

РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ ПОДКРЕПЛЕННЫХ БАЛОК ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

Н. В. Хлебутин

1. Свойства коэффициентов дифференциальных уравнений перемещений

Рассмотрим тонкостенную цилиндрическую балку, поперечное сечение которой представляет собой незамкнутый контур (рис. 1). Балка состоит из тонкой обшивки, подкрепленной поперечными дифрагмами и стрингерами, направление которых параллельно образующей. Балка нагружена произвольной внешней нагрузкой. Условия закрепления стрингеров по торцам балки произвольны.

Расчетная схема тонкостенной балки определяется при помощи следующих предположений:

1) контур поперечного сечения балки не деформируется в плоскости этого сечения;

2) обшивка работает только на сдвиг;

3) стрингеры воспринимают только продольные силы. При этом участия обшивки в работе на нормальные напряжения в районе подкрепляющих ее стрингеров производится, как известно, в расчетной практике путем добавления к площадям стрингеров площадей присоединенной обшивки.

Стрингеры нумеруются в направлении обхода контура сечения балки по часовой стрелке. Участки обшивки, заключенные между двумя смежными стрингерами, называются панелями и нумеруются номером стрингера, которому предшествует данная панель при обходе контура по часовой стрелке. Материал и толщина обшивки в пределах одной панели неизменны, но они могут быть различными при переходе от одной панели к другой.

Стрингеры нумеруются в направлении обхода контура сечения балки по часовой стрелке. Участки обшивки, заключенные между двумя смежными стрингерами, называются панелями и нумеруются номером стрингера, которому предшествует данная панель при обходе контура по часовой стрелке. Материал и толщина обшивки в пределах одной панели неизменны, но они могут быть различными при переходе от одной панели к другой.

Определение напряжений и деформаций балки по методу Ю. Г. Одинокова, как известно, сводится к интегрированию системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

$$G \sum_{k=1}^n a_{ik} \omega_k - EF_i \ddot{\omega}_i = R_i, \quad (1,1)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

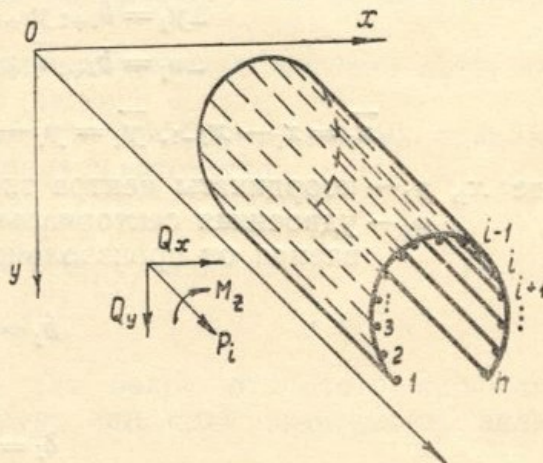


Рис. 1.

где ω_i — перемещения точек i стрингера в направлении оси OZ ;
 E — модуль нормальной упругости основного материала стрингеров;
 F_i — площадь поперечного сечения i стрингера с присоединенной обшивкой. В случае, если модули стрингеров различны, балка приводится к одному модулю путем редуцирования площадей стрингеров по формуле $F_i = \frac{E_{\text{действ.}}^i}{E} F_i^{\text{действ.}}$;

a_{ik} — постоянные коэффициенты;

R_i — функция внешней нагрузки.

Коэффициенты a_{ik} записываются так [4]:

$$a_{ik} = c_{ik} - \frac{\Delta x_i}{D} \begin{vmatrix} \Delta x_k B_{xy} B_{x\omega} \\ \Delta y_k B_{yy} B_{y\omega} \\ \Delta \omega_k B_{\omega y} B_{\omega\omega} \end{vmatrix} - \frac{\Delta y_i}{D} \begin{vmatrix} B_{xx} \Delta x_k B_{x\omega} \\ B_{yx} \Delta y_k B_{y\omega} \\ B_{\omega x} \Delta \omega_k B_{\omega\omega} \end{vmatrix} - \frac{\Delta \omega_i}{D} \begin{vmatrix} B_{xx} B_{xy} \Delta x_k \\ B_{yx} B_{yy} \Delta y_k \\ B_{\omega x} B_{\omega y} \Delta \omega_k \end{vmatrix} \quad (1,2)$$

Здесь

$$\begin{vmatrix} \Delta x_i = b_{i+1} \bar{x}_{i+1} - b_i \bar{x}_i, \\ \Delta y_i = b_{i+1} \bar{y}_{i+1} - b_i \bar{y}_i, \\ \Delta \omega_i = b_{i+1} \bar{\omega}_{i+1} - b_i \bar{\omega}_i, \end{vmatrix} \quad (1,3)$$

$$\bar{x}_i = x_i - x_{i-1}, \quad \bar{y}_i = y_i - y_{i-1}, \quad \bar{\omega}_i = \omega_i - \omega_{i-1}, \quad (1,4)$$

где x_i, y_i — координаты центра тяжести i стрингера,
 ω_i — удвоенная секториальная площадь i стрингера, отсчитываемая от произвольно выбранного начала отсчета;

$$b_i = \frac{\delta_i}{\bar{S}_i}, \quad (1,5)$$

$$\delta_i = \frac{G_i^q}{G} \delta_i^q,$$

δ_i — условная толщина обшивки i панели, приведенная к одному модулю сдвига G для всей балки,

G_i^q, δ_i^q — действительные величины соответственно модуля сдвига и толщины обшивки i панели,

\bar{S}_i — ширина i панели;

$$D = \begin{vmatrix} B_{xx} B_{xy} B_{x\omega} \\ B_{yx} B_{yy} B_{y\omega} \\ B_{\omega x} B_{\omega y} B_{\omega\omega} \end{vmatrix}, \quad (1,6)$$

