменшити похибку й повторити процедуру пошуку.

4. Пошук зупинено (закінчився заданий на пошук час). Час на розв'язання задачі, заданий у вікні *Параметри,* вичерпано.

5. Пошук зупинено (досягнуто максимальну кількість ітерацій). Кількість ітерацій, заданих у вікні *Параметри,* є максимальною.

6. Значення в цільовій комірці не збігаються. Значення в цільовій комірці необмежено збільшується або зменшується, навіть якщо всі обмеження дотримано. Для знаходження розв'язку, можливо, слід зняти деякі обмеження.

7. Пошук не може знайти відповідного розв'язку. Немає розв'язку, який задовольняє всім обмеженням при заданій точності, через суперечливість заданих обмежень або помилки у формулах.

8. Пошук зупинено на вимогу користувача. Користувач натиснув кнопку *Стоп* у діалоговому вікні *Поточний стан пошуку розв'язку.*

9. Умови для лінійної моделі не задовольняються. Визначено параметр *Лінійна модель,* тоді як розв'язувана задача є нелінійною.

10. При пошуку розв'язку знайдено помилкове значення в цільовій комірці або в комірці обмежень. В одній із комірок задано недопустиме значення або тип обмеження, неправильно введено ім'я або формулу.

11. Недостатньо пам'яті для розв'язання задачі.

12. Інший екземпляр Excel використовує solver.dll. Запущено декілька копій Excel, в одному з яких використовується файл Solver.dll (інструмент *Пошук розв'язку* вже використовується).

1.4. Графічний метод розв'язання задач лінійного програмування з двома змінними

Для розв'язання ЗЛП з двома змінними застосовують графічний метод. Розглянемо задачу: знайти максимальне (або мінімальне) значення функції

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ \qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases} \tag{1.8}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \tag{1.9}$$

Кожна нерівність системи обмежень (1.8) на площині $x_1 0 x_2$ геометрично визначає півплощину, обмежену прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ (i = 1, 2,...,m), а умови невід'ємності (1.9) – півплощину, обмежену прямими $x_1 = 0$ і $x_2 = 0$. Якщо система нерівностей є сумісною, то півплощини як опуклі множини, перетинаючись, утворюють область допустимих розв'язків задачі (ОДР) – *багатокутник розв'язків*. Оптимальний розв'язок ЗЛП розташовується, принаймні, в одній із кутових точок багатокутника розв'язків.

Алгоритм графічного методу розв'язання *ЗЛП із двома змінними:*

1. Визначити багатокутник розв'язків – ОДР. Для цього побудувати графіки прямих $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ (i = 1, 2,.., m), $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, рівняння яких одержують шляхом заміни в обмеженнях (1.8), (1.9) знаків нерівності на знаки рівності, і позначити півплощини, що відповідають кожному обмеженню. ОДР визначають як перетин півплощин кожного із заданих обмежень.

Якщо ОДР – порожня множина, то задача не має розв'язку, оскільки система обмежень не є спільною.

2. Якщо ОДР – непорожня множина, то з початку координат побудувати вектор-нормаль N для ліній рівня прямої $C_1x_1 + C_2x_2 = const$, напрямлений до точки з координатами (C_1;C_2) і який задає напрям збільшення значень цільової функції.

3. Побудувати пряму $C_1x_1 + C_2x_2 = 0$, так звану лінію рівня, яка є перпендикулярною до вектора N і проходить, наприклад, через початок координат.

4. У задачі на максимум лінію рівня $C_1x_1 + C_2x_2 = 0$ перемістити в напрямку вектора-нормалі N (у задачі на мінімум – у протилежному до напрямку вектора N) до крайньої вершини ОДР, де цільова функція набуває оптимального значення, а лінія рівня стає опорною прямою. Цю кутову точку позначимо через X*. Її координати є оптимальним розв'язком.

Нехай ОДР – необмежений багатокутник. Якщо лінія рівня, переміщаючись у потрібному напрямку, постійно перетинає ОДР і ні в якій точці не є опорною до неї, то ЗЛП не має розв'язку, оскільки цільова функція є необмеженою.

5. Якщо задача має оптимальний розв'язок X*, то для його знаходження слід знайти координати точки X*. Для цього потрібно розв'язати систему рівнянь, що складається з рівнянь двох прямих, на перетині яких знаходиться точка X*. Якщо цільова функція набуває екстремуму в двох кутових точках, то оптимальним розв'язком буде опукла лінійна комбінація цих точок.

6. Після знаходження оптимального розв'язку X* обчислити значення цільової функції, підставивши в цільову функцію Z координати точки X*.

Приклад 1.5. Знайти максимальне значення функції $Z = 2x_1 + 3x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ x_2 \le 5, \\ 3x_1 \le 21, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Економіко-математичну модель задачі побудовано в прикладі 1.4.

Розв'язання. Побудуємо багатокутник розв'язків. Для цього в системі координат $x_1 0 x_2$ на площині зобразимо межові прямі, отримані з обмежень-нерівностей шляхом заміни знака нерівності на знак рівності.

Позначимо рівняння прямих через L_1, L_2, L_3, L_4:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18 \ (L_1), \\ 2x_1 + x_2 = 16 \ (L_2), \\ x_2 = 5 \ (L_3), \\ 3x_1 = 21 \ (L_4), \end{cases}$$

$$x_1 = 0, x_2 = 0.$$

Установимо, яку півплощину визначає кожна нерівність відносно своєї межової прямої, і виділимо загальний перетин цих півплощин, який визначить ОДР – багатокутник розв'язків задачі, тобто обмежений шестикутник OABCDE (рис. 1.5).

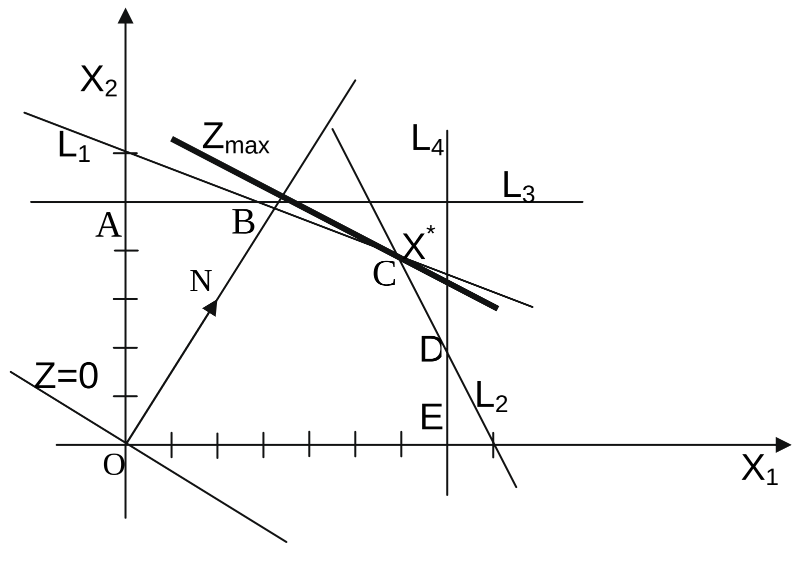


Рис. 1.5

Для побудови лінії рівня $Z = 2x_1 + 3x_2 = 0$ з початку координат будуємо вектор-нормаль N, напрямлений до точки (2; 3), і через точку 0 проводимо пряму перпендикулярно до вектора. Ця пряма є лінією рівня. Побудовану пряму $Z = 0$ переміщаємо паралельно самій собі й перпендикулярно до вектора-нормалі N по його напрямку доти, доки лінія рівня не стане опорною прямою, тобто дотичною до ОДР тільки в одній кутовій точці. Із рис. 1.5 випливає, що пряма $Z = 0$ у точці С є опорною відносно багатокутника розв'язків, де функція Z набуває максимального значення. Ця точка є розв'язком ЗЛП X^* і лежить на перетині прямих L_1 і L_2. Для визначення її координат розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18, \\ 2x_1 + x_2 = 16. \end{cases}$

Оптимальний план задачі: $x_1 = 6$, $x_2 = 4$, тобто $X^* = (6; 4)$. Підставимо значення x_1 і x_2 у функцію Z:

$$Z_{max} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 24.$$

Приклад 1.6. Знайти мінімальне значення функції $L = 4x_1 + 6x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. Побудуємо багатокутник розв'язків (рис. 1.6). Для цього в системі координат $x_1 0 x_2$ на площині зобразимо межові прямі L_1, L_2, L_3:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9 \ (L_1), \\ x_1 + 2x_2 = 8 \ (L_2), \\ x_1 + 6x_2 = 12 \ (L_3), \end{cases}$$

$$x_1 = 0, x_2 = 0.$$

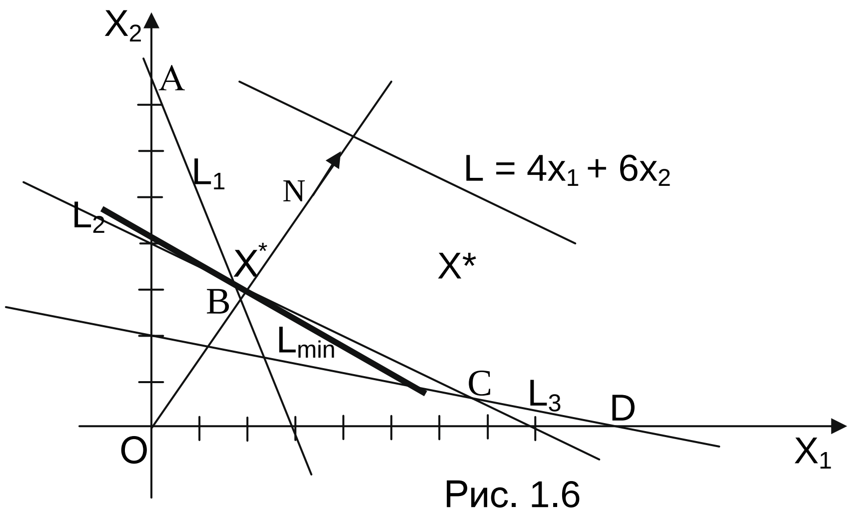


Рис. 1.6

Установивши, яку півплощину визначає кожна нерівність відносно своєї межової прямої, і виділивши загальний перетин цих півплощин, маємо ОДР – необмежену багатокутну область з кутовими точками A, B, З, D.

Побудуємо вектор-нормаль N, напрямлений до точки (4; 6), і пряму $L = 4x_1 + 6x_2 = const$. Переміщаємо пряму L паралельно самій собі й перпендикулярно до вектора-нормалі N у напрямку, протилежному до його напрямку, до крайньої кутової вершини ОДР. Із рис. 1.6 видно, що пряма L досягне багатокутника розв'язків і стане опорною до нього в кутовій точці

В, яка є точкою X^*, що лежить на перетині прямих L_1 і L_2. Для визначення координат точки X^* розв’яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9, \\ x_1 + 2x_2 = 8. \end{cases}$$

Маємо $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, тобто $X^* = (2; 3)$. Підставляючи знайдені значення в цільову функцію, одержуємо $L_{min} = 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 26$.

1.5. Симплексний метод розв’язання задач лінійного програмування

Для знаходження оптимального плану ЗЛП необхідно досліджувати тільки опорні плани. Схема, що дає можливість здійснювати впорядкований перехід від одного опорного плану до іншого, є основою *симплексного методу* розв’язання ЗЛП.

Геометричне значення симплексного методу полягає в послідовному переході від однієї вершини багатокутника розв’язків, яка має назву первинної, до сусідньої, у якій цільова функція набуває кращого (принаймні, не гіршого) значення щодо мети задачі, доти, доки не буде знайдено оптимальний розв’язок – координати вершини, у якій цільова функція набуває оптимального значення.

Для реалізації симплексного методу необхідно освоїти основні елементи:

- спосіб визначення якого-небудь первинного опорного плану задачі;
- правило переходу від одного опорного плану до іншого, де значення цільової функції є найближчим до оптимального;
- критерій перевірки оптимальності знайденого плану, що дає можливість своєчасно припинити перебір розв’язків на оптимальному розв’язку або зробити висновок про те, що оптимального розв’язку не існує.

Алгоритм розв’язання ЗЛП симплексним методом

Розглянемо знаходження максимуму (або мінімуму) цільової функції

$$Z = C_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max\ (min)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i (i = 1, 2, ..., m),$$

де

$$x_j \ge 0\ (j = 1, 2, ..., n),\ b_i \ge 0\ (i = 1, 2, …, m;\ m \le n).$$

1. *Звести ЗЛП до канонічного вигляду* шляхом уведення в кожне обмеження-нерівність додаткових змінних. Якщо є обмеження з від’ємною правою частиною, то його необхідно помножити на -1. Зазначимо, що така операція змінює знак нерівності на протилежний.

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots\ + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \ldots\ + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\
\qquad\qquad \cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \ldots\ + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m.
\end{cases}
\tag{1.10}
$$

Цільову функцію запишемо як різницю

$$Z - C_1x_1 - C_2x_2 - \ldots - C_nx_n - 0x_{n+1} - \ldots - 0x_{n+m} = C_0, \tag{1.11}$$

причому $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, x_{m+1} \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0, b_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m$.

Система рівнянь (1.10) і цільова функція (1.11) є розширеною системою.

2. *Знайти первинний опорний план з базисом із m одиничних векторів,* тобто звести систему обмежень до вигляду, у якому які-небудь m змінних виразимо через інші, причому вільні члени цих виразів мають бути невід'ємними.

Керуємося такими міркуваннями: лінійно незалежні одиничні вектори n-вимірного простору A_i ($1 \leq i \leq m \leq n$) утворюють базис цього простору. Змінні x_i, що стоять при цих векторах, називають *базисними*, інші – *вільними*.

Можливими є такі випадки:

а) ЗЛП задано у вигляді $AX \leq B$ при $B \geq 0$ або її можна звести до такого вигляду; після переходу до канонічного вигляду система обмежень завжди містить m одиничних векторів;

б) ЗЛП задано в довільному вигляді, і вона явно містить m одиничних векторів;

в) ЗЛП задано в довільному вигляді, і вона явно не містить m одиничних векторів; використовуючи метод Жордана – Гаусса, зводимо ЗЛП до рівносильної системи, розв'язаної відносно деякого базису, зберігаючи праві частини невід'ємними, або розв'язуємо ЗЛП методом штучного базису.

У цьому випадку задача містить m одиничних векторів при додаткових змінних, отже, змінні $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ – *базисні,* увесь набір ($x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$) – *базис,* решта змінних – *вільні*.

Якщо виразити базисні змінні через вільні, то одержимо з системи (1.10) *загальний розв'язок*

$$
\begin{cases}
x_{n+1} = b_1 - (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n), \\
x_{n+2} = b_2 - (a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n), \\
\qquad\qquad \cdots \\
x_{n+k} = b_k - (a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n), \\
\qquad\qquad \cdots \\
x_{n+m} = b_m - (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n).
\end{cases}
\tag{1.12}
$$

Виразимо цільову функцію Z через вільні змінні $x_1, \ldots, x_n$, підставляючи замість базисних змінних вільні (1.12):

$$Z - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n = C_0. \qquad (1.13)$$

Отриману систему заносимо в першу симплексну табл. 1.6.

Таблиця 1.6

Базис	Вільний член B	Змінні								Оцінні відношення
		x_1	…	x_k	…	x_n	x_{n+1}	…	x_{n+m}	
x_{n+1}	b_1	a_{11}	…	a_{1k}	…	a_{1n}	1	…	0	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
x_{n+i}	b_i	a_{i1}	…	a_{ik}	…	a_{in}	0	…	0	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
x_{n+m}	b_m	a_{m1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}	0	…	1	
Z	c_0	$-c_1$	…	$-c_k$	…	$-c_n$	0	…	0	

В останньому, *оцінному*, рядку табл. 1.6 наведено коефіцієнти цільової функції (1.13). Останній стовпець призначено для внесення оцінних відношень, необхідних при розрахунку найбільшого можливого значення змінних. У робочу частину таблиці занесено коефіцієнти a_{ij} при змінних з розширеної системи.

Оскільки всі величини x_i (i = 1, 2,...,n) мають бути невід'ємними, найменші можливі значення вільних змінних – це значення, що дорівнюють нулю. Покладемо всі вільні змінні такими, що дорівнюють нулю ($x_1 = 0,\ldots, x_n = 0$), і знайдемо з системи (1.12) значення базисних змінних:

$$x_{n+1} = b_1,\ x_{n+2} = b_2, \ldots,\ x_{n+m} = b_m.$$

Маємо *первинний опорний план* системи

$$X^*_1 = (0,\ldots, 0,\ b_1,\ b_2,\ldots,\ b_m).$$

Геометрично цей план відповідає первинній кутовій точці.

Підставивши в цільову функцію Z нульові значення вільних змінних $x_1 = 0,\ldots, x_n = 0$, одержимо $Z_1 = C_0$.

3. *Перевірити виконання критерію оптимальності.*

Критерій оптимальності розв'язку під час визначення мінімуму цільової функції: якщо цільова функція, виражена через вільні змінні (оцінний рядок), не містить додатних коефіцієнтів при вільних змінних, то розв'язок є оптимальним.

Критерій оптимальності розв'язку під час визначення максимуму цільової функції: якщо цільова функція, виражена через вільні змінні (оцінний рядок), не містить від'ємних коефіцієнтів при вільних змінних, то розв'язок є оптимальним.

Якщо критерій оптимальності виконується, то знайдений опорний план є оптимальним: цільова функція $Z = C_0$ набуває максимального або мінімального значення (у лівому нижньому кутку таблиці), базисні змінні набувають значення b_i (із другого стовпця), вільні змінні дорівнюють нулю.

4. *Якщо критерій оптимальності не виконується*, тобто серед коефіцієнтів $c_1,...,c_k,...,c_n$ в оцінному рядку є від'ємні (у задачі на максимум) або додатні (у задачі на мінімум), то, збільшуючи ті зі змінних $x_1,...,x_k,...,x_n$, коефіцієнти при яких є від'ємними (або додатними в задачі на мінімум), можна поліпшити розв'язок Z. Для цього в оцінному рядку вибирають змінну з найбільшим за модулем від'ємним (для максимуму) або найбільшим додатним (для мінімуму) коефіцієнтом, яка визначає *розв'язувальний стовпець.* Наприклад, це коефіцієнт c_k при x_k у k-му стовпці. Перейдемо від цього опорного розв'язку до іншого, де $x_к \neq 0$, а замість неї нулю дорівнює деяка базисна змінна. Геометрично це означає перехід до сусідньої вершини багатокутника, де значення цільової функції є ближчим до оптимального.

Для вибору базисної змінної, що переводиться у вільну, складаємо оцінні відношення для всіх рядків.

Оцінне відношення, що є межею збільшення змінної x_k, яка зберігає додатність базисної змінної у відповідному рядку, визначається таким чином:

1) ∞, якщо $a_{ik} \leq 0,\ i = 1,2,...,m;$

2) $\dfrac{b_i}{a_{ik}}$ – у решті випадків, i = 1,2,...,m.

Далі виберемо одну зі змінних $x_{n+1},...,x_{n+i},...,x_{n+m}$ у рядку, у якому відношення $\dfrac{b_i}{a_{ik}}$ є мінімальним. Якщо змінних кілька, то вибираємо будь-яку. Вибраний рядок є *розв'язувальним*.

Наприклад, виділяємо за допомогою стрілок розв'язувальні рядок і стовпець (див. табл. 1.6), на перетині яких знаходиться *розв'язувальний елемент* a_{ik}.

Примітка. Якщо при переході від одного опорного плану до іншого всі оцінні відношення дорівнюють ∞, то це означає, що цільова функція є необмеженою й оптимального розв'язку немає.

5. *Перехід від базису* $(x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+i-1}, x_{n+i}, x_{n+i+1}, ..., x_{n+m})$ *до нового базису* $(x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+i-1}, x_k, x_{n+i+1}, ..., x_{n+m})$ шляхом виключення зі старого базису змінної x_{n+i} і введення замість неї змінної $x_к$. Таким чином, переводимо вільну змінну $x_к$ у базисну.

Перехід до нової таблиці:

а) у лівому стовпці записуємо новий базис: усі базисні змінні переписуємо, окрім базисної змінної x_{n+i}, а на її місці записуємо змінну $x_к$;

б) якщо розв'язувальний елемент не дорівнює одиниці, то поділимо всі числа вибраного розв'язувального рядка на a_{ik} так, щоб на місці a_{ik} знаходилася одиниця; отриманий таким чином рядок записуємо в нову таблицю;

в) за допомогою методу Жордана – Гаусса виконуємо перерахунок нової таблиці, щоб розв'язувальний стовпець став одиничним; для цього до кожного з решти рядків таблиці поелементно додаємо знов отриманий рядок, помножений на число a_{ik} (i = 1, 2,...,k-1, k+1,...,m), з протилежним знаком так, щоб у всіх комірках розв'язувального $к$-го стовпця, окрім комірки (i,k), знаходився нуль, що відповідає виключенню x_{ik} з решти рівнянь системи.