где обозначено:

$$\begin{vmatrix} B_{xx} = \sum_{k=1}^n b_k \bar{x}_k^2, & B_{yx} = B_{xy} = \sum_{k=1}^n b_k \bar{x}_k \bar{y}_k, & B_{x\omega} = B_{\omega x} = \sum_{k=1}^n b_k \bar{x}_k \bar{\omega}_k, \\ B_{yy} = \sum_{k=1}^n b_k \bar{y}_k^2, & B_{y\omega} = B_{\omega y} = \sum_{k=1}^n b_k \bar{y}_k \bar{\omega}_k, & B_{\omega\omega} = \sum_{k=1}^n b_k \bar{\omega}_k^2, \end{vmatrix} \quad (1,7)$$

c_{ik} определяется по следующему правилу:

$$\begin{aligned} c_{ik} &= 0 \text{ для всех } i, k, \text{ кроме} \\ c_{i, i-1} &= -b_i, \quad c_{ii} = b_{i+1} + b_i, \quad c_{i, i+1} = -b_{i+1}. \end{aligned} \quad (1,8)$$

Коэффициент R_i выражается через составляющие внешних нагрузок по формуле:

$$\begin{aligned} R_i &= \frac{Q_x}{D} \begin{vmatrix} \Delta x_i B_{xy} B_{x\omega} \\ \Delta y_i B_{yy} B_{y\omega} \\ \Delta \omega_i B_{y\omega} B_{\omega\omega} \end{vmatrix} + \frac{Q_y}{D} \begin{vmatrix} B_{xx} \Delta x_i B_{x\omega} \\ B_{yx} \Delta y_i B_{y\omega} \\ B_{\omega x} \Delta \omega_i B_{\omega\omega} \end{vmatrix} + \\ &+ \frac{M_z}{D} \begin{vmatrix} B_{xx} B_{xy} \Delta x_i \\ B_{yx} B_{yy} \Delta y_i \\ B_{\omega x} B_{\omega y} \Delta \omega_i \end{vmatrix} + P_i, \end{aligned} \quad (1,9)$$

где Q_x, Q_y — проекции векторов перерезывающей силы на оси ox и oy ,

M_z — крутящий момент относительно оси oz ,

p_i — внешняя погонная нагрузка, действующая вдоль i стрингера.

Положительные направления составляющих вектора внешней нагрузки в любом сечении балки показаны на рисунке 1.

Известно, что между коэффициентами дифференциальных уравнений системы (1,1) существуют следующие зависимости:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = \sum_{k=1}^n a_{ik} y_k = 0. \quad (1,10)$$

Нетрудно убедиться в том, что для балок открытого профиля между коэффициентами a_{ik} существует еще одна зависимость вида

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \omega_k = 0. \text{ Действительно, воспользовавшись формулами (1, 2),}$$

(1,8) и последней из формул (1,3), составим эту сумму:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{ik} \omega_k &= -\Delta \omega_i - \frac{\Delta x_i}{D} \begin{vmatrix} \sum_k \Delta x_k \omega_k B_{xy} B_{x\omega} \\ \sum_k \Delta y_k \omega_k B_{yy} B_{y\omega} \\ \sum_k \Delta \omega_k \omega_k B_{\omega y} B_{\omega\omega} \end{vmatrix} - \\ &- \frac{\Delta y_i}{D} \begin{vmatrix} B_{xx} \sum_k \Delta x_k \omega_k B_{x\omega} \\ B_{xy} \sum_k \Delta y_k \omega_k B_{y\omega} \\ B_{\omega x} \sum_k \Delta \omega_k \omega_k B_{\omega\omega} \end{vmatrix} - \frac{\Delta \omega_i}{D} \begin{vmatrix} B_{xx} B_{xy} \sum_k \Delta x_k \omega_k \\ B_{yx} B_{yy} \sum_k \Delta y_k \omega_k \\ B_{\omega x} B_{\omega y} \sum_k \Delta \omega_k \omega_k \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1,11)$$

Используя формулы (1,3) и (1,4), можно установить, что для балок открытого профиля справедливы следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n \Delta x_k \omega_k &= - \sum_{k=1}^n b_k \bar{x}_k \bar{\omega}_k = - B_{x\omega}, \\ \sum_{k=1}^n \Delta y_k \omega_k &= - \sum_{k=1}^n b_k \bar{y}_k \bar{\omega}_k = - B_{y\omega}, \\ \sum_{k=1}^n \Delta \omega_k \omega_k &= - \sum_{z=1}^n b_k \bar{\omega}_k^2 = - B_{\omega\omega}. \end{aligned} \right\} (1,12)$$

Внося (1,12) в правую часть формулы (1,11) и имея в виду формулу (1,6), убеждаемся в том, что

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \omega_k = 0. \quad (1,13)$$

Формула (1,13) получена при условии, что полюс отсчета секториальной площади ω_k совпадает с началом системы координат, относительно которых подсчитаны коэффициенты a_{ik} .

Покажем, что соотношение (1,13) инвариантно при переносе полюса секториальной площади. Поместим полюс отсчета секториальных площадей в произвольную точку A с координатами x_0 и y_0 . Формула преобразования секториальной площади к новому полюсу записывается так:

$$\omega_k^* = \omega_k - y_0 x_k + x_0 y_k + C, \quad (1,14)$$

где ω_k^* — секториальная площадь относительно полюса в точке A ,
 C — постоянная.

Запишем $\sum_{k=1}^n a_{ik} \omega_k^*$ и введем в нее ω_k^* по формуле (1,14)

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \omega_k^* = \sum_{k=1}^n a_{ik} \omega_k - y_0 \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + x_0 \sum_{k=1}^n a_{ik} y_k + C \sum_{k=1}^n a_{ik},$$

откуда, воспользовавшись формулами (1,10) и (1,13), получим:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \omega_k^* = 0. \quad (1,15)$$

2. Деформации, определяющиеся законом секториальной площади

Как известно, для нахождения общего интеграла однородной системы уравнений, соответствующей неоднородной системе (1,1), решение ищется в виде:

$$\begin{aligned} w_i &= h_i e^{\lambda z}, \\ i &= 1, 2 \dots n. \end{aligned} \quad (2,1)$$

При этом коэффициенты h_i и λ определяются как решение следующей системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} G \sum_{k=1}^n a_{ik} h_k - E F_i \lambda^2 h_i &= 0, \\ i &= 1, 2 \dots n. \end{aligned} \quad (2,2)$$