Перетворені рядки записуємо на місці попередніх і одержуємо табл. 1.7, а також новий опорний розв'язок X^*_2.

Таблиця 1.7

Базис	Вільний член В	Змінні								Оцінне відношення
		x_1	…	x_k	…	x_n	x_{n+1}	…	x_{n+m}	
x_{n+1}	b'_1	a_{11}	…	0	…	a'_{1n}	1	…	0	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
x_k	b'_i	a_{i1}	…	1	…	a'_{in}	0	…	0	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
x_{n+m}	b'_m	a_{m1}	...	0	...	a'_{mn}	0	…	1	
Z	c'_0	$-c'_1$	...	0	...	$-c'_n$	0	…	0	

Далі переходимо до п. 3 алгоритму (але вже в новому базисі).

Увесь процес розв'язання задачі зводиться до послідовного складання симплексних таблиць доти, доки не буде отримано оптимальний розв'язок або визначено, що розв'язку немає. На цьому процес розв'язання задачі завершується.

Приклад 1.7. Знайти максимум цільової функції

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ x_2 \le 5, \\ 3x_1 \le 21, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

використовуючи симплексний метод.

Примітка. Цю задачу розв'язано графічним методом у підрозд. 1.4 (прикл. 1.5).

Розв'язання. Задачу задано в стандартній формі. Для зведення її до канонічної форми введемо в кожне обмеження-нерівність по одній додатній змінній x_3, x_4, x_5, x_6, а цільову функцію запишемо у вигляді різниці. Тоді розширена система набуде вигляду

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16, \\ x_2 + x_5 = 5, \\ 3x_1 + x_6 = 21, \end{cases}$$

$$Z - 2x_1 - 3x_2 - 0x_3 - 0x_4 - 0x_5 - 0x_6 = 0,$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0.$$

Цим даним відповідає табл. 1.8, у якій змінні x_3, x_4, x_5, x_6 – базисні. Останній рядок заповнюємо коефіцієнтами цільової функції з протилежним знаком.

Виписуємо з табл. 1.8 первинний опорний план: вільні змінні x_1, x_2 дорівнюють нулю, значення базисних змінних x_3, x_4, x_5, x_6 вибираємо із стовпця вільних членів. З цього ж стовпця виписуємо значення функції Z:

$$X^*_1 = (0; 0; 18; 16; 5; 21),\ Z_1 = 0.$$

Таблиця 1.8

Базис	Вільний член B	Змінні						Оцінне відношення
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	18	1	3	1	0	0	0	18/3
x_4	16	2	1	0	1	0	0	16/1
~~x_5~~	~~5~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~5/1~~
x_6	21	3	0	0	0	0	1	∞
Z	0	-2	-3	0	0	0	0	

Відповідно до п. 3 алгоритму перевіряємо критерій оптимальності. В останньому рядку маємо від'ємні числа, отже, критерій оптимальності не виконується, необхідно перейти до нового опорного плану. Для вибору вільної змінної, що переводиться в базисну, вибираємо найбільший за модулем (-3) коефіцієнт в оцінному рядку. Таким чином, другий стовпець – розв'язувальний (позначаємо його лінією), змінна x_2 перейде до базисних змінних.

Відповідно до п. 4 алгоритму знаходимо оцінні відношення і вибираємо мінімальне значення $min\{18/3;\ 16;\ 5;\ \infty\} = 5$. Отже, третій рядок – розв'язувальний (позначаємо його горизонтальною лінією). Розв'язувальний елемент – одиниця, що знаходиться на перетині рядка для x_5 і стовпця для x_2.

Далі переходимо за правилами алгоритму п. 5 до табл. 1.9:

а) новий базис складається з x_3, x_4, x_2, x_6 (замінюємо змінну x_5 на x_2);

б) розв'язувальний елемент $a_{32} = 1$;

в) до кожного з решти рядків поелементно додаємо розв'язувальний рядок, помножений на таке число розв'язувального стовпця, щоб в його комірках були розташовані нулі, і записуємо перетворені рядки на місці попередніх, наприклад:

$$a_{11}' = a_{11} + (-a_{12})a_{31} = 1 + (-3)0 = 1, \quad b_1' = b_1 + (-a_{12})b_3 = 18 + (-3)5 = 3$$

і т. д.

Перехід до табл. 1.9 завершує перший крок цього процесу.

Таблиця 1.9

Базис	Вільний член B	Змінні						Оцінне відношення
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	3	1	0	1	0	-3	0	3
x_4	11	2	0	0	1	-1	0	11/2
x_2	5	0	1	0	0	1	0	∞
x_6	21	3	0	0	0	0	1	7
Z	15	-2	0	0	0	3	0	

Повторюємо пункти алгоритму доти, доки не буде виконано критерій оптимальності, тобто коли оцінний рядок не буде містити від'ємних коефіцієнтів. Маємо: $Z_{max} = 24$, оптимальний базисний розв'язок $x_1 = 6$, $x_2 = 4$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 3$, тобто оптимальний план $X^* = (6;4;0;0;1;3)$, $Z_{max} = 24$.

1.6. Техніка розв'язання задач лінійного програмування за допомогою Excel

1. Створення на робочому аркуші спеціальної форми.

Для розв'язання оптимізаційних задач в Excel за допомогою команди *Пошук розв'язку* необхідно створити на робочому аркуші форму, яка містить такі комірки:

- цільова комірка з формулою для обчислення значення, що оптимізується, наприклад формулою для визначення загального доходу, який необхідно максимізувати;
- одна або декілька комірок, значення яких змінюються командою *Пошук розв'язку* для одержання оптимального значення в цільовій комірці;
- комірки з критеріями обмежень;
- комірки зі значеннями обмежень;
- інші комірки, у яких значення цільової і змінних комірок використовуються для отримання додаткової інформації.

Для полегшення введення початкових даних (змінних та обмежень) слід дати імена ключовим коміркам. Текст у комірках є коментарем і на розв'язання задачі не впливає.

Приклад 1.8. Побудувати форму для введення умов такої задачі лінійного програмування: знайти максимальне значення цільової функції

$$Z = 52 - x_1 - 5x_2 - 7x_3 - 9x_4 - 9x_5 - 9x_6 - 5x_7 - 6x_8 - 9x_9 \to max$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 6x_1+4x_2+4x_3+x_4-2x_5-5x_6+x_7+2x_8+2x_9 \le 2; \\ -2x_1-3x_2-4x_3-3x_4+2x_5+4x_6-2x_7-x_8-2x_9 \le 1; \\ 6x_1+5x_2+6x_3+3x_4-3x_5-6x_6+2x_7+2x_8+3x_9 \le 3; \\ 16x_1+15x_2+18x_3+8x_4-11x_5-18x_6+7x_7+6x_8+9x_9 \le 9; \\ 10x_1+7x_2+5x_3-x_4-3x_5-7x_6+x_7+3x_8+3x_9 \le 3; \\ 4x_1+7x_2+8x_3+4x_4-x_5-8x_6+2x_7+2x_8+3x_9 \le 1; \\ 5x_1+0x_2+2x_3-2x_4+0x_5+0x_6-x_7+x_8+0x_9 \le 1; \\ 0x_1-x_2+2x_3-x_4+0x_5-x_6+x_7+0x_8+x_9 \le 4; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j=1,2,...,n.$$

Створимо на робочому аркуші форму для введення початкових даних (рис. 1.7).

На рис. 1.7 комірка M14 – *цільова*. Формула в ній залежить від значень у *змінних* комірках D5:L5. У комірках M6:M13 будуть розташовані *критерії обмежень.* На основі цих обмежень і правих частин обмежень, відображених у стовпці O6:O3, підбираються значення в комірках D5:L5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1															
2			ЗЛП з обмеженнями-нерівностями «≤»												
3															
4				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9			
5															
6				6	4	4	1	-2	-5	1	2	2		<=	2
7				-2	-3	-4	-3	2	4	-2	-1	-2		<=	1
8				6	5	6	3	-3	-6	2	2	3		<=	9
9				16	15	18	8	-11	-18	7	6	9		<=	4
10				10	7	5	-1	-3	-7	1	3	3		<=	3
11				4	7	8	4	-1	-8	2	2	3		<=	1
12				5	0	2	-2	0	0	-1	1	0		<=	1
13				0	-1	2	-1	0	-1	1	0	0		<=	4
14				-1	-5	-7	-9	-9	-9	-5	-6	-9		*Z*	52

Рис. 1.7

2. Уведення залежностей (формул) з математичної моделі в цільову комірку й комірки для лівих частин обмежень. У процесі розв'язання за формулою значення цільової функції, що розраховується, має бути оптимізоване або таким, що дорівнює заданому числу. Формули для лівих частин обмежень визначають їхній лінійний характер. Замість формули в комірку можна ввести адресу або ім'я комірки, яка містить формулу моделі, що оптимізується.

Для зручності введення формул необхідно скористатися діалоговим вікном *Майстер функцій*:

- у полі *Категорія* вибрати *Математичні*;
- у полі *Функції* – СУММПРОИЗВ;
- як масиви вказати адреси комірок, зарезервованих для невідомих змінних, адреси комірок, що містять коефіцієнти відповідних обмежень, або комірок, що містять коефіцієнти цільової функції.

3. Запуск діалогового вікна Пошук розв'язку. У цьому вікні здійснюються кілька операцій:

- визначення критерію оптимізації:

• щоб максимізувати значення в цільовій комірці шляхом підбирання значень зі змінних комірок, перемикач установлюють в положення *Максимальному значенню,*

• щоб мінімізувати значення в цільовій комірці, перемикач установлюють у положення *Мінімальному значенню,*

• щоб задати значення в цільовій комірці таким, що дорівнює деякому числу, перемикач встановлюють у положення *Значенню* і значення вводять у відповідне поле;

- уведення адрес або імен змінних комірок;

- задання обмежень, що накладаються на пошук розв'язку (для лінійних задач кількість граничних умов не обмежується);

- пошук розв'язку, у процесі якого значення змінних комірок змінюються за допомогою програми доти, доки не буде знайдено прийнятний розв'язок.

4. Збереження отриманого розв'язку або відновлення початкового значення.

Приклад 1.9. Щоб засвоїти техніку розв'язання оптимізаційних задач, використаємо прикл. 1.3 про оптимальний раціон кормів.

1. Створимо на робочому аркуші форму для введення початкових даних (рис. 1.8), яка міститиме такі комірки:

- цільова комірка F11;
- змінні комірки B4 і C4;
- комірки для введення залежностей (формул) з математичної моделі для обмежень, тобто комірки з критеріями обмежень E5 – E9;
- комірки D5:D7 і B10:C10 із значеннями обмежень.

Решта заповнених комірок – коментарі, що дають можливість орієнтуватися в умовах задачі.

2. Уведемо формули в комірки:

– цільова комірка F11 з формулою =СУММПРОИЗВ(B4:C4; B11:C11), рівнозначною =1,2AB11+0,8C11;

– комірки з критеріями обмежень:

• E5 із формулою =СУММПРОИЗВ(B4:C4; B5:C5), рівнозначною =40B4+10C4;

• E6 із формулою =СУММПРОИЗВ(B4:C4; B6:C6), рівнозначною =1,25B4+2,5C4;

• E7 із формулою =СУММПРОИЗВ(B4:C4; B7:C7), рівнозначною =2B4+C4;

• E9 із формулою =СУММПРОИЗВ(B4:C4; B9:C9), рівнозначною =0,5B4+0,5C4.

	A	B	C	D	E	F
1						
2	Поживні	Кількість одиниць поживних речовин в 1 кг корму				
3	речовини	Сіно	Силос	Мінімальна норма, г/кг		Сумарна цінність кормів
4						30
5	Білок	40	10	1000	0	
6	Кальцій	1,25	2,5	100	0	
7	Фосфор	2	1	80	0	
8						
9	Поживна цінність корму	0,5	0,5		0	
10	Норма корму на добу	50	85			Вартість добового раціону, грн
11	Вартість 1 кг корму (Z)	1,2	0,8			0

Рис. 1.8

3. Виконаємо команду *Сервіс Пошук розв'язку* (рис. 1.9).

У діалоговому вікні *Пошук розв'язку введемо* умову задачі:

- у полі *Встановити цільову комірку* введемо адресу цільової комірки F11;

- у групі перемикачів виберемо для цільової комірки мінімальне значення;

- у полі *Змінюючи комірки* введемо адреси змінних комірок;

- клацнувши по кнопці *Додати,* викличемо діалоговий блок *Додавання обмеження,* куди введемо перше обмеження, для чого:

• уведемо посилання на комірку B4;

• виберемо оператор <=;

• укажемо адресу комірки B10 із значенням обмеження;

• клацнемо по кнопці *Додати*, аналогічно задамо друге обмеження й т. д.; для задання решти обмежень у посиланні на комірку вкажемо комірки E5 – E7, E9 з формулами;

• після задання всіх обмежень клацнемо по кнопці ОК.

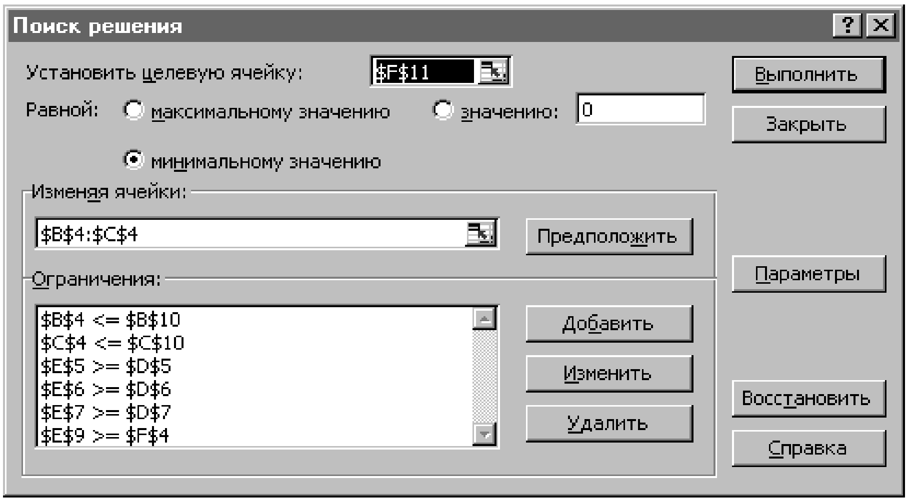


Рис. 1.9

4. Після клацання по кнопці *Параметри* відкривається вікно настроювання ітераційного циклу, у якому активуємо параметри: *Лінійна модель; Невід'ємні значення; Показувати результати ітерацій.*

Решту параметрів залишимо виставленими за умовчанням.

5. Клацнемо по кнопці *Виконати,* і програма на робочому аркуші виведе результати розв'язання (рис. 1.10):

- мінімальну собівартість 56 грн – у цільовій комірці;
- у змінних комірках – оптимальні значення раціону, що задовольняють обмеженням за поживною цінністю кормів: 20 кг сіна і 40 кг силосу на добу.

Крім того, на екран буде виведено діалогове вікно *Результати пошуку розв'язку,* у якому програма Excel повідомить, що всі обмеження й умови оптимальності виконано й розв'язок знайдено (рис. 1.10).

	A	B	C	D	E	F
1						
2	Поживні	Кількість одиниць поживних речовин в 1 кг корму				
3	речовини	Сіно	Силос	Мінімальна норма, г/кг		Сумарна цінність кормів
4		20	40			30
5	Білок	40	10	1000	1200	
6	Кальцій	1,25	2,5	100	125	
7	Фосфор	2	1	80	80	
8						
9	Поживна цінність корму	0,5	0,5		30	
10	Норма корму на добу	50	85			Вартість добового раціону, грн
11	Вартість 1 кг корму	1,2	0,8			56

Рис. 1.10

Графічне подання результатів розв’язання

Важливим фактором, що допомагає прийняти рішення, є наочне подання отриманого оптимального розв’язку у вигляді різних графічних об'єктів – діаграм і рисунків.

Результат розв’язання задачі (див. рис. 1.10) було взято як початкові дані для побудови діаграм різних типів. Його фрагмент з даними зображено на рис. 1.11.

	A	B	C
1			
2	Поживні	Кількість одиниць поживних речовин в 1 кг корму	
3	речовини	Сіно	Силос
4		20	40

Рис. 1.11

Створимо вбудовану діаграму за цими даними. Для цього виділимо комірки, значення яких мають бути подані на діаграмі, тобто B4:C4. Потім викличемо *Майстер діаграм*. У діалоговому вікні *Майстер діаграм – крок 1* показано типи діаграм, які можна побудувати. Початкові дані для побудови діаграм бувають двох видів: неперервні й дискретні. Для наочного подання кожного виду величин доцільно застосовувати певні типи діаграм: гістограми – для дискретних величин; графіки – для неперервних.

Вибираємо гістограму звичайного вигляду.

Далі на екрані відкривається діалогове вікно *Майстер діаграм – крок 2*: джерело даних діаграми. Вибираємо діапазон даних: стовпці – комірки B3:C4; комірки B3, B4 для сіна й комірки C3, C4 для силосу.

Вікно *Майстер діаграм – крок 3* – параметри діаграми. Тут можна ввести легенду, а також назви діаграми й осей.

Вікно *Майстер діаграм – крок 4* – розміщення діаграми. Діаграму можна розмістити на окремому аркуші або на існуючому. Отриману діаграму зображено на рис. 1.12.

Рис. 1.12

Наведена діаграма доводить переваги наочного подання результатів оптимального розв’язку.

Змінення умов оптимізаційних задач

Головна перевага команди *Пошук розв’язку* – простота застосування для змінення умов задачі, аналізу різних варіантів розв’язання, урахування непередбачених обставин.

Можна знайти не тільки мінімальне значення цільової функції, але й максимальне, а потім порівняти їх. Для цього достатньо в діалоговому вікні *Пошук розв’язку* встановити перемикач, що задає максимальне значення цільової функції, і клацнути по кнопці *Виконати.* Нарешті, можна задати конкретне значення цільової функції й знайти необхідні значення в змінних комірках. Для цього в діалоговому вікні *Пошук розв’язку* потрібно вибрати перемикач *Значення* й ввести в поле, розташоване поряд з ним, конкретне значення цільової функції.

Щоб змінити яке-небудь обмеження, необхідно вказати його в списку, клацнути по кнопці *Змінити,* указати комірку з новим значенням або ввести нове значення за допомогою клавіатури.

Крім того, можна задати конкретне значення однієї або декількох змінних комірок, використавши при заданні обмеження оператор = замість $\leq$ або $\geq$.

Приклад 1.10. Припустимо, що в задачі про раціон харчування керівник господарства поставив такі запитання:

1) яке поєднання кормів у раціоні є найдорожчим?

2) при якому раціоні собівартість годування становитиме 70 грн?

3) як зміниться собівартість годування, якщо до раціону тварин включати:

– не більше 30 кг силосу на добу;

– 16 кг сіна?

1. Щоб визначити найгірший варіант:

- у діалоговому вікні *Пошук розв’язку* встановимо перемикач, що задає максимальне значення цільової функції;

- клацнемо по кнопці *Виконати,* і програма повідомить, що якщо до раціону включити 50 кг сіна і 85 кг силосу, то собівартість годування становитиме 128 грн.

2. Щоб розв’язати задачу із заданим значенням цільової функції:

- в діалоговому вікні *Пошук розв’язку* встановимо перемикач у положення *Значення* і введемо константу 70;

- клацнемо по кнопці *Виконати* і побачимо, що така собівартість може бути при використанні в добовому раціоні тварин 5 кг сіна і 80 кг силосу.

3. Для розв’язання задачі з новими обмеженнями:

- виконаємо команду *Сервіс* **|** *Пошук розв’язку;*

- укажемо змінне обмеження \$C\$4 $\leq$ \$C\$10, потім клацнемо по кнопці *Змінити*;

- укажемо адресу комірки з новим обмеженням і після перерахунку отримаємо: собівартість – 60 грн, оптимальна витрата – по 30 кг кожного виду кормів.

4. Аналогічно розрахуємо собівартість годування при включенні до раціону 16 кг сіна. Собівартість дорівнює 57,6 грн, споживання сіна – 16 кг, силосу – 48 кг. Задаючи обмеження, замість оператора $\geq$ використовуємо оператор =.

2. ДВОЇСТІ ЗАДАЧІ

Кожній ЗЛП, так званій *початковій*, можна поставити у відповідність іншу – *двоїсту*. Ці задачі називають взаємодвоїстими.

Розглянемо економічну інтерпретацію задачі, що є двоїстою до задачі про використання ресурсів.

Для виготовлення n видів продукції $P_1, P_2,...,P_n$ використовують m видів сировини $S_1, S_2,...,S_m$. Запас сировини, кількість одиниць сировини, що витрачається на виготовлення одиниці продукції, прибуток, одержаний від одиниці продукції наведено в табл. 2.1.

Необхідно скласти такий план випуску продукції, щоб унаслідок її реалізації отримати максимальний прибуток.

Таблиця 2.1

Вид сировини	Запас сировини	Кількість одиниць i-ї сировини, що витрачається на виготовлення одиниці j-ї продукції			
		P_1	P_2	...	P_n
S_1	B_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
S_2	B_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	
S_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}
Прибуток від реалізації одиниці продукції, грн		c_1	c_2	...	c_n

Математична модель початкової задачі: знайти максимальне значення цільової функції

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n \rightarrow max$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \;\; j = 1,2,...,n; \;\; b_i \geq 0, i = 1,2,...,m.$$

Припустимо, що деяка організація вирішила закупити сировину S_1, $S_2,...,S_m$ у підприємства. Необхідно визначити оптимальні ціни на цю сировину y_1, $y_2,..,y_m$.

Очевидно, що організація, яка купує сировину, зацікавлена в тому, щоб витрати на всю сировину L у кількостях $b_1,b_2,...,b_m$ за цінами $y_1,y_2,...,y_m$ були мінімальними:

$$L = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \rightarrow min.$$

З іншого боку, підприємство, що продає сировину, зацікавлене в тому, щоб виручка була не меншою за ту суму, яку можна отримати при переробленні сировини на готову продукцію. Відповідно вартість усієї сировини, що витрачається на виготовлення одиниці j-ї продукції, не може бути меншою за вартість продукції, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \geq c_j, \ \ j = 1,2,...,n.$$

Сформулюємо двоїсту *задачу*: знайти такий набір цін на сировину $Y = (y_1,y_2,...,y_m)$, при якому загальні витрати на сировину будуть мінімальними, тобто

$$L = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \rightarrow min,$$

за умови, що витрати на сировину при виготовленні кожного виду продукції є не меншими за прибуток від реалізації цієї продукції:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ \cdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n, \end{cases}$$
$$y_i \geq 0, \ \ i = 1,2,...,m.$$

Симетричні взаємодвоїсті задачі – це задачі, системи обмежень яких задано нерівностями, причому на змінні двоїстої задачі накладається умова невід’ємності. Види симетричних задач у матричній формі наведено в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

Початкова задача	Двоїста задача
$Z_{max} = CX$ $AX \leq B$, $X \geq 0$	$L_{min} = BY$ $AY \geq C$, $Y \geq 0$
$Z_{min} = CX$ $AX \geq B$, $X \geq 0$	$L_{max} = BY$ $AY \leq C$, $Y \geq 0$

Несиметричними взаємодвоїстими задачами є задачі, коли обмеження початкової задачі задано рівністю, а двоїстої – нерівностями, причому в останній змінні можуть бути від’ємними. Види несиметричних задач у матричній формі наведено в табл. 2.3.

Таблиця 2.3

Початкова задача	Двоїста задача
$Z_{max} = CX$ $AX = B,\ X \geq 0$	$L_{min} = BY$ $AY \geq C$
$Z_{min} = CX$ $AX = B,\ X \geq 0$	$L_{max} = BY$ $AY \leq C$

Запропонуємо *алгоритм складання двоїстої задачі.*

1. Усі нерівності системи обмежень початкової задачі зводять до одного значення: якщо в початковій задачі шукають максимум цільової функції, то всі нерівності системи обмежень зводять до знака "$\leq$", а в задачі мінімізації – до знака "$\geq$".

2. Кожному обмеженню початкової задачі відповідає одна змінна y_i ($i = 1, 2,..,m$) двоїстої задачі.

3. Цільову функцію двоїстої задачі формують із правих частин системи обмежень початкової задачі: $L(Y) = c_0 + b_1y_1 + b_2y_2 +...+ b_my_m$, де c_0 – вільний член цільової функції початкової задачі $Z(X)$.

4. Цільова функція $L(Y)$ двоїстої задачі порівняно з $Z(X)$ має оптимізуватися протилежно: якщо $Z(X)\rightarrow max$, то $L(Y)\rightarrow min$, і навпаки.

5. Кожній змінній x_j ($j = 1, 2,...,n$) початкової задачі відповідає обмеження двоїстої задачі.

6. Матрицю коефіцієнтів обмежень двоїстої задачі одержують транспонуванням матриці коефіцієнтів обмежень A початкової задачі.

7. Праві частини системи обмежень двоїстої задачі – це коефіцієнти цільової функції початкової задачі.

8. Знак обмежень двоїстої задачі змінюється на протилежний. При цьому обмеження двоїстої задачі, що відповідає невід'ємній змінній x_j, є нерівністю, у решті випадків – рівністю.

9. Змінна двоїстої задачі, що відповідає обмеженню-нерівності, має бути невід'ємною, а змінна, що відповідає обмеженню-рівності, може бути будь-якою.

Зв'язок між оптимальними розв'язками двоїстих задач визначається теоремами двоїстості.

Перша (основна) теорема двоїстості. Якщо одна із взаємодвоїстих задач має оптимальний розв'язок, то його має й інша, причому оптимальні значення їх цільових функцій є однаковими: $Z(X^*) = L\ (Y^*)$, де $X^* = (x^*_1, x^*_2,..., x^*_n)$, $Y^* = (y^*_1, y^*_2,.., y^*_m)$ – оптимальні розв'язки взаємодвоїстих задач. Якщо одна із задач не має розв'язку через необмеженість цільової функції, то інша не має розв'язку через несумісність системи обмежень.

Економічне значення першої (основної) теореми двоїстості: підприємству байдуже, виробляти продукцію за оптимальним планом $X^* = (x^*_1, x^*_2,...,x^*_n)$ та отримати максимальний прибуток Z_{max} чи продавати сировину за оптимальними цінами $Y^* = (y^*_1,\dots,y^*_2, y^*_m)$ і відшкодувати внаслідок продажу мінімальні витрати на сировину L_{min}.

Друга теорема двоїстості. Для того, щоб допустимі розв'язки $X^* = (x^*_1, x^*_2,\dots,x^*_j,\dots, x^*_n)$, $Y^* = (y^*_1, y^*_2,\dots,y^*_i,\dots, y^*_m)$ були оптимальними розв'язками взаємодвоїстих задач, необхідно й достатньо, щоб виконувалися рівності

$$y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0, i = 1,2,\dots,m;$$

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\right) = 0, j = 1,2,\dots,n$$

(або для практичного застосування під час розв'язання задач):

а) якщо після підстановки оптимального розв'язку в систему обмежень i-те обмеження початкової задачі виконується як строга нерівність $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* < b_i, i = 1,2,\dots,m,$ то відповідна змінна двоїстої задачі дорівнює нулю: $y_i^* = 0$; якщо після підстановки оптимального розв'язку в систему обмежень i-те обмеження початкової задачі виконується як строга рівність $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* = b_i, i = 1,2,\dots,m,$, то $y_i^* > 0$;

б) якщо після підстановки оптимального розв'язку в систему обмежень j-те обмеження двоїстої задачі виконується як строга нерівність $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* > c_j, j = 1,2,\dots,n$, то відповідна змінна початкової задачі дорівнює нулю: $x_j^* = 0$; якщо після підстановки оптимального розв'язку в систему обмежень j-те обмеження двоїстої задачі виконується як строга рівність $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* = c_j, j = 1,2,\dots,n$, то $x_j^* > 0$.

Економічна інтерпретація другої теореми двоїстості:

а) об'єктивно обумовлені оцінки ресурсів визначають ступінь дефіцитності ресурсів: якщо оцінка y_i одиниці ресурсу i-го виду є додатною, то за умов оптимальної виробничої програми цей ресурс використовується повністю і є дефіцитним; якщо i-й ресурс використовується не повністю і є недефіцитним, то його оцінка дорівнює нулю;

б) якщо j-й вид продукції увійшов до оптимального плану, то він за оптимальними оцінками є не збитковим; якщо j-й вид продукції є збитковим, то він не увійде до плану.

Приклад 2.1. Побудувати двоїсту задачу для початкової: знайти максимальне значення цільової функції

$$Z = 3x_1 + x_2 - 13x_3 + 2x_4 - 8x_5 - 5x_6 \to max$$

при обмеженнях

$$-6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 15x_5 + 4x_6 \geq -9;$$
$$9x_1 + x_2 - 15x_3 - 9x_4 + 8x_5 - 12x_6 = 3;$$
$$5x_1 + 11x_2 - 6x_3 - 8x_4 + 3x_5 - 13x_6 = 4;$$
$$x_2 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

Розв'язання. Оскільки початкова задача є задачею на максимум цільової функції, усі нерівності системи обмежень зведемо до нерівностей зі знаком "$\leq$". У цьому випадку першу нерівність помножимо на (-1):

$$6x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 15x_5 - 4x_6 \leq 9.$$

Кожному обмеженню початкової задачі відповідає одна змінна y_i (i = 1, 2, 3) двоїстої задачі. При цьому змінна, що відповідає обмеженню-нерівності, має бути невід'ємною: $y_1 \geq 0$, а змінна, що відповідає обмеженню-рівності – будь-якою.

Цільова функція двоїстої задачі формується з правих частин системи обмежень початкової задачі:

$$L(Y) = 9y_1 + 3y_2 + 4y_3.$$

Цільова функція $L(Y)$ двоїстої задачі повинна оптимізуватися порівняно з $Z(X)$ протилежним чином, тобто

$$L(Y) = 9y_1 + 3y_2 + 4y_3 \rightarrow min.$$

Кожній змінній x_j початкової задачі відповідає обмеження двоїстої задачі. Оскільки змінні x_1, x_3, x_5, x_6 можуть мати будь-який знак, перше, третє, п'яте й шосте обмеження – рівності. Оскільки $x_2 \geq 0$ і $x_4 \geq 0$, друге й четверте обмеження є нерівностями зі знаками, що відповідають меті двоїстої задачі, – "$\geq$".

Праві частини системи обмежень двоїстої задачі складаються з коефіцієнтів лінійної функції початкової задачі.

Матрицю коефіцієнтів обмежень двоїстої задачі одержують шляхом транспонування матриці коефіцієнтів обмежень початкової задачі:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -4 & 0 & -15 & -4 \\ 9 & 1 & -15 & -9 & 8 & -12 \\ 5 & 11 & -6 & -8 & 3 & -13 \end{pmatrix},\quad A^T = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 5 \\ -5 & 1 & 11 \\ -4 & -15 & -6 \\ 0 & -9 & -8 \\ -15 & 8 & 3 \\ -4 & -12 & -13 \end{pmatrix}.$$

Отже, сформулюємо двоїсту задачу: мінімізувати цільову функцію

$$L(Y) = 9y_1 + 3y_2 + 4y_3 \rightarrow min$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 6y_1 + 9y_2 + 5y_3 = 3, \\ -5y_1 + y_2 + 11y_3 \ge 1, \\ -4y_1 - 15y_2 - 6y_3 = 13, \\ 0y_1 - 9y_2 - 8y_3 = 2, \\ -15y_1 + 8y_2 + 3y_3 \ge -8, \\ -4y_1 - 12y_2 - 13y_3 = -5, \end{cases}$$

$y_1 \ge 0$, y_2, y_3 – змінні з будь-яким знаком.

Приклад 2.2. Для початкової задачі скласти двоїсту, розв'язати її графічно і, використовуючи теореми двоїстості, знайти розв'язок початкової задачі:

$$Z(X) = -2x1 + 4x2 + 14x3 + 2x4 \to min;$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 30, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = 1,2,3,4.$$

Розв'язання. Складемо двоїсту задачу:

$$L(Y) = 6y_1 + 30y_2 \to max;$$

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 \le -2, \\ -y_1 + 2y_2 \le 4, \\ y_1 + 4y_2 \le 14, \\ 2y_1 - 5y_2 \le 2, \end{cases}$$

y_1, y_2 – змінні з будь-яким знаком.

Розв'язавши задачу графічним методом, маємо оптимальний розв'язок $Y^* = (2; 3)$, причому $L(Y^*) = 102$.

Згідно з першою теоремою двоїстості початкова задача також має розв'язок, причому $L(Y^*) = Z(X^*) = 102$.

Застосуємо другу теорему двоїстості. Підставимо оптимальний розв'язок $Y^* = (2; 3)$ в систему обмежень:

$$\begin{cases} -2 \cdot 2 - 3 < -2 \Rightarrow x_1^* = 0, \\ -2 + 2 \cdot 3 = 4, \Rightarrow x_2^* \ge 0, \\ 2 + 4 \cdot 3 = 14, \Rightarrow x_3^* \ge 0, \\ 2 \cdot 2 - 5 \cdot 3 < 2 \Rightarrow x_4^* = 0. \end{cases}$$

Перше й четверте обмеження виконуються як строгі нерівності. Згідно з другою теоремою двоїстості відповідні змінні початкової задачі дорівнюють нулю: $x^*_1 = x^*_4 = 0$. Друге й третє обмеження виконуються як строгі рівності, згідно з умовами задачі маємо відповідні змінні початкової задачі : $x^*_2 \ge 0$, $x^*_3 \ge 0$.

Для визначення змінних x^*_2 і x^*_4 методом підстановки розв'яжемо систему рівнянь, отриману з обмежень початкової задачі, ураховуючи, що $x^*_1 = x^*_4 = 0$:

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_2 + 4x_3 = 30. \end{cases}$$

Звідси $x^*_3 = 7$, $x^*_2 = 1$. Тоді $X^* = (0, 1, 7, 0)$; $Z_{min}(X^*) = 102$.

3. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

3.1. Розв'язання транспортної задачі методом потенціалів

Транспортна задача (ТЗ) лінійного програмування застосовується як в теоретичних розробках, так і в практиці планування різних економічних процесів. Найбільшого значення ТЗ набуває під час вирішення питань раціоналізації поставок найважливіших видів промислової і сільськогосподарської продукції, а також оптимального планування вантажопотоків і роботи різних видів транспорту.

Розглянемо постановку ТЗ. Нехай деякий однорідний продукт, зосереджений у m постачальників $A_1, A_2, \dots, A_m$ у кількості $a_1, a_2, \dots, a_m$ одиниць, необхідно доставити n замовникам $B_1, B_2, \dots, B_n$ у кількості $b_1, b_2, \dots, b_n$ одиниць. Відомо вартість c_{ij} перевезення одиниці вантажу від i-го постачальника до j-го замовника, яку задано у вигляді таблиці – платіжної матриці

$$\begin{pmatrix} c_{11}\ c_{12}\ \dots\ c_{1n} \\ c_{21}\ c_{22}\ \dots\ c_{2n} \\ \dots \\ c_{m1}\ c_{m2}\ \dots\ c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Необхідно скласти такий план перевезень, коли всі заявки виконуються при мінімальній загальній вартості всіх перевезень.

Позначимо через x_{ij} кількість одиниць вантажу, що направляється з i-го пункту відправлення A_i в j-й пункт призначення B_j ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$), і назвемо це *перевезеннями*.

Економіко-математична модель ТЗ: на множині невід'ємних розв'язків системи обмежень

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, \dots, m,\ \ j = 1, 2, \dots, n$$

знайти такий розв'язок X = $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ & \ldots & & \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}$, при якому значення цільової

функції L = $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ є мінімальним.

У цій моделі передбачається, що сума всіх замовлень дорівнює сумі всіх запасів $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Цю задачу називають *задачею з правильним балансом*, а її модель – *закритою*.

Якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$, то ТЗ – *задача з неправильним балансом*, а її модель є *відкритою.*

Для відкритої моделі можливі два випадки:

а) сумарні запаси є більшими за сумарні потреби:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j;$$

б) сумарні потреби є більшими за сумарні запаси:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Відкриту модель розв'язують шляхом її зведення до закритої моделі.

У випадку *а* крім *n* пунктів призначення (ПП) $B_1, B_2 \ldots, B_n$ уводять фіктивного споживача B_{n+1} або $B_ф$, потреби якого

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Покладемо вартості всіх перевезень зі всіх пунктів відправлення (ПВ) у фіктивний ПП $B_ф$ такими, що дорівнюють нулю ($c_{iф} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$), оскільки вантаж не перевозиться.

У випадку *б* уводять фіктивного постачальника A_{m+1} або $A_ф$, запаси якого

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Покладемо вартості перевезень із ПВ $A_ф$ у будь-який ПП такими, що дорівнюють нулю: $c_{фj} = 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n$).

Після перетворень в обох випадках задача набуває вигляду закритої моделі.

Умову задачі в певному порядку можна записати у вигляді транспортної таблиці (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

ПВ	ПП				Запаси
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
Замовлення b_j	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Необхідна й достатня умова розв'язання задачі: будь-яка ТЗ, у якій сумарні запаси дорівнюють сумарним потребам, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, має розв'язок.

Сукупність значень x_{ij} $(i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n)$ називають *планом перевезень (розв'язком)*.

План x_{ij} називають *допустимим*, якщо він задовольняє балансовим умовам: усі замовлення виконано, усі запаси вичерпано.

Якщо отриманий розв'язок дає можливість мінімізувати витрати на транспортування, то його називають *оптимальним розв'язком*, або *оптимальним планом.*

Опорний план ТЗ – будь-який допустимий план, для якого вектори умов, що відповідають додатним компонентам, є лінійно незалежними, тобто це допустимий план, у якому відмінними від нуля є не більше $r = m + n - 1$ перевезень x_{ij}, а решта – дорівнюють нулю.

Комірки транспортної таблиці, де записуємо відмінні від нуля перевезення, домовимося називати *зайнятими*, а решту (порожні) – *вільними*.

Кожна комірка має свій номер (i, j), що визначається номером рядка i та номером стовпця j, на перетині яких вона розташована.

Для перевірки лінійної незалежності векторів умов, що відповідають компонентам допустимого плану, а також для переходу від одного опорного плану до іншого використовують цикли. Цикли будують для деякої вільної комірки таблиці, і вони містять частину комірок, зайнятих опорним розв'язком.

Цикл – це послідовність комірок таблиці ТЗ (i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2),...,(i_k, j_1), у якій тільки дві сусідні комірки розташовані в одному стовпці або в одному рядку таблиці, причому остання комірка розташована в тому самому рядку або стовпці, що й перша. Побудову циклів починають з комірки, визначеної спеціальним чином, потім накреслюють допоміжну лінію, паралельну стовпцям або рядкам таблиці, до деякої зайнятої комірки (вершини циклу), де можливий поворот під кутом 90°, і продовжують накреслювання до наступної зайнятої комірки, прагнучи повернутися до початкової комірки.

Допустимий план ТЗ $X = (x_{ij})(i = 1, 2,...,m; j = 1,2,...,n)$ є опорним тільки в тому випадку, коли із зайнятих ним комірок не можна утворити жодного циклу, усі вершини якого розташовані в зайнятих комірках.

Метод викреслювання для перевірки можливості утворення циклу:

1. Якщо в рядку або стовпці таблиці розташована одна зайнята комірка, то вона не може входити в який-небудь цикл. Отже, викреслюємо всі рядки таблиці з однією зайнятою коміркою, потім усі стовпці, що містять по одній зайнятій комірці, далі повертаємося до рядків і продовжуємо викреслювати рядки й стовпці.

2. Якщо всі рядки й стовпці буде викреслено, тобто із зайнятих комірок таблиці не можна виділити частину, що створює цикл, то система векторів, що відповідають умовам, є лінійно незалежною, а розв'язок – опорним. Якщо ж після викреслювань залишається частина комірок, то вони утворюють цикл.

Процес відшукання оптимального плану ТЗ починається з побудови первинного *опорного плану.*

Схеми побудови первинного опорного плану

1. *Метод північно-західного кута.* Запаси чергового постачальника використовують для забезпечення запитів чергових замовників доти, доки їх не буде вичерпано повністю, після чого витрачають запаси постачальника, наступного за номером.

Заповнення таблиці ТЗ починається з лівого верхнього кута і складається з ряду однотипних кроків. На кожному кроці, виходячи із запасів чергового постачальника й запитів чергового замовника, заповнюють тільки одну комірку і відповідно виключають з розгляду одного постачальника або замовника.

Недолік методу полягає в тому, що під час побудови первинного опорного плану не враховується вартість перевезення одиниці вантажу.

2. *Метод мінімальної вартості.* У цьому випадку вартість перевезення одиниці вантажу враховується й можна побудувати план, більш близький до оптимального.