Если положить $\lambda^2 = 0$, то тривиальное решение $h_1 = h_2 = \dots = h_n = 0$ является не единственным решением этой однородной системы алгебраических уравнений. Действительно, имея в виду равенства (1,10) и (1,15), нетрудно убедиться в том, что четыре линейно независимые системы величин

$$h_i = \text{const}, \quad h_i = x_i, \quad h_i = y_i, \quad h_i = \omega_i^*, \quad (2,3)$$

где $i=1, 2 \dots n$ являются решениями системы (2,2). Следовательно, $\lambda=0$ есть восьмикратный корень характеристического уравнения (2,2)¹. При этом между h_i существуют четыре линейные зависимости, представляющие собой условия ортогональности h_k :

$$\sum_{k=1}^n F_k h_k = \sum_{k=1}^n F_k x_k h_k = \sum_{k=1}^n F_k y_k h_k = \sum_{k=1}^n F_k \omega_k^* h_k = 0. \quad (2,4)$$

С помощью соотношений (2,4) можно исключить четыре неизвестные $h_n, h_{n-1}, h_{n-2}, h_{n-3}$ и понизить порядок системы (2,2) до $n-4$.

Составляющие перемещений, которые определяются частными решениями (2,3), соответствуют перемещениям стрингеров, меняющимся по поперечному сечению оболочки по законам плоскости и секториальной площади.

Для упрощения расчета из всех возможных перемещений, определяющихся законами плоскости и секториальной площади, выгодно выбрать те перемещения, которые можно вычислить по известной четырехчленной формуле В. З. Власова [2]. Для этой цели представим перемещения ω_i в виде суммы:

$$\omega_i = t_i(z) + \zeta(z) - \xi^{(u)}(z) u_i - \eta^{(v)}(z) v_i - \theta^* \omega_i^*, \quad (2,5)$$

где обозначено:

$t_i(z)$ — подлежащие определению функции от z ;

u_i и v_i — координаты i стрингера в² прямоугольной системе координат, оси которой проходят через главные оси инерции сечения;

ω_i^* — главная секториальная площадь i стрингера;

$\xi^{(u)}, \eta^{(v)}$ — углы наклона упругой линии балки соответственно к осям ou и ov ;

θ^* — относительный угол закручивания балки.

Далее предполагается, что система уравнений (1,1) записана для осей координат xoy , проходящих через главные оси сдвига². Координаты стрингеров относительно осей координат UOV , совмещенных с главными осями инерции, выражаются через координаты стрингеров в главных осях сдвига xoy

$$\begin{aligned} u_i &= u_0 + x_i \cos \gamma + y_i \sin \gamma, \\ v_i &= v_0 - x_i \sin \gamma + y_i \cos \gamma, \end{aligned} \quad (2,6)$$

где u_0, v_0 — координаты центра сдвига,

γ — угол поворота главных осей инерции относительно главных осей сдвига.

¹ Для балок замкнутого профиля Ю. Г. Одиноким показано, что соответствующее этой задаче характеристическое уравнение имеет шестикратный нулевой корень [1].

² В работе [1] эти оси названы главными осями корабления сечения.

Вводя (2,5) в (1,1), получим

$$\begin{aligned} G \sum_{k=1}^n a_{ik} t_k - EF_i (\ddot{t}_i + \zeta - \zeta^{(u)} u_i - \zeta^{(v)} v_i - \ddot{\theta}^* \omega_i^*) = \\ = \frac{\Delta x_i}{B_{xx}} Q_x + \frac{\Delta y_i}{B_{yy}} Q_y + \frac{\Delta \omega_i}{B_{\omega\omega}} M_z + p_i, \quad i = 1, 2 \dots n. \end{aligned} \quad (2,7)$$

Просуммировав все уравнения этой системы и имея в виду, что

$$\sum_{k=1}^n \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \Delta y_k = \sum_{k=1}^n \Delta \omega_k = 0, \quad (2,8)$$

$$\sum_{k=1}^n F_k u_k = \sum_{k=1}^n F_k v_k = \sum_{k=1}^n F_k \omega_k^* = 0,$$

находим первое уравнение

$$E \sum_{k=1}^n F_k \ddot{t}_k + \zeta E \sum_{k=1}^n F_k = \sum_{k=1}^n p_k. \quad (2,9)$$

Умножая каждое i уравнение системы (2,7) на u_i , суммируя все уравнения, преобразуя правую часть суммы и учитывая формулы (2,6), получаем второе уравнение:

$$E \sum_{k=1}^n F_k u_k \ddot{t}_k - \zeta^{(u)} E \sum_{k=1}^n F_k u_k^2 = Q_x \cos \gamma - Q_y \sin \gamma - \sum_{k=1}^n P_k u_k. \quad (2,10)$$

Аналогично, умножая каждое i уравнение сначала на V_i и суммируя, а затем на ω_i^* и суммируя, найдем еще два уравнения:

$$E \sum_{k=1}^n F_k v_k \ddot{t}_k - \zeta^{(v)} E \sum_{k=1}^n F_k v_k^2 = Q_x \sin \gamma + Q_y \cos \gamma - \sum_{k=1}^n P_k v_k, \quad (2,11)$$

$$E \sum_{k=1}^n F_k \omega_k^* \ddot{t}_k - \ddot{\theta}^* E \sum_{k=1}^n F_k \omega_k^{*2} = M_z + u_{ц.и.} Q_x - x_{ц.и.} Q_y - \sum_{k=1}^n P_k \omega_k^*, \quad (2,12)$$

где $x_{ц.и.}$, $u_{ц.и.}$ — координаты центра изгиба в системе координат $хоу$.
Для того чтобы выделить решение В. З. Власова, примем¹

$$\zeta = - \frac{\sum_{k=1}^n p_k}{EF},$$

$$\zeta^{(u)} = - \frac{Q^{(u)} - \sum_{k=1}^n p_k u_k}{EI_v}.$$

¹ Здесь формулы В. З. Власова записаны для случая, когда $I_d = 0$, так как у нас закон распределения касательных напряжений по толщине оболочки принят постоянным.

$$\ddot{\gamma}_1^{(v)} = - \frac{Q^{(v)} - \sum_{k=1}^n P_k v_k}{EI_u}, \quad (2,13)$$

$$\ddot{\theta}^* = - \frac{M^* - \sum_{k=1}^n P_k \omega_k^*}{MI_\omega},$$

где обозначено:

$$F = \sum_{k=1}^n F_k, \quad I_u = \sum_{k=1}^n F_k v_k^2, \quad I_v = \sum_{k=1}^n F_k u_k^2, \quad I_\omega = \sum_{k=1}^n F_k \omega_k^{*2}$$

I_u, I_v — главные моменты инерции,

I_ω — секториальный момент инерции,

$Q^{(u)}, Q^{(v)}$ — составляющие поперечной силы по осям u и v ,

M^* — момент внешних сил относительно центра изгиба.