Таблицю заповнюють, починаючи з комірки, що має найменшу вартість одиниці перевезення. Якщо таких комірок декілька, то вибирають будь-яку. Потім з розгляду виключають або рядок, що відповідає постачальнику, запаси якого через заповнення вичерпуються, або стовпець, що відповідає замовнику, потреби якого повністю задовольняються. Можливі випадки, коли доводиться викреслювати і рядок, і стовпець, на перетині яких розташована комірка, що заповнюється. Це можливо, коли запаси постачальника витрачено і потребі споживача задоволено.

Із частини таблиці, що залишилася, знову вибираємо найменшу вартість. Процес заповнення комірок продовжується доти, доки не буде розподілено запаси постачальників і задоволено потреби замовників.

Побудований первинний опорний план зводимо до оптимального за допомогою *методу потенціалів*.

Нехай є ТЗ з балансовими умовами

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i (i = 1,...,m),$$

причому $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Вартість перевезення одиниці вантажу з A_i у B_j дорівнює c_{ij}, таблицю вартостей $C = (c_{ij})$ (i = 1, 2,…,m; j = 1, 2,…,n) задано. Необхідно знайти план перевезень $X = (x_{ij})$, який задовольняє балансові умови при мінімальній сумарній вартості перевезень:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = min.$$

Нехай кожний із ПВ A_i за перевезення вантажу вносить суму U_i, а кожний із ПП B_j – V_j (i = 1, 2,...,m; j = 1, 2,...,n). Позначимо сукупність платежів $U_1, U_2,..., U_m; V_1, V_2,..., V_n$ через (U_i, V_j) , а суму $U_i + V_j$ – через $\widetilde{c}_{ij}$ (i = 1, 2, ...,m; j = 1, 2,...,n), яку назвемо псевдовартістю перевезення одиниці вантажу з A_i у B_j. Припустимо, що план $X = (x_{ij})$ (i = 1, 2,...,m; j = 1, 2,...,n) є невиродженим, тобто кількість зайнятих комірок ($x_{ij} > 0$) в таблиці перевезень дорівнює $m + n - 1$. Визначимо платежі (U_i, V_j) так, щоб у всіх зайнятих комірках псевдовартості дорівнювали вартостям c_{ij}:

$$\widetilde{c}_{ij} = Ui + Vj = c_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0.$$

Для вільних комірок співвідношення між псевдовартостями й вартостями можуть бути такими: $\widetilde{c}_{ij} = c_{ij}$; $\widetilde{c}_{ij} > c_{ij}$; $\widetilde{c}_{ij} < c_{ij}$.

Теорема. Якщо план ТЗ – оптимальний, то можна відшукати систему з $m+n$ чисел (U^*_i, V^*_j) (i = 1, 2,...,m; j = 1, 2,...,n), так званих потенціалів постачальників і замовників, для якої виконуються такі умови:

1) $U_i^* + V_j^* = c_{ij}$ для x_{ij}^* > 0, де c_{ij} – елементи матриці транспортних витрат, що відповідають коміркам, зайнятим оптимальним розв'язком;

2) $U_i^* + V_j^* \le c_{ij}$ для x_{ij} =0, де c_{ij} – елементи матриці, що відповідають вільним коміркам, не зайнятим оптимальним розв'язком.

План, що має такі властивості, називають *потенціальним*.

Щоб опорний план був оптимальним, необхідним є виконання таких умов:

а) для кожної зайнятої комірки (x_{ij} > 0) сума потенціалів має дорівнювати вартості одиниці перевезення, що стоїть в цій комірці:

$$U_i^* + V_j^* = c_{ij} \quad (i = 1, 2,...,m;\ j = 1, 2,...,n) \text{ при } x_{ij} > 0; \tag{3.1}$$

б) для кожної вільної комірки (x_{ij} = 0) сума потенціалів повинна бути не більше вартості одиниці перевезення, що стоїть в цій комірці:

$$U_i^* + V_j^* \le c_{ij} \text{ для } x_{ij} = 0. \qquad (3.2)$$

Алгоритм розв'язання ТЗ

1. Перевірка виконання необхідної й достатньої умови розв'язання задачі. Якщо задача має неправильний баланс, то вводимо фіктивного постачальника або споживача з запасами або замовленнями, яких не вистачає, і нульовими вартостями перевезень.

2. Побудова первинного опорного плану методами північно-західного кута, мінімальної вартості тощо.

3. Побудова системи потенціалів з використанням системи рівнянь (3.1) для знаходження потенціалів. Ця система рівнянь має *m+n* невідомих U_i *(i = 1,2,...,m)* і V_j *(j = 1,2,...,n)*. Кількість рівнянь системи (3.1) і кількість відмінних від нуля компонентів невиродженого опорного плану дорівнює *m+n-1* – кількості зайнятих комірок у транспортній таблиці.

Кількість рівнянь менше кількості невідомих на один, тому система (3.1) є невизначеною, одному невідомому (зазвичай тому, яке частіше зустрічається в системі (3.1)) надають нульового значення. Після цього решту потенціалів визначають однозначно з системи рівнянь (3.1) методом підстановки.

У разі виродженого опорного плану залишаються невизначені потенціали, оскільки система (3.1) містить стільки рівнянь, скільки зайнятих комірок, а їх менше за *m + n - 1*. Для усунення виродженості кількість зайнятих комірок доповнюють до *m + n - 1*, уводячи нульові перевезення в комірки, які називають *фіктивно зайнятими*. Для цього в будь-які комірки транспортної таблиці на місці вартостей перевезень уписують нулі.

Значення потенціалів записують поряд із запасами і замовленнями відповідних постачальників і замовників у додаткових рядку й стовпці.

Перевіряють правильність побудови системи. Для кожної зайнятої комірки рядків визначають суму потенціалів.

Якщо для всіх зайнятих комірок виконується умова (3.1), то систему побудовано правильно, інакше її треба побудувати наново або змінити так, щоб умова (3.1) виконувалася.

4. Перевірка виконання умови оптимальності для вільних комірок за допомогою нерівностей (3.2).

Умова оптимальності: якщо для всіх вільних комірок виконується умова $U_i^* + V_j^* \le c_{ij}$ (або оцінка $\Delta_{ij} = (U_i + V_j) - c_{ij} \le 0$), то план є оптимальним; якщо для деяких комірок $U_i + V_j > c_{ij}$ ($\Delta_{ij} > 0$), то план є неоптимальним, тому необхідно перейти до нового опорного плану з меншою цільовою функцією.

Для кожної вільної комірки, у якій не виконується умова оптимальності, оцінку Δ_{ij} записують у лівому нижньому куті комірки.

5. Вибір комірки, у яку необхідно перенести вантаж.

У ТЗ завантаженню підлягає в першу чергу комірка, наприклад *(m,k),* якій відповідає максимальна додатна оцінка

$$\Delta_{mk} = \max_{\Delta_{ij}>0}\{\Delta_{ij}\} = \max_{\Delta_{ij}>0}\{(U_i + V_j) - c_{ij}\}.$$

6. Побудова циклу й визначення величини перерозподілу вантажу. Для визначення кількості одиниць вантажу, що підлягає перерозподілу, позначають знаком «+» вільну комірку, яку треба завантажити, і комірку, вибрану в п. 5. Це означає, що комірка приєднується до зайнятих комірок. Тепер таблиця містить *m+n* зайнятих комірок, тому утворюється єдиний цикл, усі вершини якого, за винятком комірки, позначеної знаком «+», розташовані в зайнятих комірках. Стрілками вказують напрям обходу циклу. Визначають цикл за допомогою методу викреслювання і, починаючи рух від комірки зі знаком «+», по черзі проставляють знаки «-» і «+» у вершинах циклу.

Потім знаходять величину перерозподілу вантажу $\theta = \min_{"-"}\{x_{ij}\}$, де x_{ij} – перевезення, розташовані у вершинах циклу, позначених знаком «-». Величина θ визначає, скільки одиниць вантажу можна перерозподілити по знайденому циклу. При перенесенні будь-якої кількості одиниць θ по циклу рівновага між запасами й замовленнями не порушується: як і раніше, сума перевезень у кожному рядку дорівнює запасам цього рядка, а сума перевезень у кожному стовпці – замовленням цього стовпця. При цьому вартість плану може змінюватися – збільшуватися або зменшуватися.

Значення θ записують у вільну комірку зі знаком «+». Рухаючись по циклу, віднімають θ від перевезень x_{ij} у комірках зі знаком «-» і додають до перевезень x_{ij} у комірках зі знаком «+». Якщо значенню θ відповідають декілька мінімальних перевезень, то після віднімання залишають у відповідних комірках нульові перевезення в такій кількості, щоб у новому опорному плані було *m+n-1* зайнятих комірок.

7. Перевірка на оптимальність нового опорного невиродженого плану, отриманого внаслідок перерозподілу вантажу θ. Будують систему потенціалів і перевіряють виконання умови оптимальності для кожної вільної комірки.

Якщо план знову буде неоптимальним, то виконують дії, починаючи з п. 5. Процес повторюється доти, доки у всіх вільних комірках не буде виконуватися умова оптимальності.

Приклад 3.1. Компанія, що контролює три фабрики A_1, A_2, A_3, які виготовляють 200, 300 і 500 тис. одиниць продукції щонеділі, уклала договір з замовниками B_1, B_2, B_3 і B_4, яким необхідно щонеділі поставляти 200, 200, 300 і 400 тис. одиниць продукції відповідно. Вартість транспортування 1000 одиниць продукції замовникам із кожної фабрики наведено в табл. 3.2. Необхідно визначити для кожної фабрики оптимальний план перевезень продукції до замовників, при якому сумарна вартість перевезень буде мінімальною.

Таблиця 3.2

ПВ	ПП				Запаси a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	3	2	1	200
A_2	2	3	5	6	300
A_3	6	7	9	12	500
Замовлення b_j	200	200	300	400	$1000 \neq 1100$

Розв'язання. У ТЗ сума всіх замовлень не дорівнює сумі всіх запасів:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 200 + 300 + 500 = 1000 \neq \sum_{j=1}^{4} b_j = 200 + 200 + 300 + 400 = 1100,$$

отже, це задача з неправильним балансом, а її модель є відкритою.

Уведемо змінні – матрицю перевезень X – і запишемо матрицю вартостей C:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

Цільова функція дорівнює сумі добутків усіх відповідних елементів матриць C і X і має набути мінімального значення:

$$Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij} \to min.$$

Складемо систему обмежень задачі. Сума перевезень у першому рядку матриці X має дорівнювати запасам першого постачальника A_1, сума перевезень у другому рядку матриці X – запасам другого постачальника A_2 і т.д. Це означає, що запаси постачальників вивозять повністю:

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 200, \\ &x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 300, \\ &x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 500. \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Суми перевезень у кожному стовпці матриці X не повинні бути більшими за запаси відповідних замовників:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \le 200,$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \le 200,$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \le 300, \qquad (3.4)$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \le 400.$$

Перевезення не можуть бути від'ємними: $x_{ij} \ge 0$, i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4.

Економіко-математична модель ТЗ: знайти змінні, що забезпечують мінімум функції $Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$ і задовольняють системі обмежень (3.3), (3.4) і умовам невід'ємності $x_{ij} \ge 0$, і = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4.

Це задача з неправильним балансом, отже, необхідна й достатня умова розв'язання задачі не виконується. Для зведення задачі до закритого вигляду в таблицю вводимо четвертий рядок $A_ф$ – фіктивний постачальник із запасами a_4 = 1100 – 1000 = 100 і нульовими вартостями перевезень вантажу (табл. 3.3).

Таблиця 3.3

ПВ	ПП				Запаси a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 200	3	2	1	200
A_2	2	3 200	5 100	6	300
A_3	6	7	9 200	12 300	500
$A_ф$	0	0	0	0 100	100
Замовлення b_j	200	200	300	400	

Економіко-математична модель ТЗ із правильним балансом має такий вигляд: знайти змінні, що забезпечують мінімум функції $Z = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$, задовольняють системі обмежень

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=200,$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=300,$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=500,$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=100,$$

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=200,$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=200,$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=300,$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=400$$

і відповідають умовам невід'ємності

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4;\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Знайдемо первинний опорний план методом північно-західного кута. Заповнюємо таблицю поступово з лівої верхньої комірки (1, 1). Пункт призначення B_1 подав замовлення на 200 одиниць вантажу. Виконується це замовлення за рахунок запасу 200 одиниць першого постачальника A_1. Запишемо перевезення x_{11} = 200 в комірку (1, 1). Запаси першого постачальника повністю витрачено. Потреби першого замовника задоволено повністю. Постачальник A_2 має 300 одиниць вантажу. За рахунок них виконується замовлення ПП B_2 (200 одиниць, які запишемо в комірку (2, 2)). Запаси другого постачальника витрачено не повністю, залишилося ще 100 одиниць вантажу, які він віддасть замовнику B_3 (100 одиниць записуємо в комірку (2, 3)). Але потреби третього замовника задоволено не повністю, 200 одиниць вантажу він отримає від постачальника A_3, який має 500 одиниць вантажу. 300 одиниць вантажу, що залишилися у A_3, доставлять у ПП B_4, що замовив 400 одиниць. Недоотримані 100 одиниць вантажу замовник B_4 отримає від фіктивного постачальника $A_ф$.

Таким чином, складено первинний опорний план перевезень, що задовольняє балансовим умовам:

$$X^*_1 = \begin{pmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 200 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо загальну вартість складеного плану як суму добутків обсягів перевезень x_{ij}, розташованих у лівому кутку зайнятих комірок, і відповідних вартостей у цих самих комірках c_{ij}:

$$Z_1 = 4 \cdot 200 + 3 \cdot 200 + 5 \cdot 100 + 9 \cdot 200 + 12 \cdot 300 = 7300 \text{ од.}$$

Визначимо первинний опорний план методом мінімальної вартості (табл. 3.4).

Заповнюємо таблицю, починаючи з комірки (1, 4), оскільки в ній розташована вартість c_{14} = 1. Пункт призначення B_4 подав замовлення на 400 одиниць вантажу, але постачальник A_1 має лише 200 одиниць вантажу, які він повністю віддає B_4. У комірку (1, 4) запишемо x_{14} = 200. Перший рядок далі не розглядається, а в B_4 ще потрібно довезти 200 одиниць вантажу.

Таблиця 3.4

ПВ	ПП				Запаси a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	3	2	1 200	200
A_2	2 200	3 100	5	6	300
A_3	6	7 100	9 300	12 100	500
$A_ф$	0	0	0	0 100	100
Замовлення b_j	200	200	300	400	

Наступна вартість c_{12} = 2 розташована в комірці (2, 1). Пункт B_1 подав замовлення на 200 одиниць вантажу. Виконується це замовлення за рахунок запасу 300 одиниць другого постачальника, отже, запишемо перевезення 200 у комірку (2, 1). Потреби першого пункту призначення задоволено повністю. Запаси другого постачальника повністю не витрачено, залишилося 100 одиниць вантажу.

Вартість c_{22} = 3 розташована в комірці (2, 2). Пункт призначення B_2 замовив 200 одиниць вантажу. Виконується це замовлення частково за рахунок запасу 100 одиниць вантажу, що залишили у A_2. Запишемо перевезення 100 у комірку (2, 2). Запаси другого постачальника повністю витрачено. Потреби ПП B_2 задоволено не повністю, не вистачає 100 одиниць вантажу.

Наступна мінімальна вартість c_{32} = 7 розташована в комірці (3, 2). Потреби другого замовника 100 одиниць, що залишилися, задовольняються за рахунок третього постачальника, у якого залишаться ще 400 одиниць вантажу.

Мінімальна вартість c_{33} = 9 розташована в комірці (3, 3). Потреби третього замовника 300 одиниць вантажу задовольняються за рахунок третього постачальника, у якого залишаться ще 100 одиниць, які дістануться замовнику B_4. 100 одиниць вантажу, що залишилися, замовник B_4 отримає від фіктивного постачальника $A_ф$.

Отже, складено первинний опорний план перевезень:

$$X^*_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 \\ 200 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 300 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}.$$

Загальна вартість складеного плану:

$$Z_1 = 1 \cdot 200 + 2 \cdot 200 + 3 \cdot 100 + 7 \cdot 100 + 9 \cdot 300 + 12 \cdot 100 + 0 \cdot 100 = 5500 \text{ од.}$$

Оскільки план, що дає найменшу сумарну вартість перевезень, одержано методом мінімальної вартості, перевіримо його на оптимальність.

Далі розв'язуємо ТЗ методом потенціалів.

Отримано невироджений план, оскільки кількість зайнятих комірок становить $m + n - 1 = 7$.

Потенціали U_i ($i = 1, 2,\ldots, m$) і V_j ($j = 1, 2,\ldots,n$) знаходимо для зайнятих комірок за умовою $U_i^* + V_j^* = c_{ij}$ ($i = 1, 2,\ldots, m$; $j = 1, 2,\ldots,n$).

Запишемо систему рівнянь для визначення потенціалів:

$$\begin{cases} U_1 + V_4 = 1, \\ U_2 + V_1 = 2, \\ U_2 + V_2 = 3, \\ U_3 + V_2 = 7, \\ U_3 + V_3 = 9, \\ U_3 + V_4 = 12, \\ U_4 + V_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо цю систему. Нехай $U_3 = 0$, тоді $V_2 = 7 - U_3 = 7$;

$$V_3 = 9 - U_3 = 9, \quad V_4 = 12 - U_3 = 12,$$
$$U_1 = 1 - V_4 = -11, \quad U_4 = 0 - V_4 = -12,$$
$$U_2 = 3 - V_2 = -4, \quad V_1 = 2 - U_2 = 6.$$

Значення потенціалів записуємо в додаткових рядку й стовпці (табл. 3.5).

Перевіряємо виконання умови оптимальності для вільних комірок за допомогою системи нерівностей $U_i + V_j \le c_{ij}$ ($i = 1, 2,\ldots, m$; $j = 1, 2,\ldots,n$). Для кожної вільної комірки, у якій не виконується умова оптимальності, знаходимо різницю $\Delta_{ij} = (Ui + Vj) - c_{ij} > 0$.

Знайдено одну додатну оцінку $\Delta_{24} = 2$. Отже, план є неоптимальним.

Вибираємо комірку, у яку перенесемо вантаж. Ця комірка визначається максимальною оцінкою. У цьому випадку це комірка (2, 4), оскільки $\max\limits_{\Delta_{ij} > 0} \{\Delta_{24} = 2\}$.

Позначаємо комірку (2, 4) знаком «+» і від неї будуємо цикл, приєднуючи її до зайнятих комірок. Застосовуючи метод викреслювання, знаходимо цикл, вершини якого розташовані в комірках (2, 4), (3, 4), (3, 2) (2, 2).

Починаючи з комірки (2, 4) зі знаком «+», розставляємо по черзі у вершинах знаки «-» і «+» (див. табл. 3.5).

Таблиця 3.5

ПВ	ПП				Потенціали постачальників U_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	3	2	1 200	$U_1 = -11$
A_2	2 200	- 3 100	5	+ 6	$U_2 = -4$
A_3	6	+ 7 100	9 300	- 12 100	$U_3 = 0$
$A_ф$	0	0	0	0 100	$U_4 = -12$
Потенціали замовників V_j	$V_1 = 6$	$V_2 = 7$	$V_3 = 9$	$V_4 = 12$	

Визначимо величину θ, що перерозподіляється по циклу. Величина θ дорівнює найменшому з перевезень у комірках зі знаком «-»:

$$\theta = \min_{"-"}\{x_{34} = 100, x_{32} = 100\} = 100.$$

Величині $\theta = 100$ відповідають два мінімальні перевезення, тому при відніманні від них θ будь-яку із комірок, наприклад (3, 4), робимо вільною, а в другій комірці (3, 2) проставляємо фіктивне нульове перевезення, щоб у новому плані залишалося m + n – 1 = 7 зайнятих комірок.

Рухаючись по циклу, віднімаємо $\theta = 100$ від обсягів перевезень у комірках зі знаком «-» і додаємо до обсягів перевезень у комірках зі знаком «+». Одержуємо табл. 3.6.

Таблиця 3.6

ПВ	ПП				Потенціали постачальників U_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	3	2	1 200	$U_1 = -9$
A_2	2 200	3 0	5	6 100	$U_2 = -4$
A_3	6	7 200	9 300	12	$U_3 = 0$
$A_ф$	0	0	0	0 100	$U_4 = -10$
Потенціали замовників V_j	$V_1 = 6$	$V_2 = 7$	$V_3 = 9$	$V_4 = 10$	

Із табл. 3.6 виписуємо новий опорний план:

$$X^*_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 \\ 200 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 200 & 300 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}.$$

Перевіряємо план X^*_2 на оптимальність, для чого знову знаходимо нові потенціали й записуємо їх у табл. 3.6.