Тогда формулы (2,9) — (2,12) примут вид:

$$\sum_{k=1}^n F_k \ddot{t}_k = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n E_k u_k \ddot{t}_k = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_k v_k \ddot{t}_k = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_k \omega_k^* \ddot{t}_k = 0.$$

Следовательно, справедливы соотношения

$$\sum_{k=1}^n F_k t_k = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_k u_k t_k = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_k v_k t_k = 0, \quad (2,14)$$

$$\sum_{k=1}^n F_k \omega_k^* t_k = 0,$$

откуда легко видеть, что t_k есть такие перемещения, которые связаны с самоуравновешенной системой усилий в стрингерах. Причем самоуравновешенность здесь следует понимать не только в отношении сил и моментов, но также и бимоментов.

Подставляя (2,13) в (2,7), получим для определения t_k систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$G \sum_{k=1}^n a_{ik} t_k - E F_i \ddot{t}_i = R_i^*, \quad l=1, 2 \dots n, \quad (2,15)$$

где

$$\begin{aligned} R_i^* = & Q_x \left(\frac{\Delta x_i}{B_{xx}} + \frac{F_i u_i \cos \gamma}{I_v} + \frac{F_i v_i \sin \gamma}{I_u} \right) + \\ & + Q_y \left(\frac{\Delta x_i}{B_{yy}} - \frac{F_i u_i \sin \gamma}{I_v} + \frac{F_i \omega_i^* x_{ц.м}}{I_\omega} \right) + M_z \left(\frac{\Delta \omega_i}{B_{\omega\omega}} + \frac{F_i \omega_i^*}{I_\omega} \right) \\ & + p_i - F_i \left(\frac{\sum_{k=1}^n p_k}{F} + \frac{\sum_{k=1}^n p_k u_k}{I_u} + \frac{\sum_{k=1}^n p_k \omega_k^*}{I_\omega} \right). \end{aligned} \quad (2,16)$$

Используя соотношения (2,14), порядок системы дифференциальных уравнений (2,15) может быть понижен до $n-4$. Интересно отметить, что R_i^* удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=2}^n R_i^* = \sum_{i=1}^n R_i^* x_i = \sum_{i=1}^n R_i^* y_i = \sum_{i=1}^n R_i^* \omega_i = 0.$$

3. Компоненты деформаций и напряжений

Общие деформации балки определяются по формулам [4]:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{1}{B_{xx}} \left(\frac{Q_x}{G} + \sum_{k=1}^n \Delta x_k \omega_k \right), \\ \dot{\eta} &= \frac{1}{B_{yy}} \left(\frac{\partial_y}{G} + \sum_{k=1}^n \Delta y_k \omega_k \right), \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{B_{\omega\omega}} \left(\frac{M_z}{G} + \sum_{k=1}^n \Delta \omega_k \omega_k \right), \end{aligned} \quad (3,1)$$

где ξ , η — прогибы линии, проходящей через центры сдвига сечений, соответственно в направлениях осей ox и oy ,

θ — угол поворота сечения относительно центра сдвига. Подставляя (2,5) в (3,1), после выполнения несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{Q_x}{GB_{xx}} + \dot{\xi}^* + \sum_{k=1}^n \Delta x_k t_k, \\ \dot{\eta} &= \frac{Q_y}{GB_{yy}} + \dot{\eta}^* + \sum_{k=1}^n \Delta y_k t_k, \\ \dot{\theta} &= \frac{M_z}{GB_{\omega\omega}} + \dot{\theta}^* + \sum_{k=1}^n \Delta \omega_k t_k, \end{aligned} \quad (3,2)$$

где

$$\begin{cases} \dot{\xi}^* = \dot{\xi}^{(u)} \cos \gamma + \dot{\eta}^{(v)} \sin \gamma + Y_{ц. н.} \dot{\theta}^*, \\ \dot{\eta}^* = -\dot{\xi}^{(u)} \sin \gamma + \dot{\eta}^{(v)} \cos \gamma - X_{ц. н.} \dot{\theta}^*. \end{cases} \quad (3,3)$$

Как видно из формул (3,2), производные от функций прогибов и углов закручивания балки слагаются из трех составляющих. Первые слагаемые выражают составляющие деформаций для балки при отсутствии депланаций, то есть при $w_i = \text{const}$. Такую деформацию можно представить как сдвиг плоских недеформирующихся поперечных сечений балки относительно друг друга. Вторые слагаемые вычисляются из расчета на изгиб и кручение по методу В. З. Власова. Они появляются благодаря наличию перемещений по закону плоскости и секториальной площади. Третьи члены правых частей формул (3,2) обусловлены наличием депланации сечений по законам, отличающимся от секториального.

Перейдем к определению составляющих внутренних условий. Погонные касательные силы в i панели оболочки записываются так [4]:

$$q_i = Gb_i(w_i - w_{i-1} + \bar{x}_i \dot{\xi} + \bar{y}_i \dot{\eta} + \bar{\omega}_i \dot{\theta}). \quad (3,4)$$

Предположим, что при деформации балки под нагрузкой поперечные сечения ее перемещаются и депланируются по закону секториальной площади, то есть w_i подчиняются закону

$$w_i^0 = \zeta(z) - \dot{\xi}^{(u)} u_i - \dot{\eta}^{(v)} v_i - \dot{\theta}^* \omega_i^*. \quad (3,5)$$

Подставим в (3,4) выражение (3,5) и соответствующие этой формуле выражения $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ и $\dot{\theta}$ по (3,2), (3,3) при $t_i = 0$. После некоторых преобразований получим

$$q_i^0 = \frac{b_i \bar{x}_i}{B_{xx}} Q_x + \frac{b_i \bar{y}_i}{B_{yy}} Q_y + \frac{b_i \bar{\omega}_i}{B_{\omega\omega}} M_z. \quad (3,6)$$

Эта формула впервые была получена Ю. Г. Одиноким для касательных усилий в сечении заделки. Оказывается, что в балках открытого профиля касательные распределяются по закону (3,6) не только в сечениях, остающихся плоскими, но и в сечениях, депланирующихся по закону секториальных площадей.