Критерій оптимальності виконується, отже, опорний план X^*_2 є оптимальним:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 \\ 200 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 200 & 300 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо його загальну вартість:

$Z_{min} = 1 \cdot 200 + 2 \cdot 200 + 3 \cdot 0 + 6 \cdot 100 + 7 \cdot 200 + 9 \cdot 300 + 0 \cdot 100 = 5300$ грош. од.

3.2. Розв’язання транспортної задачі за допомогою Excel

Наведемо приклад розв’язання транспортної задачі за допомогою Excel.

1. Створимо розрахунковий аркуш, що містить транспортну таблицю з початковими даними прикл. 3.1 (рис. 3.1, табл. 1) і таблицю, що містить змінні комірки B9:E11, цільову комірку F12 і комірки для введення залежностей (формул) математичної моделі для обмежень, тобто критеріїв обмежень B12:E12 , F9:F11 (див. рис. 3.1, табл. 2).

	A	B	C	D	E	F	G
1							Таблиця 1
2		B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i	
3	A_1	4	3	2	1	200	
4	A_2	2	3	5	6	300	
5	A_3	6	7	9	12	500	
6	Замовлення b_j	200	200	300	400		
7							Таблиця 2
8							
9						0	
10						0	
11						0	
12		0	0	0	0	0	

Рис. 3.1

2. Уведемо формули в комірки:

- цільова комірка F12 з формулою =СУММПРОИЗВ(B3:E5;B9:E11);
- комірки з критеріями обмежень:
  • B12 з формулою =СУММ(B9:B11), рівнозначною =B9+B10+B11;
  • C12 з формулою =СУММ(C9:C11), рівнозначною =C9+C10+C11;
  • D12 з формулою =СУММ(D9:D11), рівнозначною =D9+D10+D11;
  • E12 з формулою =СУММ(E9:E11), рівнозначною =E9+E10+E11;
  • F9 з формулою =СУММ(B9:E9), рівнозначною =B9+C9+D9+E9;
  • F10 з формулою =СУММ(B10:E10), рівнозначною =B10+C10+D10+E10;
  • F11 з формулою =СУММ(B11:E11), рівнозначною =B11+C11+D11+E11.

3. Виконаємо команду *Сервіс >Пошук розв'язку.*

4. У діалоговому вікні *Пошук розв'язку* розмістимо умову задачі:

- у полі *Встановити цільову* введемо адресу цільової комірки F12;
- у групі перемикачів виберемо для цільової комірки мінімальне значення;
- в полі *Змінні комірки* за допомогою миші або клавіатури введемо адреси змінних комірок B9:E11;
- клацнувши по кнопці *Додати,* викличемо діалоговий блок *Додавання обмеження;*
- уведемо обмеження:

$F9 = F3$, $F10 = F4$, $F11 = F5$; $B12 \le B6$, $C12 \le C6$, $D12 \le D6$, $E12 \le E6$.

5. Клацнемо по кнопці *Параметри* і для настроювання ітераційного циклу, а також для прискорення пошуку розв'язку активуємо параметри:

- *Лінійна модель;*
- *Від'ємні значення;*
- *Не показувати результати ітерацій.*

Решту параметрів залишимо виставленими за умовчанням.

6. Клацнемо по кнопці *Виконати,* і на екран буде виведено оптимальний розв'язок (рис. 3.2).

	A	B	C	D	E	F	G
1							Таблиця 1
2		B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i	
3	A_1	4	3	2	1	200	
4	A_2	2	3	5	6	300	
5	A_3	6	7	9	12	500	
6	Замовлення b_j	200	200	300	400		
7							Таблиця 2
8							
9		0	0	0	200	200	
10		200	0	0	100	300	
11		0	200	300	0	500	
12		200	200	300	300	5300	

Рис. 3.2

Мінімальна вартість перевезень Z_{min} = 5300 грош. од. матиме місце при такому плані перевезень:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 \\ 200 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 200 & 300 & 0 \end{pmatrix},$$

тобто

$$x_{14} = 200,\ \ x_{11} = 200,\ \ x_{14} = 100,\ x_{32} = 200,\ x_{33} = 300.$$

4. ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

4.1. Розв'язання задач нелінійного програмування

В економічних моделях більшість залежностей між незмінними й змінними чинниками лише в першому наближенні можна вважати лінійними, більш детальний розгляд дає можливість визначити їх нелінійність. Зазвичай такі показники, як прибуток, собівартість, капітальні витрати на виробництво, насправді залежать від обсягу виробництва, витрат ресурсів тощо і є нелінійними.

Загальна оптимізаційна задача формулюється таким чином: знайти вектор X = (x_1, x_2 ..., x_n), який задовольняє системі обмежень у вигляді рівностей і (або) нерівностей

$$\varphi_i\,(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i,\ i = 1, 2,..., m$$

і надає екстремального значення цільовій функції

$$Z = f\,(x_1, x_2, ..., x_n).$$

При цьому на деякі змінні $x_1, x_2,..., x_n$ можуть накладатися умови, за якими змінні мають бути невід'ємними цілими числами.

Якщо одна з функцій φ_i і (або) f є нелінійною, то отриману модель уважають *задачею нелінійного програмування* (ЗНП).

Максимум і мінімум функції поєднуються поняттям «*екстремум*», який може бути локальним або глобальним.

Уважатимемо, що функція $Z = f\,(x_1, x_2\ ..., x_n) = f(X)$ є двічі диференційовною в точці $X^* = (x^*_1, x^*_2..., x^*_n)$ і в деякому її околі. Якщо для всіх точок X цього околу $f(X^*) \ge f\,(X)$ або $f\,(X^*) \le f\,(X)$, то функція $f(X)$ має *локальний екстремум* у точці X^* (відповідно максимум або мінімум).

Функція $Z = f\,(X)$ у точці X^* заданої області D має *глобальний максимум* або *глобальний мінімум*, якщо нерівність $f(X^*) \ge f(X)$ або $f(X^*) \le f(X)$ виконується для будь-якої точки $X \in D$.

Функція $Z = f(X)$ у точці $X^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$, що задовольняє рівнянням зв'язку $\varphi_i(x_1, x_2,..., x_n)$ = 0 (i = 1, 2,..., m; $m < n$), має *умовний максимум (мінімум),* якщо нерівність $f(X^0) \geq f(X)$ або $f(X^0) \leq f(X)$ виконується для всіх точок X, координати яких задовольняють рівнянням зв'язку.

Досить часто при введенні граничних умов типу $x \leq b$ найбільшого значення функція набуває на межі в точці x = b.

Найбільше або найменше значення функції, незалежно від того, де знаходиться таке значення (усередині заданого інтервалу чи на його межі), називають *оптимумом*.

Задачі нелінійної оптимізації розв'язують різними методами, які дають можливість знаходити тільки локальний оптимум. Якщо ж передбачається, що задача має декілька оптимумів у заданому інтервалі $a_j \leq x_j \leq b_j$, то його необхідно розбити на *n* інтервалів і в кожному визначити локальний оптимум.

Слід зазначити, що в переважній більшості практичних, економічних і технічних задач оптимізації існує тільки один оптимум. Задачі нелінійної оптимізації за методами розв'язання поділяють на два класи:

- задачі безумовної оптимізації, розв'язання яких полягає в пошуку оптимуму цільової функції без жодних додаткових умов; такі задачі мають місце рідко, але метод їх розв'язання є основою для розв'язання практичних задач оптимізації;

- задачі умовної оптимізації, розв'язання яких полягає у визначенні цільової функції при додаткових умовах у вигляді обмежень і граничних умовах:

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow max\ (min);$$
$$\varphi i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m;$$
$$d_j \leq x_j \leq D_j,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

4.2. Розв'язання задач безумовної оптимізації

Методи, реалізовані в Excel, належать до методів пошуку. Уявімо людину біля підніжжя гори, яка прагне підкорити вершину. Як їй іти? Яким маршрутом? Щоб скласти маршрут, необхідно, по-перше, знати початкову точку, по-друге, вибрати шлях руху і, нарешті, визначити, яку точку слід уважати досягненням мети.

Шлях руху можна подати як послідовність кроків, а кожний крок при цьому визначається напрямом руху й відстанню, яку потрібно пройти в цьому напрямі. Очевидно, що від будь-якої точки до вершини є багато шляхів.

Якщо вважати, що гора – це поверхня в тривимірному просторі, то приклад, що розглядається, ілюструє ідею пошуку максимуму функції двох змінних. Пошук екстремуму функції довільної кількості змінних виконується аналогічно.

Пошук екстремуму полягає в такому:

1. Задати координати початкової точки пошуку x_{j0}, j = 1, 2,...,n.
2. У заданій точці x_{j0} визначити напрям руху на першому кроці β_1.
3. Визначити довжину кроку t_1.

4. Визначити координати кінця першого кроку x_{j1}.

5. Обчислити ознаку екстремуму на першому кроці.

6. Перевірити виконання ознаки екстремуму: якщо ознака виконується, то вважають, що екстремум знаходиться в точці x_{j1}, якщо ні, то виконують другий крок і т. д. до виконання умови, що характеризує досягнення екстремуму.

В Excel ознакою досягнення екстремуму є відносне збільшення функції на кожній ітерації:

$$\Delta F_k = \frac{F_{k+1} - F_k}{F_k}.$$

Екстремум уважають досягнутим, якщо виконується умова

$$\Delta F_k \le \Delta F_{зад},$$

де $\Delta F_{зад}$ – задана точність при розв'язанні задачі.

Методи вибору напряму й довжини кроку бувають різних типів. Розглянемо ті з них, які можна реалізувати в Excel.

Методами пошуку, або *методами нульового порядку*, називають такі методи, у яких для визначення напряму β і довжини кроку t застосовуються тільки значення цільової функції.

Градієнтні методи, або *методи першого порядку,* – це методи, у яких для визначення напряму β і довжини кроку t застосовуються значення перших похідних цільової функції та її градієнта.

Методами Ньютона, або *методами другого порядку,* називають методи, у яких для визначення напряму β і довжини кроку t застосовуються значення других похідних цільової функції.

Чим вищим є порядок методів, тим більшою є кількість обчислень на кожній ітерації, але тим меншою є кількість ітерацій, і навпаки. Градієнтні методи – найбільш поширені. Зазначимо, що для практичного розв'язання задачі суть їх знати не обов'язково.

4.3. Розв'язання задач умовної оптимізації

Існує багато методів розв'язання задач умовної оптимізації. Розглянемо реалізований в Excel метод множників Лагранжа, який полягає в перетворенні задачі умовної оптимізації на задачу безумовної оптимізації, що виконується таким чином.

Перетворюють обмеження-нерівності на рівняння:

$$V_i(x_j) = \varphi_i(x_j) - b_i,\ i = 1, 2,..., m;\ j = 1, 2,..., n.$$

Записують обмеження у вигляді $V_i(x_j) = 0$, $i = 1, 2,..., m; j = 1, 2,..., n$.

Аналогічно перетворюють граничні умови. Тоді задача умовної оптимізації набуде вигляду

$$Z = f(x_1, x_2,..., x_n) \to max\ (min)$$

при обмеженнях

$$V_i(x_j) = 0,\ i = 1, 2,...,m,\ j = 1, 2,..., n.$$

Отриману задачу записують у вигляді функції Лагранжа

$$L\ (x_j, \lambda_i) = f(x_j) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i V_i(x_j) \to max\ (min),\ i = 1, 2,..., m,\ j = 1, 2,..., n,$$

де λ_i – множник Лагранжа, що визначає, як зміниться цільова функція при зміненні правої частини в цьому обмеженні на одиницю.

Визначають частинні похідні й складають систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_j, \lambda_i)}{\partial x_j} = 0, j = 1,2,..., n, \\ \dfrac{\partial L(x_j, \lambda_i)}{\partial \lambda_i} = 0, i = 1,2,..., m. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знаходять значення λ_i.

Підставляють значення λ_i у функцію Лагранжа, яка при цьому буде задачею безумовної оптимізації.

Отриману задачу безумовної оптимізації розв'язують одним із методів, які було розглянуто вище.

4.4. Розв'язання задач нелінійного програмування за допомогою Excel

Розв'язання задач нелінійного програмування відрізняється від розв'язання задач лінійного програмування:

- визначаються початкові значення шуканих змінних x_{j0}, причому обов'язковою є вимога, щоб цільова функція в початковій точці не дорівнювала нулю: $F\ (x_{j0}) \neq 0$;

- у діалоговому вікні *Параметри Пошуку розв'язку* не треба вводити *Лінійна модель*.

Приклад 4.1. Обчислити розміри бака, що має форму паралелепіпеда заданого об'єму.

Об'єм бака $V = a\ b\ h$.

Площа повної поверхні бака є такою:

$$S = 2\ (a\ b) + 2\ (a + b)\ h = 2\ (a\ b + (a + b)\ h),$$

тоді вартість матеріалу

$$C = kS = 2\ k\ (\ a\ b + (a + b)\ h),$$

де k – вартість одиниці площі матеріалу.

Після введення цих величин сформулюємо задачу оптимізації таким чином: визначити розміри бака a, b, h, вартість якого не повинна бути більше $C_{зад}$, щоб об'єм V був максимальним, тобто

$$V = a\ b\ h \rightarrow max$$

при обмеженнях

$$2к\ (a\ b + (a + b)\ h) \leq C_{зад},$$

$$a > 0,\ b > 0,\ h > 0.$$

Для розв’язання задачі беремо такі конкретні значення:

k = 10 грош. од./м^2, $C_{зад}$ = 100 грош. од.

Розв’язання:

1. Створити форму для введення умов задачі (рис. 4.1).
2. Увести:

– залежності для об'єму й вартості;

– початкові значення x_{j0}, що дорівнюють одиниці, у комірки B3, C3, D3, E3, щоб виконувалася вимога $F(x_{j0}) \neq 0$.

3. У комірках, у яких буде наведено результат, задати кількість знаків після коми, вибравши команду меню *Формат>Комірки>Кількість*. У цьому прикладі – знаки після коми.

	A	B	C	D	E
1			Змінні		
2		a	B	h	
3	Значення	1	1	1	1
4			Залежності		
5		Позна-чення	Величина	Знак	Права частина
6	Об’єм	V	=B3*C3*D3	Макси-мальний	
7	Вартість	C	=20*(B3*C3+(B3+C3)*D3)	<=	100

Рис. 4.1

4. Виконати команду *Сервіс >Пошук розв’язку.*
5. В діалоговому вікні *Пошук розв’язку* ввести:
   - цільова комірка, максимальне значення;
   - змінні комірки B3:D3;
   - граничні умови

$$B3 \geq 0,\ C3 \geq 0,\ D3 \geq 0;\ C7 \leq E7.$$

6. Клацнути по кнопці *Параметри* й задати такі параметри:

– *Максимальний час* (у секундах), за умовчанням – 100;

– *Гранична кількість ітерацій,* за умовчанням – 100; якщо цих значень буде недостатньо, то на екрані з'явиться відповідне повідомлення;

– *Відносна похибка* – величина $\Delta F_{зад}$ в ознаці досягнення оптимального розв’язку $\Delta F_k = \frac{F_{k+1} - F_k}{F_k}$, за умовчанням – 0,000001, що забезпечує достатньо високу точність.

Решту параметрів залишимо виставленими за умовчанням.

Застосування того або іншого методу пошуку оптимального розв’язку залежить від типу нелінійності.

7. Клацнути по кнопці *Виконати,* і на екран буде виведено оптимальний розв’язок (рис. 4.2).

Отримано розв’язок: B3 = C3 = D3 = 1,29, тобто *a* = *b* = *h* = 1,29.

Після успішного завершення пошуку оптимального розв’язку на екрані відкриється діалогове вікно *Результати пошуку* розв’язку. Звіти про результати й обмеження аналогічні звітам для задач лінійного програмування.

	A	B	C	D	E
1			Змінні		
2		a	B	h	
3	Значення	1.29	1.29	1.29	
4			Залежності		
5		Позначення	Величина	Знак	Права частина
6	Об’єм	V	2.15	Максимальний	
7	Вартість	C	100.00	<=	100

Рис. 4.2

Звіт про стійкість містить такі дані (рис. 4.3):

– в табл. 1 – значення змінних, тобто результат розв’язку задачі;

– в табл. 2 – вартість і множник Лагранжа, який показує, як зміниться цільова функція при зміненні правої частини в обмеженні на одиницю.

Таблиця 1

Комірка	Ім'я	Результуюче значення	Нормований градієнт
B3	Значення a	1,29	0,00
C3	Значення b	1,29	0,00
D3	Значення h	1,29	0,00

Обмеження

Таблиця 2

Комірка	Ім'я	Результуюче значення	Множник Лагранжа
C9	Величина	100,00	0,03

Рис. 4.3

Після аналізу отриманого розв’язку стає очевидним, що шуканий бак має форму куба. Це підтверджує правильність математичної моделі й методу розв’язання.

5. ТЕОРІЯ ІГОР

5.1. Аналітичне розв’язання ігор зі змішаними стратегіями

У теорії прийняття рішень застосовують процедури вибору найкращої альтернативи з декількох можливих. Доброякісність вибраного розв’язку залежить від якості даних, що застосовуються для опису ситуації, у якій приймається рішення. Таким чином, процес прийняття рішення може відбуватися в таких умовах:

1) в умовах *визначеності*, коли дані визначено точно (наприклад, моделі лінійного програмування);

2) в умовах *ризику*, коли дані можна описати за допомогою розподілів імовірності;

3) в умовах *невизначеності*:

- коли дані не визначено, тобто їх важко або неможливо класифікувати за ступенем значущості для прийняття рішень;
- два або більше розумних супротивників мають конфліктуючі цілі, і кожний із них прагне оптимізувати свої рішення за рахунок інших; такі ситуації вивчає *теорія ігор*.

Прийняття рішень в умовах невизначеності, як і в умовах ризику, потребує визначення *альтернативних дій (стратегій)* супротивників, яким відповідають платежі.

На практиці часто доводиться розв’язувати задачі, у яких необхідно приймати рішення в умовах невизначеності, коли дві (або більше) сторони мають різні цілі, а результати будь-якої дії кожної із сторін залежать від дій партнера. Такі ситуації належать до *конфліктних*. У конфліктних ситуаціях природа не розглядається як недоброзичливець.

В економіці часто мають місце різні конфліктні ситуації. Це, наприклад, реклама конкуруючих товарів, взаємовідносини між постачальником і споживачем, покупцем і продавцем, банком і клієнтом. Тут конфліктна ситуація породжується відмінністю інтересів партнерів і прагненням кожного з них приймати оптимальні рішення, що реалізують поставлені цілі найбільшою мірою. При цьому кожному партнеру доводиться зважати не тільки на свої цілі, але й на цілі партнера, і враховувати невідомі наперед рішення, які ці партнери прийматимуть.

Для правильного розв’язання задач із конфліктними ситуаціями необхідні обґрунтовані методи, розроблені з допомогою математичної теорії конфліктних ситуацій – *теорії ігор.*

Задача теорії ігор – розроблення рекомендацій щодо найдоцільнішої (у тому або іншому значенні) поведінки учасників конфлікту.

Математичну модель конфліктної ситуації називають *грою*, сторони, що беруть участь у конфлікті, – *гравцями*, а результат конфлікту – *виграшем*. Кожний гравець прагне до виграшу, відповідно до цієї мети гравці перебувають у суперечності.

Для кожної гри визначаються *правила*: система умов, що визначають варіанти дій гравців; обсяг інформації кожного гравця про поведінку партнерів; виграш, до якого приводить кожна сукупність дій, яка зазвичай задається кількісно.

Гру називають *парною*, якщо в ній беруть участь два гравці, і *множинною* – якщо більше двох.

Вибір і виконання однієї з передбачених правилами дій називають *ходом гравця*. *Особистий хід* – це свідомий вибір гравцем однієї з можливих дій. *Випадковий хід* – випадково вибрана дія. Безліч ходів, що приводять гру до кінцевого стану, називають *партією*.

Гру називають *грою з нульовою сумою* (або *антагоністичною*), якщо виграш одного з гравців дорівнює програшу іншого. Програш розглядається як негативний виграш, тоді сума виграшів сторін дорівнює нулю.

Стратегія гравця – сукупність правил, що визначають вибір гравцем дії для кожного особистого ходу залежно від ситуації, що склалася.

Гру називають *скінченною*, якщо кожний гравець має скінченну кількість стратегій, і *нескінченною,* якщо навпаки.

Для того щоб *розв'язати* гру (або знайти її *розв'язок*), для кожного гравця необхідно вибрати стратегію, що задовольняє *умові оптимальності*: один із гравців повинен отримати максимальний виграш, коли інший дотримується своєї стратегії. Водночас другий гравець повинен мати мінімальний програш, якщо перший дотримується своєї стратегії. Такі стратегії називають *оптимальними*.

Якщо гра повторюється багато разів, то гравців може цікавити не виграш або програш у кожній конкретній партії, а *середній виграш (програш)* у всіх партіях.

Нехай гравець A має m особистих стратегій A_i (i = 1, 2,...,m), а гравець B – n стратегій B_j (j = 1, 2,..., n). Унаслідок вибору гравцями будь-якої пари стратегій A_i і B_j (i = 1, 2,...,m; j = 1, 2,...,n) однозначно визначається виграш a_{ij} гравця A і програш ($-a_{ij}$) гравця B. Припустимо, що значення a_{ij} є відомими для будь-якої пари стратегій (A_i, B_j).

Матриця $P = (a_{ij})$ (i = 1,2,...,m; j = 1,2,...,n), елементами якої є виграші, що відповідають стратегіям A_i і B_j, називають *платіжною матрицею,* або *матрицею гри*:

$$P = \left\| a_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Рядки матриці відповідають стратегіям A_i гравця A, а стовпці – стратегіям B_j гравця B. Матриця $\left\| a_{ij} \right\|$ визначає правила проведення гри.

Розглянемо гру розміром $m \times n$ із матрицею $P = (a_{ij})$ (i = 1, 2,…,m; j = 1, 2,...,n). Визначимо найкращу серед стратегій $A_1, A_2, \dots, A_m$.

Нехай гравець A вибирає деяку стратегію A_i, тоді в найгіршому випадку (наприклад, якщо вибір гравця A стане відомим гравцю B) він отримає виграш $\alpha_i = \min\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}$ (найменше число в i-му рядку платіжної матриці). Діючи найбільш обережно й розраховуючи на найрозумнішу поведінку супротивника, гравець A повинен вибрати таку стратегію, щоб максимізувати свій мінімальний виграш, тобто вибрати найбільше значення (i = 1, 2,...,m), яке називають *нижньою ціною гри*, або *максимальним виграшем (максиміном)*. Це гарантований виграш гравця A при будь-якій стратегії гравця B:

$$\alpha = \max_{i=1,2,\dots,m} \alpha_i = \max_{i=1,2,\dots,m} \left(\min_{j=1,2,\dots,n} a_{ij} \right).$$

Стратегію A_i, що відповідає максиміну, називають *максимінною*.

Гравець B вибирає стратегію B_j виходячи з принципу, що його програш не буде більше максимального зі значень елементів j-го стовпця матриці. Серед усіх чисел β_j (j = 1, 2,..., n) він вибирає таке, при якому мінімізується його максимальний програш $\beta = \min\limits_{j=1,\dots,n} \beta_j$. Назвемо це число *верхньою ціною гри*, або *мінімальним виграшем (мінімаксом)*. Це гарантований програш гравця В:

$$\beta = \min_{j=1,\dots,n} \beta_j = \min_{j=1,\dots,n} \max_{i=1,\dots,m} a_{ij}.$$

Стратегію B_j, що відповідає мінімаксу, називають *мінімаксною*.

Нижня й верхня ціни завжди зв'язані нерівністю $\alpha \le \beta$.

Принцип вибору гравцями “найобережніших” мінімаксних і максимінних стратегій називають *принципом мінімаксу*.

Якщо верхня й нижня ціни гри збігаються, то загальне значення верхньої й нижньої цін гри $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = v$ називають *чистою ціною гри (значенням гри),* а гру – *повністю визначеною (рівноважною)*, або *грою з сідловою точкою* ν.

Мінімаксні стратегії, що відповідають ціні гри, – *оптимальні стратегії*, а їх сукупність – *оптимальний розв’язок гри*. У цьому випадку гравець A одержує максимальний гарантований (незалежно від поведінки гравця B) виграш ν, а гравець B – мінімальний гарантований (незалежно від поведінки гравця A) програш ν.

Аналітичне розв’язання гри зі змішаними стратегіями

Якщо гра не має сідлової точки, тобто $\alpha < \beta$, то застосування чистих стратегій не дає оптимального розв’язку. Для його пошуку гравці використовують не одну, а декілька стратегій, які вибирають випадковим чином.

Випадковий вибір гравцем А своїх чистих стратегій $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_m$ з імовірністю $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_m$, причому $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$, $p_i \ge 0$ (i = 1, 2,...,m), називають *змі-*

шаною стратегією S_A гравця A, яка задається у вигляді m-вимірного вектора ймовірності $S_A = (p_1, p_2,\dots,p_i,...,p_m)$.

Аналогічно для гравця B визначають n-вимірний вектор $S_B = (q_1, q_2,...,q_j,...,q_n)$, що відповідає його змішаним стратегіям.

Чисті стратегії є окремим випадком змішаних стратегій.

За принципом мінімаксу визначається *оптимальній розв'язок* гри – пара оптимальних змішаних стратегій S^*_A, S^*_B з такою властивістю: якщо один із гравців дотримується своєї оптимальної стратегії, то для іншого не може бути вигідним відхилятися від своєї. Виграш – ціна гри ν – задовольняє нерівності $\alpha \le \nu \le \beta$.

Нехай у грі розміром $m \times n$ знайдено розв'язок, що складається з оптимальних змішаних стратегій $S^*_A = (p_1^*,p_2^*,..., p_m^*)$ і $S^*_B = (q_1^*, q_2^*,...,q_n^*)$.

Чисті стратегії гравців A і B, для яких імовірності p_i і q_j є відмінними від нуля, називають *активними*.

Найпростіша матрична скінченна гра – *гра розміром 2x2*, яку задано платіжною матрицею $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Для гри, яка не має сідлової точки, оптимальний розв'язок існує й визначається парою змішаних стратегій $S^*_A = (p_1^*,p_2^*)$ і $S^*_B = (q_1^*, q_2^*)$. Визначимо їх.

Середній виграш гравця А, якщо він використовує оптимальну змішану стратегію $S^*_A = (p_1^*, p_2^*)$, а гравець В – чисту стратегію B_1, що відповідає першому стовпцю платіжної матриці Р, дорівнює ціні гри v, яка визначається як математичне сподівання середнього виграшу, що є випадковою величиною $a_{11}p^*_1 + a_{21}p^*_2 = v$. Цей середній виграш одержує гравець А, якщо гравець В застосовує чисту стратегію B_2, тобто $a_{12}p^*_1 + a_{22}p^*_2 = v$. Ураховуючи, що $p^*_1 + p^*_2 = 1$, одержуємо систему рівнянь для визначення оптимальної стратегії S^*_A і ціни гри v:

$$\begin{cases} a_{11}p^*_1 + a_{21}p^*_2 = v, \\ a_{12}p^*_1 + a_{22}p^*_2 = v, \\ p^*_1 + p^*_2 = 1. \end{cases} \tag{5.1}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо оптимальну стратегію $S^*_A = (p_1^*,p_2^*)$:

$$p^*_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad p^*_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{5.2}$$

Підставимо значення p^*_1 і p^*_2 в одне із рівнянь (5.1):

$$\nu \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{5.3}$$

Відшукаємо оптимальну стратегію S^*_B гравця В. При будь-якій чистій стратегії гравця A (A_1 або A_2) середній програш гравця B дорівнює ціні гри v, тобто

$$\begin{cases} a_{11}q^*_1 + a_{12}q^*_2 = v, \\ a_{21}q^*_1 + a_{22}q^*_2 = v, \\ q^*_1 + q^*_2 = 1. \end{cases} \tag{5.4}$$

Тоді оптимальна стратегія S^*_B (q^*_1, q^*_2) визначається формулою

$$q^*_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \; q^*_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{5.5}$$

5.2. Графічне розв’язання матричних ігор

Нехай гру задано платіжною матрицею $P = (a_{ij})$ (i, j = 1,2). Відкладемо на осі абсцис одиничний відрізок A_1A_2. Лівий кінець відрізка (x = 0) відповідає стратегії A_1, правий – стратегії A_2.

Усі проміжні точки x цього відрізка відповідають деяким змішаним стратегіям S_A першого гравця, де $p_1 = 1 - x$, $p_2 = x$. На кінцях вибраного відрізка проведемо прямі, перпендикулярні до осі абсцис, на них відкладатимемо виграші при відповідних чистих стратегіях A_1 і A_2. Якщо гравець В застосовує стратегію B_1, то виграш при використанні чистих стратегій A_1 і A_2 становить a_{11} і a_{21}. Відкладемо ці точки на прямих і з'єднаємо їх прямою B_1B_1. Аналогічно можна побудувати відрізок B_2B_2, що відповідає стратегії B_2 гравця B (рис. 5.1).

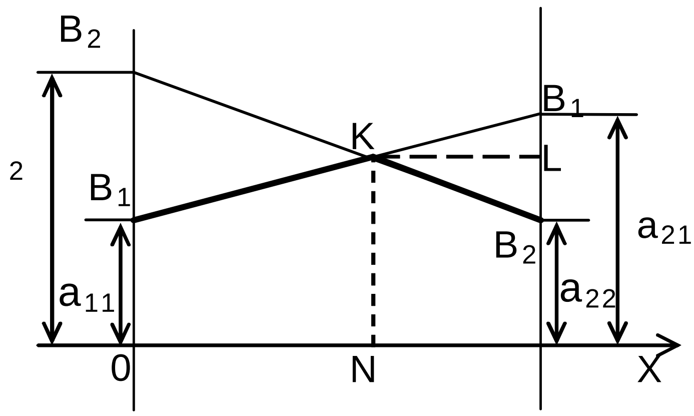


Рис. 5.1

Щоб визначити координати точки К, знайдемо рівняння прямих B_1B_1 і B_2B_2, на перетині яких вона лежить. Пряма B_1B_1 проходить через точки (0, a_{11}) і (1, a_{21}). Підставляючи їх по черзі в рівняння прямої $y = kx + b$, одержимо $y = k_1x + b_1$. Аналогічно пряма B_2B_2 проходить через точки (0, a_{21}) і

(1, a_{22}), її рівняння $y = k_2x + b_2$. Розв'язавши систему $\begin{cases} y = k_1x + b_1; \\ y = k_2x + b_2, \end{cases}$ маємо координати точки K – x і y. Тоді $p^*_2 = x$, $p^*_1 = 1-x$ і $v = y$.

Використовуючи геометричну інтерпретацію, можна знайти *розв'язок ігор розміром* $2 \times n$. Кожній із n стратегій гравця B відповідає пряма. Побудувавши прямі, знаходимо нижню межу виграшу. Точка K, що лежить на нижній межі, для якої величина виграшу є найбільшою, визначає ціну гри та її розв'язок. При цьому активним стратегіям гравця B відповідають прямі, що перетинаються в точці K. Можна знайти також значення q_j, що відповідають активним стратегіям гравця B.

Аналогічно можна розв'язати *гру розміром* $m \times 2$. У цьому випадку будують верхню межу виграшу і на ній визначають мінімум.

Слід зазначити, що геометричні побудови має сенс використовувати для визначення активних стратегій гравців. Потім розв'язок гри можна отримати за допомогою формул (5.1) – (5.5) або з геометричних міркувань. Ці формули можна використовувати, оскільки з відповідної матриці виключаються всі стратегії, окрім активних, і вона містить два рядки й два стовпці.

5.3. Розв'язання матричних ігор методами лінійного програмування

Гра розміром $m \times n$ у загальному випадку не має геометричної інтерпретації. Її розв'язання трудомістке при великих m і n, проте цього можна уникнути, звівши її до ЗЛП.

Нехай гру розміром $m \times n$ задано платіжною матрицею $P = (a_{ij})$ (i = 1, 2,…, m; j = 1, 2,…,n). Гравець A має стратегії A_i $(i = 1, 2,...,m)$, а гравець B – стратегії B_j $(j = 1, 2,..., n)$. Необхідно визначити оптимальні стратегії

$$S^*_A = (p^*_1, p^*_2,..., p^*_m) \text{ і } S^*_B = (q^*_1, q^*_2,...,q^*_n),$$

де

$$p^*_1 + p^*_2 +...+ p^*_m = 1, \;\; q^*_1 + q^*_2 + ...+ q^*_n = 1.$$

Застосування гравцем А оптимальної стратегії S^*_A має забезпечити йому при будь-яких діях гравця В середній виграш, не менший від ціни гри v, тобто необхідним є виконання співвідношення $\sum_{i=1}^{m} x_i^* a_{ij} \geq v$ $(j = 1, 2,...,n)$. Ціна гри є невідомою, але вважаємо, що $v > 0$. Цього можна добитися, зробивши всі елементи матриці P додатними ($a_{ij} \geq 0$), додаючи до всіх a_{ij} деяке додатне число, що дорівнює абсолютному значенню елемента, найменшого серед усіх від'ємних елементів матриці.

Для оптимальної стратегії S^*_A усі середні виграші є не меншими від ціни гри, тому одержуємо систему нерівностей

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{m1}p_m \geq v, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{m2}p_m \geq v, \\ \qquad ... \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + ... + a_{mn}p_n \geq v. \end{cases}$$

Кожну з нерівностей поділимо на число v > 0 і введемо нові змінні $x_1 = \frac{p_1}{v}$, $x_2 = \frac{p_2}{v}, ..., x_m = \frac{p_m}{v}$.

Тоді система набуде вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \geq 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \geq 1, \\ \qquad ... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq 1. \end{cases} \tag{5.6}$$

Мета гравця A – максимізувати свій гарантований виграш – ціну гри. Поділивши рівність $p_1 + p_2 +...+ p_m = 1$ на $v > 0$, одержимо змінні x_i (i = 1, 2,...,m), які задовольняють умові $x_1 + x_2 +...+ x_m = 1/v$. Максимізація ціни гри v еквівалентна мінімізації величини 1/v, тому задачу можна сформулювати таким чином: визначити такі значення змінних $x_i \geq 0$, що задовольняють обмеженням (5.6), а лінійна функція при цьому набуває мінімуму. Це ЗЛП, розв'язуючи яку, знаходимо x_i і 1/v, а потім – оптимальний розв'язок $p^*_i = vx_i$ (i = 1, 2,...,m) та оптимальну стратегію S^*_A.

Стратегія S^*_B при будь-яких стратегіях гравця A має забезпечити програш, не більший за величину v, тобто необхідним є виконання співвідношення $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j^* \leq v$ (i = 1, 2,...,m), отже, змінні $q_1, q_2,...,q_n$ мають задовольняти нерівностям

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + ... + a_{1n}q_n \leq v, \\ \qquad ... \\ a_{m1}q_m + a_{m2}q_2 + ... + a_{mn}q_n \leq v. \end{cases}$$

Якщо позначити $y_j = \frac{q_j}{v}$ (j = 1, 2,...,n), то

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \leq 1, \\ \qquad ... \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n \leq 1. \end{cases} \tag{5.7}$$

Елементи змішаних стратегій повинні задовольняти умовам

$$q_1 + q_2 + ... + q_n = 1,$$

які в нових змінних ($q_j = y_j v$, j = 1, 2,...,n) мають вигляд

$$y_1 + y_2 + ... + y_n = \frac{1}{v}.$$

Для визначення оптимальної стратегії $S^*_B = (q^*_1, q^*_2, ..., q^*_n)$ необхідно врахувати, що гравець В прагне мінімізувати гарантований виграш, тобто знайти $max\frac{1}{v}$.

Гру зведено до ЗЛП: визначити значення змінних $y_i \geq 0$, які задовольняють лінійним обмеженням (5.7) і максимізують функцію $L = \sum_{j=1}^{n} y_j$.

Розв’язуючи задачу, знаходимо y_i і $1/v$, потім оптимальний розв’язок $q^*_j = vy_j$ (j = 1, 2,...,n) і оптимальну стратегію $S^*_{B.}$

Отримані для гравців A і B ЗЛП утворюють симетричну пару двоїстих задач. Властивість симетричності дає можливість розв’язати одну з задач з малими обчислювальними витратами, а другу задачу розв’язують за теоремами двоїстості.

Для розв’язання довільної скінченної гри розміром $m \times n$ рекомендується дотримуватися такої послідовності:

1. Виключити з платіжної матриці явно невигідні стратегії порівняно з іншими. Такими стратегіями для гравця A (гравця B) є ті, яким відповідають рядки (стовпці) з елементами, явно меншими (більшими) від елементів інших рядків (стовпців).
2. Визначити верхню й нижню ціни гри й перевірити, чи має гра сідлову точку. Якщо вона існує, то стратегії гравців, що їй відповідають, є оптимальними, а ціна збігається з верхньою (нижньою) ціною.
3. Якщо сідлової точки немає, то розв’язок необхідно шукати в змішаних стратегіях. Ігри розмірами 2×2, $2 \times n$, $m \times 2$ можна розв’язати геометрично.

Приклад 5.1. Підприємство може випускати два види продукції A_1 і A_2, одержуючи при цьому прибуток, що залежить від попиту, який може бути в одному з чотирьох станів: B_1, B_2, B_3, B_4. Задано матрицю

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1{,}5 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Елементи матриці a_{ij} (i = 1, 2,…,m; j = 1, 2,…,n) характеризують прибуток, який отримає підприємство від виготовлення i-ї продукції при j-му стані попиту.

Визначити оптимальні пропорції продукції, що виготовляється, коли забезпечується середня величина прибутку при будь-якому стані попиту, уважаючи його невизначеним.

Розв’язання. Задачу зводимо до ігрової моделі, коли гру підприємства A проти попиту B задано платіжною матрицею A.

Визначаємо верхню й нижню ціни гри й перевіряємо, чи має гра сідлову точку:

$$\alpha = \max_{i=1,2} (\min_{j=1,2,3,4} a_{ij}) = \max_{i=1,2} (1{,}5;\ 1) = 1{,}5;$$

$$\beta = \min_{j=1,2,3,4} (\max_{i=1,2} a_{ij}) = \min_{j=1,2,3,4} (4;\ 4;\ 2;\ 3) = 2.$$

Отже, сідлової точки немає. Розв'язок гри $S^*_A = (p^*_1,\ p^*_2)$, $S^*_B = (q^*_1,\ q^*_2,\ q^*_3,\ q^*_4)$ і ν слід шукати в змішаних стратегіях.

Відкладаємо на осі абсцис (рис. 5.2) одиничний відрізок A_1A_2. На лівій вертикальній осі відкладаємо точки $a_{11} = 2$, $a_{12} = 4$, $a_{13} = 1{,}5$, $a_{14} = 3$, що відповідають стратегіям B_1, B_2, B_3, B_4, на правій – точки $a_{21} = 4$, $a_{22} = 3$, $a_{23} = 2$, $a_{24} = 1$, що відповідають тим самим стратегіям.

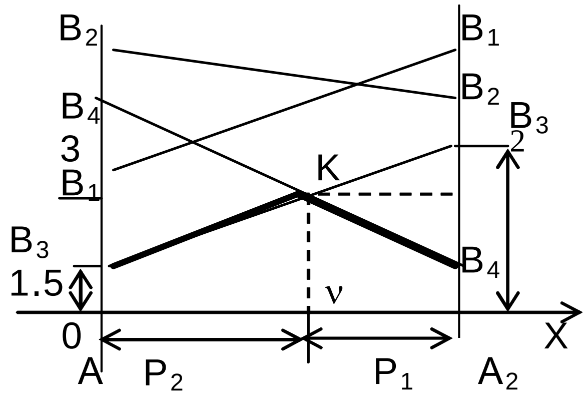


Рис. 5.2

Точки з'єднуємо відрізками й одержуємо прямі: $a_{11} = 2$ з'єднуємо з $a_{21} = 4$ і одержуємо пряму B_1B_1; $a_{12} = 4$ – з $a_{22} = 3$, одержуємо пряму B_2B_2 і т.д. Ламана B_3KB_4 – нижня межа виграшу гравця A. Активні стратегії гравця B – третя й четверта, тоді $q^*_1 = 0$, $q^*_2 = 0$. Отже, платіжну матрицю можна спростити: $A = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Оптимальну стратегію $S^*_A = (p^*_1,\ p^*_2)$ визначає точка K з координатами (x, y). Ордината дорівнює ціні гри: $y = v$, абсциса $x = p^*_2$.

Щоб визначити координати точки K, знайдемо рівняння прямих B_3B_3 і B_4B_4, на перетині яких вона лежить. Пряма B_3B_3 проходить через точки (0; 1,5) і (1; 2). Підставляючи їх по черзі в рівняння прямої $y = kx + b$, одержимо рівняння $y = 0{,}5x + 1{,}5$. Аналогічно пряма B_4B_4 проходить через точки (0; 3) і (1; 1), її рівняння $y = -2x + 3$. Розв'язавши систему $\begin{cases} y = 0{,}5x + 1{,}5; \\ y = -2x + 3, \end{cases}$ маємо координати точки K: $x = 0{,}6$ і $y = 1{,}8$. Тоді $p^*_2 = x = 0{,}6$, $p^*_1 = 1 - x = 0{,}4$ і $v = y = 1{,}8$.