Интересно отметить, что при расчете рассматриваемой оболочки по методу В. З. Власова для тонкостенных стержней распределение касательных усилий в обшивке получается по формуле, отличной от (3,6). Это объясняется тем, что в методе В. З. Власова принята гипотеза об отсутствии деформации сдвига в срединной поверхности оболочки. В рассматриваемом же методе эта гипотеза не применялась.

Определим теперь погонные сдвигающие усилия в оболочке при произвольных осевых перемещениях.

Вводя (2,5) в (3,4), получим

$$q_i = q_i^0 + Gb_i \left[\bar{t}_i + \sum_{k=1}^n t_k \left(\frac{\bar{x}_i \Delta x_k}{B_{xx}} + \frac{\bar{y}_i \Delta y_k}{B_{yy}} + \frac{\bar{\omega}_i \Delta \omega_k}{B_{\omega\omega}} \right) \right], \quad (3,7)$$

где

$$\bar{t}_i = t_i - t_{i-1}.$$

Таким образом, при произвольной депланации сечений балки ее погонные сдвигающие усилия слагаются из сдвигающих усилий, возникающих в сечениях, депланирующихся по закону секториальной площади и дополнительных сдвигающих усилий, связанных с депланацией сечений по закону, отличному от секториального.

Для вычислений напряжений и деформаций балки с учетом деформаций сечений по сложному закону, перемещения w_i представим в виде суммы главных перемещений или нормальных координат, как это сделано в работе [4]. Для балок открытого профиля имеем

$$w_i = \sum_{\mu=1}^n t_i^{(\mu)} = \sum_{\mu=1}^n \frac{\varphi^{(\mu)} h_i^{(\mu)}}{EI_{\mu}} \quad (3,8)$$

или

$$w_i = \frac{\varphi^{(1)}}{EF} + \frac{\varphi^{(2)} u_i}{EI_v} + \frac{\varphi^{(3)} v_i}{EI_u} + \frac{\varphi^{(4)} \omega_i^*}{EI_{\omega}} + \sum_{\mu=5}^n \frac{\varphi^{(\mu)} h_i^{(\mu)}}{EI_{\mu}}, \quad (3,9)$$

где $\varphi^{(\mu)}$, $\mu = 1, 2 \dots n$ — нормальные перемещения,

$$I_{\mu} = \sum_{k=1}^n F_k h_k^{(\mu)2}. \quad (3,10)$$

Последние выражения являются нормирующими условиями для нормальных перемещений. При этом I_{μ} есть величина, подобная осевому моменту инерции.

$h_k^{(\mu)}$, $k = 1, 2 \dots n$ — решения системы алгебраических уравнений (2,2) для μ корня λ_{μ}^2 . Как было установлено выше для корней $\mu = 1, 2, 3, 4$ $\lambda_{\mu}^2 = 0$. Этому восьмикратному нулевому корню соответствуют перемещения, меняющиеся по сечению по закону плоскости и секториальной площади и выражающиеся первыми четырьмя членами правой части уравнения (3,9). Они определяются с помощью системы дифференциальных уравнений (2,13).

Если выразить постоянные интегрирования дифференциальных уравнений (2,13) через начальные параметры, то первые четыре главные координаты $\varphi^{(\mu)}$ можно записать так:

$$\varphi^{(1)} = EF\zeta = EF\zeta_0 + N_0 z + \int_0^z \sum_{k=1}^n p_k (z - z_1) dz, \quad (3,11)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{(2)} &= -EI_v \dot{\xi}^{(u)} = -EI_v \dot{\xi}_0^{(u)} - M_0^{(v)} z + \int_0^z \left(Q^{(u)} - \sum_{k=1}^n P_k u_k \right) (z - z_1) dz_1, \\ \varphi^{(3)} &= -EI_v \dot{\gamma}^{(v)} = -EI_u \dot{\gamma}_0^{(u)} + M_0^{(u)} z + \int_0^z \left(Q^{(v)} - \sum_{k=1}^n P_k v_k \right) (z - z_2) dz_1, \\ \varphi^{(4)} &= -EI_{\omega} \dot{\theta}^* = -EI_{\omega} \dot{\theta}_0^* + B_0 z + \int_0^z \left(M^* - \sum_{k=1}^n p_k \omega_k^* \right) (z - z_1) dz_1, \end{aligned} \right\} (3,12)$$

где $M^{(u)}$, $M^{(v)}$ — изгибающие моменты соответственно относительно осей ou и ov ,

B — бимомент,

N — осевая сила.

Индекс нуль при величинах означает, что эти величины соответствуют $z = 0$, то есть это начальные параметры.

Для определения остальных нормальных координат $\varphi^{(\mu)}$, $\mu=5, 6, \dots, n$ имеет систему дифференциальных уравнений

$$\ddot{\varphi}^{(\mu)} - \lambda_{\mu}^2 \varphi^{(\mu)} = \psi^{(\mu)}, \quad (3,13)$$

где

$$\psi^{(\mu)} = \frac{B_{xh}^{(\mu)}}{B_{xx}} Q_x + \frac{B_{yh}^{(\mu)}}{B_{yy}} Q_y + \frac{B_{\omega h}^{(\mu)}}{B_{\omega\omega}} M_z - \sum_{k=1}^n p_k R_k^{(\mu)}.$$

Интегрируя каждое уравнение системы (3,13), получим

$$\varphi^{(\mu)} = C_1^{(\mu)} \operatorname{sh} \lambda_{\mu} z + C_2^{(\mu)} \operatorname{ch} \lambda_{\mu} z + \frac{1}{\lambda_{\mu}} \int_0^z \psi^{(\mu)}(z_1) \operatorname{sh} \lambda_{\mu} (z - z_1) dz_1 \quad (3,14).$$