Отже, $S^*_A = (0{,}4;\ 0{,}6)$, тобто гравець A застосовує стратегію A_1 з імовірністю 0,4, а стратегію A_2 – з імовірністю 0,6. При цьому його виграш в середньому становить $v = 1{,}8$ од.

За допомогою формул (5.4), (5.5) знайдемо оптимальні стратегії гравця В. Запишемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 1{,}5q_3 + 3q_4 = v, \\ 2q_3 + q_4 = v, \\ q_3 + q_4 = 1. \end{cases}$$

Оскільки ціну гри вже знайдено: v = 1,8, систему можна спростити:

$$\begin{cases} 1{,}5q_3 + 3q_4 = 1{,}8; \\ 2q_3 + q_4 = 1{,}8. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, одержимо оптимальну стратегію попиту *B*:

$$S^*_B = (0;\ 0;\ 0{,}8;\ 0{,}2).$$

З економічної точки зору можна зробити висновок, що підприємство повинно випустити 40 % продукції A_1 і 60 % продукції A_2, а 80 % оптимального попиту перебуває в стані B_3 і в 20% – у стані B_4.

Приклад 5.2. Знайти розв'язок гри, заданої матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Матриця має розмірність 2 × 4. На рис. 5.3 побудовано прямі, що відповідають стратегіям гравця *А*. Жирною лінією зображено верхню межу виграшу гравця *А*.

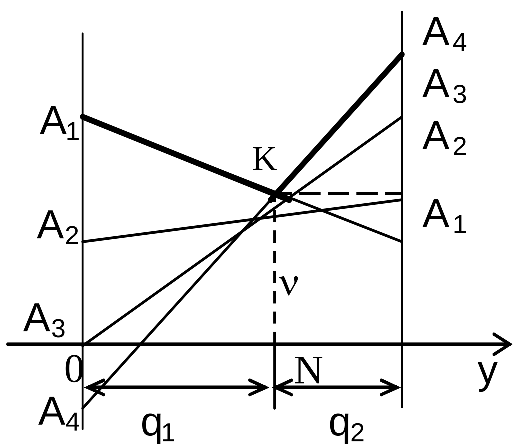


Рис. 5.3

Знайшовши верхню й нижню ціни гри, робимо висновок, що гра не має сідлової точки.

Точка K визначає ціну гри. Активні стратегії для гравця A – перша й четверта. Отже, платіжну матрицю можна спростити: $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$. Стратегію $S^*_B = (q_1,\ q_2)$ і ціну гри v знаходимо геометричним способом, визначивши рівняння прямих A_1A_1 і A_4A_4 і координати точки K. Маємо

$$S^*_B = (3/8;\ 5/8),\ v = 27/8.$$

Стратегію $S^*_A = (p^*_1,\ p^*_2,\ p^*_3,\ p^*_4) = (p^*_1,\ 0,\ 0,\ p^*_4)$ знайдемо за формулами (5.2), (5.4): $S^*_A = (7/8;\ 0;\ 0;\ 1/8)$.

Приклад 5.3. Магазин може завезти в різних пропорціях товари трьох типів – A_1, A_2, A_3. Їх реалізація й прибуток магазину залежать від виду товару й стану попиту.

Передбачається, що попит може мати три стани (B_1, B_2, B_3) і є непрогнозованим. Визначити оптимальні пропорції випуску товарів з умови максимізації середнього гарантованого прибутку при такій матриці прибутку:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Визначимо нижню й верхню ціни гри:

$$\alpha = max\,\{3;\ 2;\ 4\} = 4;\ \beta = min\,\{9;\ 6;\ 8\} = 6.$$

Оскільки $\alpha \neq \beta$, сідлової точки немає й оптимальний розв'язок слід шукати в змішаних стратегіях гравців: $S^*_A = (p_1,\ p_2,\ p_3)$ і $S^*_B = (q_1,\ q_2,\ q_3)$. Позначивши $x_i = \dfrac{p_i}{v}$ (i = 1, 2, 3) і $y_j = \dfrac{q_j}{v}$ (j = 1, 2, 3), складемо дві взаємодвоїсті ЗЛП.

Для визначення оптимальної стратегії гравця A маємо задачу лінійного програмування: знайти $Z_{min} = x_1 + x_2 + x_3$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 7x_3 \geq 1; \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 1; \\ 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 1, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1,\ 2,\ 3.$$

Двоїста задача для визначення оптимальної стратегії гравця B формулюється так: знайти $L_{max} = y_1 + y_2 + y_3$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 3y_1 + 6y_2 + 8y_3 \le 1, \\ 9y_1 + 4y_2 + 2y_3 \le 1, \\ 7y_1 + 5y_2 + 4y_3 \le 1, \end{cases}$$

$$y_j \ge 0, \; j = 1, 2, 3.$$

Розв'язуємо симплексним методом одну із задач, наприклад другу, оскільки для неї перший базисний розв'язок буде допустимим. Отже, маємо Y = (1/2; 0; 17/27; 2/27; 0; 1/9), L_{max} = 5/27.

Визначимо відповідність між змінними взаємодвоїстих ЗЛП та оптимальний базисний розв'язок початкової задачі за допомогою теорем двоїстості:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 2/27 & 0 & 1/9 & 1/2 & 0 & 17/27 \end{array}$$

Оптимальний базисний розв'язок початкової задачі: X = = (2/27; 0; 1/9; 1/2; 0; 17/27), причому $Z_{min} = L_{max}$ = 5/27. Знаходимо ціну гри $v = \dfrac{1}{L_{\max}} = \dfrac{1}{Z_{\min}}$ = 27/5 = 5,4 та оптимальну стратегію S^*_A = (p_1, p_2, p_3), використовуючи $p^*_i = vx_i$ (i = 1, 2, 3), тобто S^*_A = (0,4; 0; 0,6).

Отже, підприємство має виготовити 40 % продукції A_1 і 60 % продукції A_3, а продукцію A_2 не виготовляти.

Оптимальну стратегію $S^*_B = (q_1, q_2, q_3)$ одержуємо аналогічно: $q^*_j = vy_j$ (j = 1, 2, 3), тобто S^*_B = (0,2; 0; 0,8; 0) (тутураховано, що другий стовпець початкової матриці було вилучено як невигідний). Таким чином, 20 % оптимального попиту перебуває в стані B_1 і 80 % – у стані B_3.

5.4. Розв'язання матричних ігор за допомогою Excel

Розглянемо розв'язання матричної гри розміром $m \times n$ на прикладі моделі конфліктної *бізнес-ситуації «*Боротьба за ринки». Дві фірми *A* і *B* виготовляють сезонний товар одного типу, який надходить на ринок у моменти часу i ($i = 1, 2,..., n$) і j ($j = 1, 2,..., n$). Мета обох фірм – розорити конкуруючу фірму й стати монополістом на ринку, пішовши на деякі збитки.

Товар має таку властивість: чим довше товар знаходиться у виробництві, тим вище його якість. Спосіб боротьби один: поставляти товар вищої якості, при цьому робити це раніше, ніж конкуруюча фірма. Фірма, що поставила товар раніше, отримує гарантований прибуток *V*, а фірма, що запізнилася – збиток -*V.*

Сторони *A* і *B* мають протилежні інтереси. Конфлікт антагоністичний.

Фірма *A* має набір стратегій $S_A = \{A_1, A_2,.., A_n\}$ постачання товару в момент часу i, а фірма В – набір $S_B = \{B_1, B_2,.., B_n\}$ постачання товару в момент часу j.

Можливими є три варіанти порівняння моментів постачання товару: $i < j$, $i = j$, $i > j$.

Розглянемо завдання при $n = 4$.

Фірма А має набір стратегій $S_A = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ постачання товару в момент часу i, а фірма B – набір $S_B = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ постачання товару в момент часу j. За умови трьох можливих варіантів порівняння моментів постачання товару $i < j$, $i = j$, $i > j$ елементи платіжної матриці a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ можна обчислити за формулою

$$a_{ij} = \begin{cases} c(j - i) \text{ при } i < j; \\ c(n\text{-}i + j)/2 \text{ при } i = j; \\ c(n\text{-}i + 1) \text{ при } i > j. \end{cases}$$

У табл. 5.1 наведено платежі, отримані за цією формулою для моделі конфліктної ситуації «Боротьба за ринки».

Таблиця 5.1

Набір стратегій A_i	Набір стратегій B_j			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	$a_{11} = 2c$	$a_{12} = c$	$a_{13} = 2c$	$a_{14} = 3c$
A_2	$a_{21} = 3c$	$a_{22} = 2c$	$a_{23} = c$	$a_{24} = 2c$
A_3	$a_{31} = 2c$	$a_{32} = 2c$	$a_{33} = 2c$	$a_{34} = c$
A_4	$a_{41} = c$	$a_{42} = c$	$a_{43} = c$	$a_{44} = 2c$

Визначити оптимальні стратегії поведінки фірм A і B, їхній гарантований середній прибуток (збиток), використовуючи зведення матричної гри до задачі лінійного програмування. Зробити висновки про те, яку кількість товару (у відсотках від загальної кількості товару, що випускається фірмами) і в які моменти часу необхідно фірмам випустити на ринок.

Сформулюємо двоїсту задачу лінійного програмування.

Для фірми A мінімізувати функцію

$$Z = \sum_{i=1}^{4} x_i \to \min$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_{41}x_4 \geq 1; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + a_{42}x_4 \geq 1; \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{43}x_4 \geq 1; \\ a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4 \geq 1, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

Таким чином, необхідно знайти Z і x_1, x_2, x_3, x_4. Розв’язання економічної задачі зводиться до такого:

$$v = \frac{1}{Z_{min}};\ p_1 = vx_1,\ p_2 = vx_2,\ p_3 = vx_3,\ p_4 = vx_4.$$

Для фірми B максимізувати функцію

$$L = \sum_{i=1}^{4} y_i \rightarrow \max$$

при обмеженнях

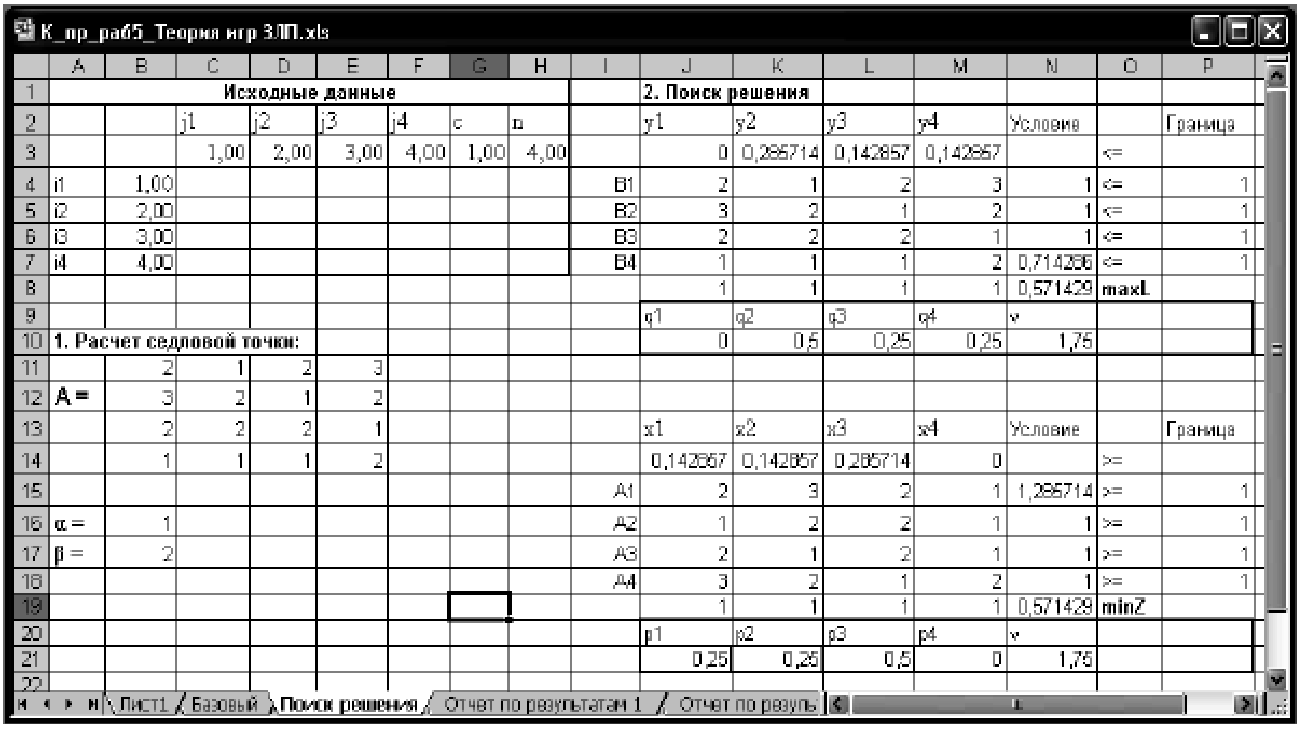
$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + a_{14}y_4 \le 1; \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24}y_4 \le 1; \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + a_{34}y_4 \le 1; \\ a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 + a_{44}y_4 \le 1, \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0.$$

Таким чином, необхідно знайти L і y_1, y_2, y_3, y_4. Розв’язання економічної задачі зводиться до такого:

$$v = \frac{1}{L_{max}};\ q_1 = vy_1,\ q_2 = vy_2,\ q_3 = vy_3,\ q_4 = vy_4.$$

На робочому аркуші побудуємо таблицю, подібну до табл. 5.1. Приклад оформлення робочого аркуша при $n = 4$, $c = 1$ показано на рис. 5.4.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	Исходные данные									2. Поиск решения						
2			j1	j2	j3	j4	c	n		y1	y2	y3	y4	Условие		Граница
3			1,00	2,00	3,00	4,00	1,00	4,00		0	0,285714	0,142857	0,142857		<=	
4	i1	1,00							B1	2	1	2	3	1	<=	1
5	i2	2,00							B2	3	2	1	2	1	<=	1
6	i3	3,00							B3	2	2	2	1	1	<=	1
7	i4	4,00							B4	1	1	1	2	0,714286	<=	1
8										1	1	1	1	0,571429	maxL	
9										q1	q2	q3	q4	v		
10	1. Расчет седловой точки:									0	0,5	0,25	0,25	1,75		
11		2	1	2	3											
12	A =	3	2	1	2											
13		2	2	2	1					x1	x2	x3	x4	Условие		Граница
14		1	1	1	2					0,142857	0,142857	0,285714	0		>=	
15									A1	2	3	2	1	1,285714	>=	1
16	α =	1							A2	1	2	2	1	1	>=	1
17	β =	2							A3	2	1	2	1	1	>=	1
18									A4	3	2	1	2	1	>=	1
19										1	1	1	1	0,571429	minZ	
20										p1	p2	p3	p4	v		
21										0,25	0,25	0,5	0	1,75		
22																

Рис. 5.4

За допомогою формул, наведених у таблиці на рис. 5.5, визначимо верхню α і нижню β ціни гри. Маємо матричну гру без сідлової точки.

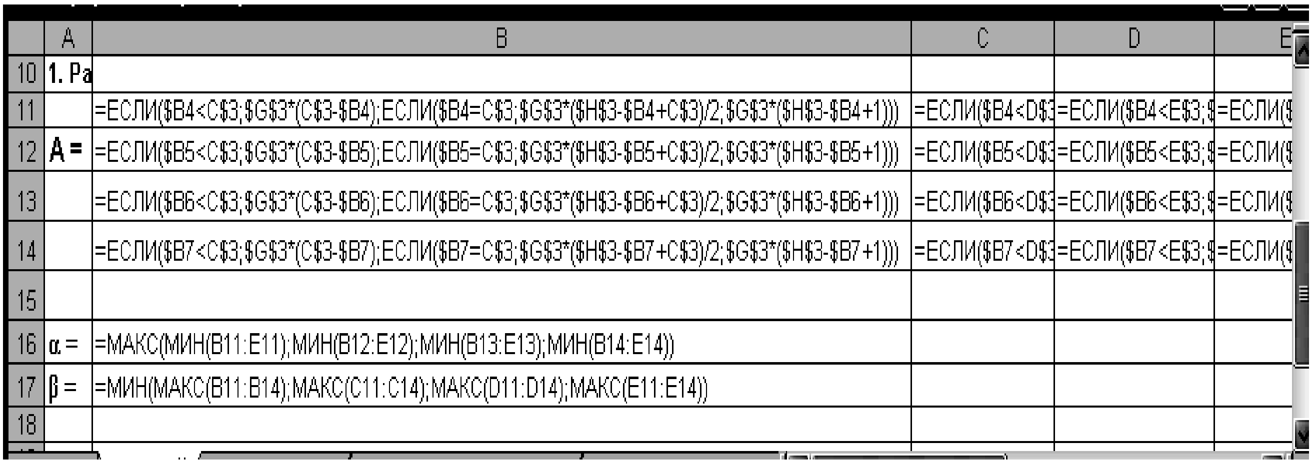


Рис. 5.5

Для визначення змішаної оптимальної стратегії $S^*_B = (q_1, q_2,..., q_n)$ фірми *B* побудуємо відповідну задачу лінійного програмування й розв’яжемо її, використовуючи надбудову *Пошук розв’язку* (рис. 5.6).

Аналогічно для визначення змішаної оптимальної стратегії $S^*_A=\{p_1, p_2,\ldots, p_n)$ фірми *A* сформулюємо відповідну задачу лінійного програмування й розв’яжемо її, використовуючи надбудову *Пошук розв’язку* (рис. 5.6). Щоб одержати матрицю, транспоновану до початкової платіжної матриці, можна використовувати команду *Спеціальна вставка* й опцію *Транспонувати.*

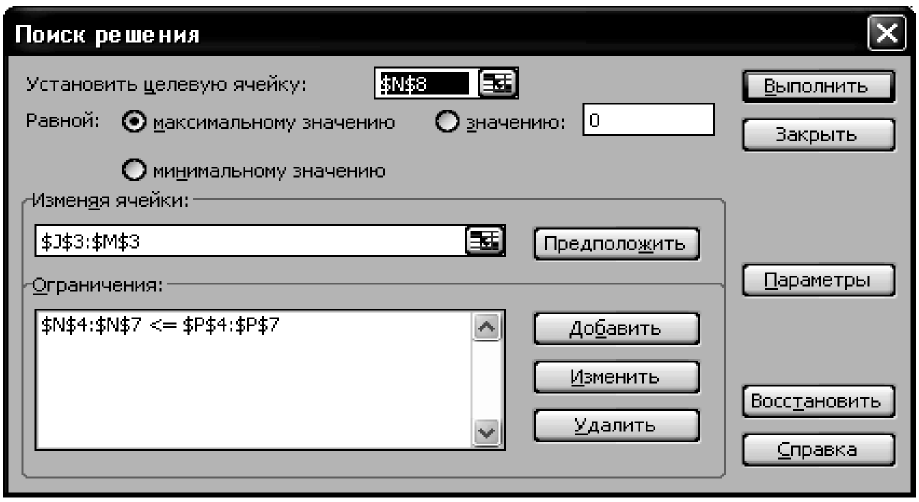


Рис. 5.6

ТЕСТИ

Модуль № 1

1. Задачу лінійного програмування називають загальною, якщо:

а) система обмежень складається з рівностей і нерівностей, не на всі змінні накладається умова невід'ємності;

б) система обмежень складається з рівностей, на всі змінні накладається умова невід'ємності;

в) система обмежень складається з нерівностей, на всі змінні накладається умова невід'ємності;

г) система обмежень складається з рівностей і нерівностей, на всі змінні накладається умова невід'ємності.

2. Задачу лінійного програмування називають стандартною, якщо:

а) система обмежень складається з нерівностей, на всі змінні накладається умова невід'ємності;

б) система обмежень складається з рівностей, не на всі змінні накладається умова невід'ємності;

в) система обмеження складається з рівностей, на всі змінні накладається умова невід'ємності;

г) система обмежень складається з рівностей і нерівностей, не на всі змінні накладається умова невід'ємності.

3. Задачу лінійного програмування називають канонічною, якщо:

а) система обмежень складається з рівностей, на всі змінні накладається умова невід'ємності;

б) система обмежень складається з нерівностей, на всі змінні накладається умова невід'ємності;

в) система обмежень складається з нерівностей, не на всі змінні накладається умова невід'ємності;

г) система обмежень складається з рівностей і нерівностей, не на всі змінні накладається умова невід'ємності.

4. Для зведення стандартної ЗЛП до канонічної ЗЛП необхідно виконати такі дії:

а) у кожне обмеження-нерівність незалежно від його знака ввести додаткову змінну зі знаком «+» або «-»;

б) змінні, на які не накладається умова невід'ємності, виразити через додаткові додатні змінні;

в) у кожне обмеження зі знаком «≥» увести додаткову додатну змінну зі знаком «-» ;

г) у кожне обмеження зі знаком «≥» увести додаткову додатну змінну зі знаком «+»;

д) у кожне обмеження зі знаком «≤» увести додаткову додатну змінну зі знаком «+»;

е) у кожне обмеження зі знаком «≤» увести додаткову додатну змінну зі знаком «-».

Виберіть правильні пункти:

1) в, д;
2) а, б;
3) г, д;
4) б, е.

5. Для зведення загальної ЗЛП до стандартної ЗЛП необхідно виконати такі дії:

а) у кожне обмеження-нерівність незалежно від його знака ввести додаткову змінну зі знаком «+» або «-»;

б) обмеження-рівності залишити без змін;

в) кожне обмеження-рівність замінити на два однакові обмеження-нерівності з різними знаками нерівності;

г) увести додаткову додатну змінну зі знаком «+» у кожне обмеження зі знаком «≤» , а в кожне обмеження зі знаком «≥» увести змінну зі знаком «-»;

д) змінні, на які не накладається умова невід'ємності, виразити через додаткові додатні змінні;

е) у цільову функцію ввести додаткові додатні змінні з коефіцієнтом +1.

Виберіть правильні пункти:

1) в, г, д;
2) а, б, в;
3) г, д, е;
4) а, в, д.

6. Для зведення канонічної ЗЛП до стандартної ЗЛП необхідно виконати такі дії:

а) цільову функцію залишити без змін;

б) у кожне обмеження зі знаком «≤» увести додаткову додатну змінну зі знаком «+»;

в) кожне обмеження-рівність замінити на два однакові обмеження-нерівності зі знаком «≥»;

г) кожне обмеження-рівність замінити на два обмеження-нерівності зі знаками «≤» і «≥», ліві й праві частини яких залишити без змін;

д) змінні, на які не накладається умова невід'ємності, виразити через додаткові додатні змінні;

е) обмеження-рівності залишити без змін.

Виберіть правильні пункти:

1) а, г;
2) а, д;
3) б, е;
4) в, е.

7. Для зведення загальної ЗЛП до канонічної ЗЛП необхідно виконати такі дії:

а) у кожне обмеження-нерівність незалежно від його знака ввести додаткову змінну зі знаком «+» або «-»;

б) обмеження-рівність залишити без змін;

в) кожне обмеження-рівність замінити на два однакові обмеження-нерівності з різними знаками нерівності;

г) увести додаткову додатну змінну зі знаком «+» у кожне обмеження зі знаком «≤» , а у кожне обмеження зі знаком «≥» увести змінну зі знаком «-»;

д) змінні, на які не накладається умова невід'ємності, виразити через додаткові додатні змінні;

е) цільову функцію залишити без змін.

Виберіть правильні пункти:

1) б, г, д;
2) а, б, в;
3) г, д, е;
4) а, в, д.

8. Опорний розв'язок (опорний план) – це:

1) допустимий розв'язок $X = (x_1, x_2,..., x_n)$, у якому вектори A_i ($i = 1, 2,..., m$), що входять у розклад $A_1x_1 + A_2x_2 +...+ A_nx_n = B$ з додатними коефіцієнтами x_i, є лінійно незалежними;

2) розв'язок $X=(x_1, x_2,..., x_n)$, який містить лише невід'ємні компоненти, тобто $x_j \geq 0$ для будь-кого $j = 1, 2,...,n$;

3) система рівнянь, у якій розв'язувальні змінні виражено через вільні змінні;

4) система векторів $A_1, A_2,..., A_r$ ($r \geq 2$), для яких існують такі числа $k_1, k_2,..., k_r$, що не всі дорівнюють нулю, при яких має місце рівність $k_1A_1+ k_2A_2+...+ k_rA_r=0$.

9. Стосовно графічного методу розв'язання задач лінійного програмування на мінімум цільової функції правильними є такі твердження:

а) будь-яка кутова точка ОДР відповідає опорному плану;

б) вектор-нормаль напрямлений до точки з координатами (0, 0);

в) якщо ОДР – порожня множина, то задача не має розв'язку, оскільки система обмежень не є сумісною;

г) для побудови прямої необхідно знайти координати однієї точки;

д) для визначення оптимального розв'язку задачі лінію рівня переміщують у напрямку, протилежному напрямку вектора-нормалі до першої кутової точки ОДР;

е) якщо лінія рівня, переміщуючись у потрібному напрямку, постійно перетинає ОДР і ні в якій точці не є опорною до неї, то ЗЛП не має розв'язку, оскільки цільова функція є необмеженою.

Виберіть правильні пункти:

1) а, в, д;
2) а, б, в;
3) а, д, е;
4) а, г, д.

10. Стосовно графічного методу розв’язання задач лінійного програмування на максимум цільової функції правильними є такі твердження:

а) будь-яка точка ОДР відповідає опорному плану;

б) вектор-нормаль напрямлений до точки з координатами (b_1, b_2);

в) вектор-нормаль напрямлений до точки з координатами (c_1, c_2);

г) якщо лінія рівня, переміщуючись по ОДР у напрямку, що відповідає меті ЗЛП, прямує до нескінченності, то задача не має розв’язку, оскільки система обмежень не є сумісною;

д) для визначення оптимального розв’язку задачі на максимум лінію рівня переміщують у напрямку вектора-нормалі до останньої кутової точки ОДР, для визначення оптимального розв’язку задачі на мінімум – у напрямку вектора-нормалі до першої кутової точки ОДР;

е) якщо лінія рівня, переміщуючись у потрібному напрямку, постійно перетинає ОДР і ні в якій точці не є опорною до неї, то ЗЛП не має розв’язку, оскільки цільова функція є необмеженою.

Виберіть правильні пункти:

1) в, д, е;
2) а, б, в;
3) г, д, е;
4) а, г, д.

11. Стосовно симплексного методу розв’язання задач лінійного програмування на мінімум цільової функції правильними є такі твердження:

а) праві частини обмежень повинні бути невід’ємними;

б) коефіцієнти цільової функції вписують у симплексну таблицю з протилежними знаками;

в) обмеження-нерівності необхідно звести до вигляду, що відповідає меті задачі;

г) критерій оптимальності розв’язку: якщо цільова функція, виражена через вільні змінні, не містить додатних коефіцієнтів при вільних змінних, то розв’язок є оптимальним;

д) критерій оптимальності розв’язку: якщо цільова функція, виражена через вільні змінні (оцінний рядок), не містить від’ємних коефіцієнтів при вільних змінних, то розв’язок є оптимальним;

е) для визначення розв’язувального стовпця вибирають максимальний додатний коефіцієнт;

ж) оцінне відношення прямує до нескінченності, якщо відповідний вільний член є від’ємним або дорівнює нулю;

и) для визначення розв’язувального рядка вибирають максимальне оцінне відношення.

Виберіть правильні пункти:

1) а, б, г, е;
2) в, д, ж, и;
3) а, в, д, и;
4) д, е, ж, и.

12. Стосовно симплексного методу розв’язання задач лінійного програмування на максимум цільової функції правильними є такі твердження:

а) симплексні таблиці починають заповнювати після того, як визначено базисні змінні;

б) коефіцієнти цільової функції вписують у симплексну таблицю з початковими знаками;

в) критерій оптимальності розв’язку: якщо цільова функція, виражена через вільні змінні (оцінний рядок), не містить від’ємних коефіцієнтів при вільних змінних, то розв’язок є оптимальним;

г) для визначення розв’язувального стовпця вибирають максимальний за модулем від’ємний коефіцієнт;

д) для визначення розв’язувального стовпця вибирають мінімальний додатний коефіцієнт;

е) оцінне відношення прямує до нескінченності, якщо відповідний коефіцієнт розв’язувального стовпця є від’ємним або дорівнює нулю;

ж) для визначення розв’язувального рядка вибирають максимальне оцінне відношення;

и) якщо всі оцінні відношення дорівнюють нулю, то задача не має розв’язку.

Виберіть правильні пункти:

1) а, в, г, е;
2) б, д, е, и;
3) в, г, д, и;
4) а, в, д, ж.

Модуль № 2

1. Початкова задача має такий вигляд: $Z_{max} = CX$; $AX \leq B$; $X \geq 0$. Двоїста до неї задача має такий вигляд:

а) $L_{min} = BY$; $AY \geq C$; $Y \geq 0$;

б) $L_{max} = BY$; $AY \leq C$; $Y \geq 0$;

в) $L_{min} = BY$; $AY \geq C$; Y – з будь-яким знаком;

г) $L_{max} = BY$; $AY \leq C$; Y – з будь-яким знаком.

2. Початкова задача має такий вигляд: $Z_{min} = CX$; $AX \geq B$; $X \geq 0$. Двоїста до неї задача має такий вигляд:

а) $L_{max} = BY$; $AY \leq C$; $Y \geq 0$;

б) $L_{min} = BY$; $AY \geq C$; $Y \geq 0$;

в) $L_{min} = BY$; $AY \geq C$; Y – з будь-яким знаком;

г) $L_{max} = BY$; $AY \leq C$; Y – з будь-яким знаком.

3. Початкова задача має такий вигляд: $Z_{max} = CX$; $AX = B$; $X \geq 0$. Двоїста до неї задача має такий вигляд:

а) $L_{min} = BY$; $AY \geq C$; Y – з будь-яким знаком;

б) $L_{min} = BY$; $AY \geq C$; $Y \geq 0$;

в) $L_{max} = BY$; $AY \leq C$; $Y \geq 0$;

г) $L_{max} = BY$; $AY \leq C$; Y – з будь-яким знаком.

4. Початкова задача має такий вигляд: $Z_{min} = CX$; $AX = B$; $X \geq 0$. Двоїста до неї задача має такий вигляд:

а) $L_{max} = BY$; $AY \leq C$; Y – з будь-яким знаком;

б) $L_{min} = BY$; $AY \geq C$; Y – з будь-яким знаком;

в) $L_{min} = BY$; $AY \geq C$; $Y \geq 0$;

г) $L_{max} = BY$; $AY \leq C$; $Y \geq 0$.

5. Властивостями взаємодвоїстих задач є такі твердження:

а) в одній задачі шукають максимум, в іншій – мінімум;

б) коефіцієнти при змінних у цільовій функції однієї задачі є вільними членами системи обмежень в іншій задачі;

в) невід’ємність змінних двоїстої задачі визначається умовою невід’ємності змінних початкової задачі;

г) матриці коефіцієнтів при змінних у системах обмежень обох задач є транспонованими одна до одної;

д) кількість нерівностей у системі обмежень однієї задачі збігається з кількістю змінних в іншій задачі;

е) перед побудовою двоїстої задачі знаки нерівностей необхідно звести до вигляду, що відповідає меті задачі, причому в задачі максимізації всі нерівності зі знаком "≥", а в задачі мінімізації – зі знаком "≤".

Виберіть правильні пункти:

1) а, б, г, д;
2) а, б, д, е;
3) б, в, г, д;
4) а, в, г, е.

6. Із першої теореми двоїстості випливає таке:

а) $Z_{min} = L_{max}$;

б) $Z_{min} = L_{min}$;

в) $Z_{max} \neq L_{min}$;

г) $Z_{max} = L_{max}$.

7. Із другої теореми двоїстості випливає таке:

а) якщо i-й ресурс використовується не повністю (недефіцитний ресурс), то його оцінка y_i дорівнює нулю;

б) якщо оцінка y_i одиниці ресурсу i-го виду є від'ємною, то при оптимальній виробничій програмі цей ресурс використовується повністю;

в) за оптимальним планом виробництва недефіцитні ресурси мають ненульові оцінки;

г) дефіцитні ресурси мають нульові оцінки.

8. Дефіцитний ресурс – це:

а) ресурс, що повністю використовується при виробництві продукції;

б) ресурс, що не повністю використовується, тобто його задано з лишком;

в) ресурс, якого немає взагалі, але він є необхідним для виробництва продукції;

г) ресурс, якому відповідає нульова оцінка y_i.

9. Алгоритм побудови двоїстих задач містить такі твердження:

а) коефіцієнти при невідомих змінних у цільовій функції початкової задачі є правими частинами обмежень двоїстої задачі;

б) коефіцієнти при невідомих змінних у цільовій функції двоїстої задачі є правими частинами обмежень початкової задачі;

в) матриці коефіцієнтів при змінних у системах обмежень обох задач збігаються;

г) кількість обмежень двоїстої задачі збігається з кількістю змінних початкової задачі;

д) обмеження, які відповідають невід'ємним змінним, є рівностями;

е) кількість змінних у системі обмежень однієї задачі збігається з кількістю обмежень іншої задачі.

Виберіть правильні пункти:

1) а, б, г, е;
2) б, в, д, е;
3) а, в, г, е;
4) б, г, д, е.

10. Нову продукцію доцільно включати в план виробництва, якщо:

а) витрати на її виготовлення покриваються отриманим прибутком;

б) витрати на її виготовлення перебільшують отриманий прибуток;

в) вартість ресурсів, витрачених на її виготовлення, є не меншою від очікуваного прибутку.

11. Постановка транспортної задачі:

а) скласти такий план перевезень, при якому всі замовлення виконуються, усі запаси вивозяться, а загальна вартість усіх перевезень є мінімальною;

б) скласти такий план перевезень, при якому виконується частина замовлень, а загальна вартість усіх перевезень є мінімальною;

в) скласти такий план перевезень, при якому виконується частина замовлень, а загальна вартість усіх перевезень є максимальною;

г) скласти такий план перевезень, при якому всі замовлення виконуються, а загальна вартість усіх перевезень є максимальною.

12. План перевезень називають допустимим, якщо він задовольняє балансовим умовам:

а) усі замовлення виконано, усі запаси вичерпано;

б) не всі замовлення виконано, але всі запаси вичерпано;

в) усі замовлення виконано, але не всі запаси вичерпано;

г) не всі замовлення виконано і не всі запаси вичерпано.

13. Транспортна задача має закриту модель, якщо:

а) сума запасів постачальників дорівнює сумі замовлень споживачів, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$;

б) сумарні запаси є більшими за сумарні замовлення, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$;

в) сума замовлень є більшою за суму запасів, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$.

14. Якщо в транспортній задачі сумарний запас вантажу у постачальників менше сумарного попиту споживачів, то:

а) для розв'язання задачі необхідно ввести фіктивного постачальника;

б) необхідно зменшити попит споживачів;

в) для розв'язання задачі необхідно ввести фіктивного споживача;

г) задача не має розв’язку.

15. Якщо в транспортній задачі сумарний запас вантажу у постачальників більше сумарного попиту споживачів, то:

а) для розв'язання задачі необхідно ввести фіктивного споживача;

б) для розв'язання задачі необхідно ввести фіктивного постачальника;

в) необхідно зменшити попит споживачів;

г) задача не має розв’язку.

16. Ціна гри – це:

а) збіжність верхньої й нижньої цін гри;
б) $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = v$;
в) сідлова точка;
г) $V^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p^*_i \, q^*_j$.

17. Нижня ціна гри – це:

а) максимальний виграш;
б) максимін;
в) гарантований виграш гравця А при будь-якій стратегії гравця В;
г) $\alpha = \max_{i=1,2,\ldots,m} \alpha_i = \max_{i=1,2,\ldots,m} (\min_{j=1,2,\ldots,n} a_{ij})$.

КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

1. Скласти економіко-математичну модель задачі шляхом математичного опису досліджуваного економічного процесу або об'єкта. Усі умови записати у вигляді системи рівностей або нерівностей, критерій оптимізації – у вигляді цільової функції. Визначити, у якій формі отримано задачу, звести її до канонічної форми.

Фірма планує організувати виробництво двох видів продукції А і В, але має для цього обмежений інвестиційний фонд – 5000 грош. од. У разі потреби цю суму можна збільшити на 10000 грош. од. за рахунок банківського кредиту, процентна ставка за використання якого дорівнює 20 %. Витрати, пов'язані з виробництвом одиниці продукції А, становлять 50 грош. од., а одиниці продукції В – 100 грош. од. Очікуваний прибуток фірми від реалізації одиниці продукції А – 100 грош. од., а одиниці продукції В – 150 грош. од. Фірма має попереднє замовлення на виробництво продукції А не менше ніж на 100 одиниць, а продукції В – на 50 одиниць.

Визначити обсяги виробництва продукції обох видів, які забезпечать фірмі найбільший чистий прибуток з урахуванням виплат за кредит.

2. Задану задачу лінійного програмування

$$Z = x_1 + 2x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 14, \\ 3x_1 + x_2 \le 4, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0$$

розв’язати графічним методом і табличним симплекс-методом.

3. Побудувати двоїсту задачу до початкової

$$Z = 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 + x_4 + 6x_5 - 9x_6 \to max;$$

$$\begin{cases} -11x_1 + 10x_2 + 3x_3 - 10x_4 - 2x_5 + x_6 \leq 1, \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 11x_4 - 9x_5 + 11x_6 = 3, \\ x_1 + 15x_2 - 13x_3 - 9x_4 + x_5 \geq -2, \end{cases}$$

$$x_2 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

4. До заданої початкової задачі скласти двоїсту задачу, розв'язати її графічним методом і, використовуючи першу й другу теореми двоїстості, знайти розв'язок початкової задачі:

$$Z = 5x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 \to max;$$

$$\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$$

5. Скласти математичну модель для транспортної задачі, заданої у вигляді транспортної таблиці, де A_i – постачальники, a_i – запас i-го постачальника; B_j – замовники, b_j – замовлення j-го замовника; c_j – вартість перевезення одиниці товару від i-го постачальника до j-го замовника:

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	5	8	1	9
A_2	8	3	9	2	16
A_3	7	4	6	3	5
b_j	11	7	8	4	

Отримати оптимальний розв'язок транспортної задачі, при цьому опорний план знайти методом мінімальної вартості, а оптимальний розв'язок – методом потенціалів.

6. Для платіжної матриці визначити верхню й нижню ціни гри, мінімаксні стратегії й оптимальний розв'язок гри, використовуючи елементарні прийоми розв'язання ігор розмірами $n \times 2$ і $2 \times m$ (графічний та аналітичний методи):

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

7. Розв'язати задачу теорії ігор, задану платіжною матрицею A, звівши її до задачі лінійного програмування: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

Бережная, Е.В. Математические методы моделирования экономических систем [Текст] / Е.В. Бережная, В.И. Бережной. – М. : Финансы и статистика, 2002. – 368 с.

Вітлінський, В.В. Математичне програмування [Текст] / В.В. Вітлінський, С.І. Наконечний, Т.О. Терещенко. – К. : КНЕУ, 2006. – 247 с.

Колодяжный, В.М. Математическое программирование и элементы теории «Исследование операций» [Текст] / В.М. Колодяжный. – Х. : Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «Харьк. авиац. ин-т», 2001. – 229 с.

Кремер, Н.Ш. Исследование операций в экономике [Текст] / Н.Ш. Кремер. – М. : Юнити, 2000. – 407 с.

Кожухов, В.Д. Математическое программирование и элементы исследования операций [Текст] : учеб. пособие по лаб. практикуму / В.Д. Кожухов, В.Л. Петрик. – Х. : Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «Харьк. авиац. ин-т», 2003. – 53 с.

Кожухов, В.Д. Экономико-математические модели и методы [Текст] : учеб. пособие / В.Д. Кожухов, В.Л. Петрик. – Х. : Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «Харьк. авиац. ин-т», 2007. – 85 с.

Куликов, Ю.Г. Экономико-математические методы и модели [Текст] / Ю.Г. Куликов, Н.Ф. Шеховцова, Л.П. Зикеева. – М. : Воронеж, 2000. – 441 с.

Федосеева, В.В. Экономико-математические методы и прикладные модели [Текст] / В.В. Федосеева. – М. : Юнити, 2002. – 388 с.

Філіпковська, Л.О. Економіко-математичні моделі в управлінні та економіці [Текст] / Л.О. Філіпковська, В.Л. Петрик. – Х. : Нац. аерокосм. ун-т ім. М.Є. Жуковського «Харк. авіац. ін-т», 2012. – 60 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Вартанян Василь Михайлович
Петрик Валерія Леонідівна
Воляк Олена Олександрівна

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Частина 1

Редактор Т.О. Іващенко

Зв. план, 2013
Підписано до друку 01.08.2013
Формат 60х84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк
Ум. друк. арк. 5.1. Обл.-вид. арк. 5,75. Наклад 50 пр. Замовлення 265.
Ціна вільна

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001