Заменим $C_1^{(\mu)}$ и $C_2^{(\mu)}$ начальными параметрами

$$\varphi^{(\mu)} = \varphi_0^{(\mu)} \operatorname{ch} \lambda_{\mu} z + \frac{\dot{\varphi}_0^{(\mu)}}{\lambda_{\mu}} \operatorname{sh} \lambda_{\mu} z + \frac{1}{\lambda_{\mu}} \int_0^z \psi^{(\mu)}(z_1) \operatorname{sh} \lambda_{\mu} (z - z_1) dz_1. \quad (3,15)$$

Нормальные координаты выражаются через перемещения w_k так:

$$\varphi^{(\mu)} = E \sum_{k=1}^n F_k h_k^{(\mu)} w_k, \quad (3,16)$$

$$\dot{\varphi}^{(\mu)} = E \sum_{k=1}^n E_k h_k^{(\mu)} \dot{w}_k. \quad (3,17)$$

Выразим $\dot{\varphi}^{(\mu)}$ через нормальные напряжения в стрингерах. Имея в виду, что $\sigma_k = E w_k$, запишем:

$$\dot{\varphi}^{(\mu)} = \sum_{k=1}^n F_k \sigma_k h_k^{(\mu)}. \quad (3,18)$$

По своей структуре это выражение напоминает изгибающий момент или изгибно-крутящий бимомент. Поэтому назовем этот новый фактор полимоментом и обозначим $\Pi^{(\mu)}$.

Тогда

$$\Pi^{(\mu)} = \sum_{k=1}^n F_k \sigma_k h_k^{(\mu)}. \quad (3,19)$$

Начальные параметры $\varphi_0^{(\mu)}$ и $\dot{\varphi}_0^{(\mu)}$ выразим через перемещения w_{0k} и напряжения σ_{0k} в сечении $Z=0$, принимая во внимание формулы (3,16) и (3,18).

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0^{(\mu)} &= E \sum_{k=1}^n F_k h_k^{(\mu)} w_{0k}, \\ \dot{\varphi}_0^{(\mu)} &= \Pi_0^{(\mu)} = \sum_{k=1}^n F_k \sigma_{0k} h_k^{(\mu)} \end{aligned} \right\} \quad (3,20)$$

Тогда (3,15) можно переписать так:

$$\varphi^{(\mu)} = \varphi_0^{(\mu)} \operatorname{ch} \lambda_\mu z + \frac{\Pi_0^{(\mu)}}{\lambda_\mu} \operatorname{sh} \lambda_\mu z + \frac{1}{\lambda_\mu} \int_0^z \psi^{(\mu)}(z_1) \operatorname{sh} \lambda_\mu (z - z_1) dz_1. \quad (3,21)$$

Дифференцируя (3,21) по z и замечая, что $\dot{\varphi}^{(\mu)} = \Pi^{(\mu)}$, получим

$$\Pi^{(\mu)} = \varphi_0^{(\mu)} \lambda_\mu \operatorname{sh} \lambda_\mu z + \Pi_0^{(\mu)} \operatorname{ch} \lambda_\mu z + \int_0^z \psi^{(\mu)}(z_1) \operatorname{ch} \lambda_\mu (z - z_1) dz_1. \quad (3,22)$$

Начальные параметры $\varphi_0^{(\mu)}$ и $\Pi_0^{(\mu)}$ определяются из граничных условий для балки, то есть из условия закрепления или нагружения стрингеров по торцам.

Для таких условий закрепления балки, когда на одном из ее концов заданы перемещения стрингеров или связь между ними, а на другом известны силы, приложенные к стрингерам, или связь между ними, граничные условия для определения начальных параметров устанавливаются непосредственно из формул (3,16) и (3,17). Начальные параметры ζ_0 , $\xi_0^{(\mu)}$, $\eta_0^{(\nu)}$, θ_0^* , $M_0^{(\mu)}$, $M_0^{(\nu)}$, M_0^* и B_0 определяются по правилам, предусмотренным в методе В. З. Власова [2].

Если же балка имеет смешанные граничные условия, то есть на каждом ее торце заданы для одних стрингеров силы, а для других перемещения, то в этом случае для определения $2n$ начальных параметров можно составить $2n$ уравнения, воспользовавшись выражением (3,8) и записав для каждого стрингера по два граничных условия.

Формулы (3,2) и (3,7) после подстановки в них t_i , выраженные координаты, примут вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{\zeta} &= \frac{Q_x}{GB_{xx}} + \dot{\zeta}^* + \sum_{\mu=5}^n \frac{B_{xh}^{(\mu)}}{B_{xx}} \frac{\varphi^{(\mu)}}{EI_\mu}, \\ \dot{\eta} &= \frac{Q_y}{GB_{yy}} + \dot{\eta}^* + \sum_{\mu=5}^n \frac{B_{yh}^{(\mu)}}{B_{yy}} \frac{\varphi^{(\mu)}}{EI_\mu}, \\ \dot{\theta} &= \frac{M_z}{GB_{\omega\omega}} + \dot{\theta}^* + \sum_{\mu=1}^n \frac{B_{\omega h}^{(\mu)}}{B_{\omega\omega}} \frac{\varphi^{(\mu)}}{EI_\mu}, \end{aligned} \right\} \quad (3,23)$$

$$q_i = q_i^0 + \sum_{\mu=5}^n q_i^{(\mu)}, \quad (3,24)$$

$$q_i^{(\mu)} = \frac{G}{E} b_i k_i^{(\mu)} \frac{\varphi^{(\mu)}}{I_\mu}, \quad (3,25)$$

$$k_i^{(\mu)} = \bar{h}_i^{(\mu)} - \frac{B_{xh}^{(\mu)}}{B_{xx}} \bar{x}_i - \frac{B_{yh}^{(\mu)}}{B_{yy}} \bar{y}_i - \frac{B_{\omega h}^{(\mu)}}{B_{\omega\omega}} \bar{\omega}_i, \quad \bar{h}_i^{(\mu)} = h_i^{(\mu)} - h_{i-1}^{(\mu)} \quad (3,26)$$

Как показывают примеры расчетов, члены, содержащие коэффициенты $\frac{B_{\nu h}^{(\mu)}}{B_{\nu\nu}}$, $\nu = x = y, \omega$, в выражениях (3,23) и (3,26) по сравнению с другими членами обычно оказываются очень малыми и поэтому

вместо (3,23) и (3,26) можно пользоваться более простыми формулами

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \frac{Q_x}{GB_{xx}} + \dot{\xi}^*, \\ \dot{\eta} &= \frac{Q_y}{GB_{yy}} + \dot{\eta}^*,\end{aligned}\quad (3,27)$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{M_z}{GB_{\omega\omega}} + \dot{\theta}^*, \\ k_i^{(\mu)} &= h_i^{(\mu)}.\end{aligned}\quad (3,28)$$

Выражения, подобные первым двум формулам (3,27), выводятся в курсах сопротивления материалов, когда учитывают влияние сдвигов на деформации балок при поперечном изгибе. Как известно, деформации, вызванные сдвигами от поперечных сил, тем больше, чем меньше длина балки по сравнению с ее поперечными размерами. Заметим, что эти деформации для тонкостенных балок оказываются весьма значительными.

Нормальные напряжения σ_i в i стрингере определяются так:

$$\sigma_i = \sigma_i^0 + \sum_{\mu=5}^n \sigma_i^{(\mu)}, \quad (3,29)$$

где

$$\sigma_i^0 = \frac{N}{F} - \frac{M^{(v)}}{I_v} u_i + \frac{M^{(u)}}{I_u} v_i + \frac{B}{I_\omega} \omega_i^*, \quad (3,30)$$

$$\sigma_i^{(\mu)} = \frac{\Pi^{(\mu)}}{I_\mu} h_i^{(\mu)}. \quad (3,31)$$

Из формулы (3,29) видно, что нормальные напряжения в стрингерах складываются из двух частей. Первая часть соответствует напряжениям, меняющимся в поперечном сечении по закону плоскости и секториальной площади и определяющимся согласно метода В. З. Власова по формуле (3,30).

Вторая часть нормальных напряжений представляет собой наложение систем самоуравновешенных напряжений, каждая из которых соответствует одной из нормальных координат или, иначе, одной из главных форм деформации сечения.

На основании изложенного можно рекомендовать следующую схему расчета цилиндрических подкрепленных оболочек открытого профиля:

1. Произвести расчет балки по методу В. З. Власова. Для этого по известным формулам определить положения главных осей инерции и центра изгиба. Определить прогибы и углы закручивания из уравнений (2,13), нормальные напряжения по формуле (3,30).

2. Вычислить дополнительные напряжения по уточненному методу. Для этой цели нужно произвести следующие операции: определить положение главных осей сдвига; записать систему алгебраических уравнений (2,2), воспользовавшись формулами (2,4), понизить ее порядок на четыре, а затем решить ее и определить значения λ_μ , $h_i^{(\mu)}$ ($\mu=5, 6, \dots, n$, $i=1, 2, \dots, n$)¹. В зависимости от условий закрепления балки по концам вычислить начальные параметры и определить нормальные координаты

¹ Для решения этой системы часто бывает удобнее всего матричный или релаксационный способы.

наты $\varphi^{(n)}$ и $\Pi^{(n)}$. Подсчитать погонные сдвигающие усилия (3,6), а затем (3,7) и дополнительные нормальные напряжения (3,31).

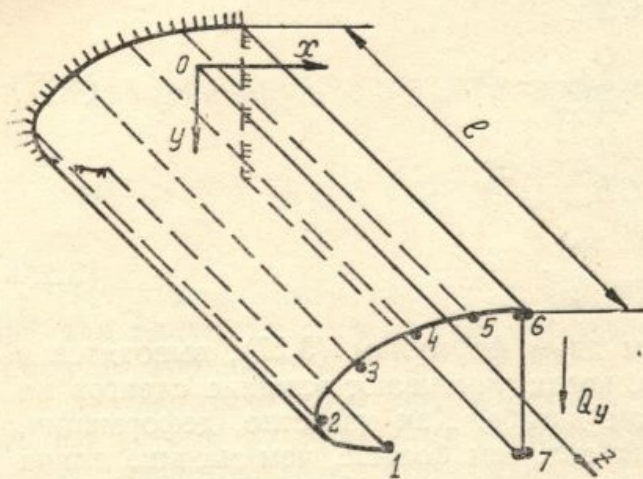


Рис. 2.

3. Произвести суммирование соответствующих составляющих деформаций и напряжений, определенных по методу В. З. Власова с дополнительными составляющими уточненного метода. При этом для вычисления перемещений воспользоваться формулой (3,8), для общих деформаций балки — формулами (3,2) или (3,27), для погонных касательных сил — формулой (3,24) и, для нормальных напряжений — формулой (3,29).

4. Пример

Рассмотрим числовой пример по расчету консольной балки, подкрепленной семью стрингерами и нагруженной на конце поперечной силой Q_y , не проходящей через центр изгиба или центр сдвига (рис. 2). Геометрические характеристики поперечного сечения в осях координат $x' o_1 y'$ и расчетные параметры балки даны в таблице 1, где через F_i обозначены редуцированные площади поперечных сечений стрингеров. Координаты x'_i, y'_i взяты с чертежа (рис. 3).

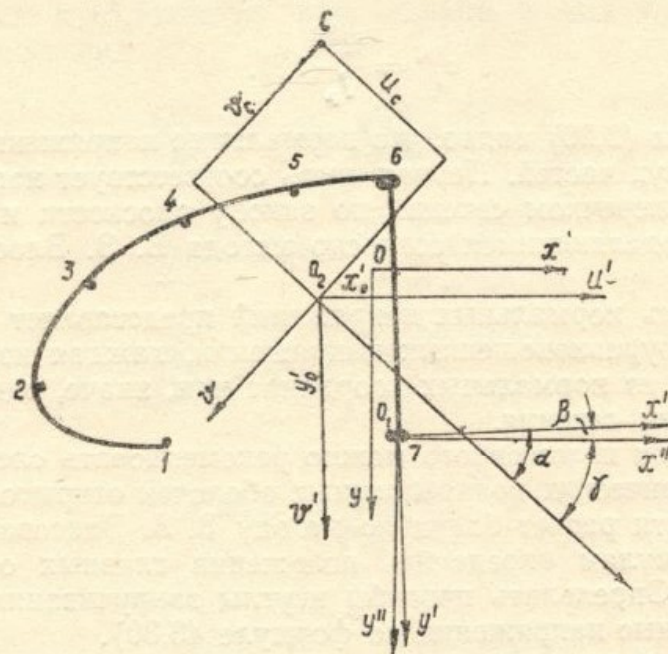


Рис. 3.

Параметры сечения балки

Таблица 1

	№№ стрингеров						
	1	2	3	4	5	6	7
$F_i \text{ см}^2$	5	2	2	2	2	18	16
$x'_i, \text{ см}$	-32,7	-48,9	-42,7	-30	-15,5	0	0
$y_i, \text{ см}$	-1,05	-6,8	-19,7	-27,9	-32,5	-34	0

Координаты центра тяжести площади поперечного сечения определяются по формулам:

$$x'_0 = \frac{\sum_{i=1}^7 F_i x'_i}{\sum_{i=1}^7 F_i} = -9,31 \text{ см}, \quad y'_0 = \frac{\sum_{i=1}^7 F_i y'_i}{\sum_{i=1}^7 F_i} = -16,83 \text{ см}.$$

Угол наклона главных осей инерции определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{u'v'}}{I_{v'} - I_{u'}} = 74,7 \text{ или } \alpha = 44^\circ 37',$$

где $I_{u'v'}$, $I_{u'}$, $I_{v'}$ — моменты инерции относительно осей, параллельных к осям $x'_0 y'_0$, но с началом координат в точке o_2 .

Главные моменты инерции имеют следующие значения:

$$I_u = 14170 \text{ см}^4, \quad I_v = 9840 \text{ см}^4.$$

Координаты центра изгиба определяются по формулам:

$$u_c = \frac{\sum_{i=1}^7 S_{ui} \bar{\omega}_{i-1}^0}{I_u} = -23,6 \text{ см}, \quad v_c = \frac{\sum_{i=1}^7 S_{vi} \bar{\omega}_{i-1}^0}{I_v} = -27,1 \text{ см},$$

где S_{ui} , S_{vi} — статические моменты участков контура от 1 до i стрингера; $\bar{\omega}_{i-1}^0$ — секториальная площадь $i-1$ панели при полюсе отсчета в точке o_2 .

Главные секториальные площади с полюсом в центре изгиба вычисляются по формуле

$$\omega_i^* = \omega_i^c - \frac{\sum_{k=1}^7 F_k \omega_k^c}{\sum_{k=1}^7 F_k},$$

где ω_i^c — секториальная площадь для i стрингера при полюсе в точке c и начале отсчета в точке 1.

Секториальный момент инерции

$$I_\omega = \sum_{k=1}^7 F_k \omega_k^{*2} = 4318000 \text{ см}^6.$$

Для отыскания главных осей сдвига $x'' o y''$ введем вспомогательную систему осей координат $x'' o_1 y''$, параллельных осям $x o y$. При этом угол β определим по формуле (1,17) работы [4]

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2B_{x'y'}}{B_{x'x'} - B_{y'y'}} = 0,0641 \text{ или } \beta = 1^\circ 50'.$$

Координаты центра сдвига o в системе координат $x'' o_1 y''$ вычислим из соотношений [4] (1,19):

$$x''_0 = \frac{B_{\omega y''}}{B_{y'' y''}} = -3,31 \text{ см}, \quad y''_0 = -\frac{B_{x'' \omega}}{B_{x'' x''}} = -24,05 \text{ см}.$$

Для главных осей сдвига найдем

$$B_{xx} = 1,79 \text{ см}^2, \quad B_{yy} = 10,76 \text{ см}^2, \quad B_{\omega\omega} = 1530 \text{ см}^4.$$

В таблицу 2 сведены результаты вычислений коэффициентов системы уравнений, где

$$\delta_i = \frac{G_i}{2,9 \cdot 10^5} \delta_i \text{ действ.}$$

Таблица 2

Вычисление коэффициентов дифференциальных уравнений

№ стрингера	1	2	3	4	5	6	7
Обозначение							
δ_i действ. мм		1,5	1	1	1	1	3
$G_i 10^{-5} \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$		0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	2,9
δ_i мм		0,414	0,276	0,276	0,276	0,276	3
s_i мм		180	150	150	150	150	340
$b_i 10^3$		2,3	1,839	1,839	1,839	1,839	8,823
x_i см		-16,38	5,78	12,43	14,34	15,44	1,101
y_i "		-5,222	13,09	8,607	-5,067	-2,001	33,98
ω_i см ²		565,1	523,6	269,5	172,2	146,8	86,1
Δx_i см	-0,0376	0,0483	0,0122	0,00352	0,00202	-0,0187	-0,00971
Δy_i "	-0,012	-0,0121	0,00825	0,00651	0,00564	0,3035	-0,2998
$\Delta \omega_i$ см ²	-1,299	-0,3361	-0,4674	-0,1789	-0,0467	0,4896	-0,7596
$a_{1i} 10^5$	39,14	-101,16	66,29	23,32	8,84	-46,94	10,54
$a_{2i} 10^5$	-101,16	274,83	-226,22	-12,70	-5,85	95,23	-24,13
$a_{3i} 10^5$	66,29	226,22	344,57	-192,27	-3,24	4,43	6,45
$a_{4i} 10^5$	23,32	-12,7	-192,27	364,64	-185,2	-8,97	11,18
$a_{5i} 10^5$	8,84	-5,85	-3,24	-185,2	367,15	-196,22	14,5
$a_{6i} 10^5$	-46,94	95,23	4,43	-8,97	-196,22	174,82	-22,27
$a_{7i} 10^5$	10,54	-24,13	6,45	11,18	14,5	-22,27	3,72
ω_i см ²	0	565,1	1088,7	1358,2	1530,4	1677,4	1763,5

Воспользовавшись тем, что характеристическое уравнение системы (2,2) для нашей задачи имеет 8-кратный нулевой корень, понизим порядок этой системы до трех. Для этого запишем условия ортогональности коэффициентов h_i (2,4).

$$\begin{aligned} 5h_1 + 2h_2 + 2h_3 + 2h_4 + 2h_5 + 18h_6 + 16h_7 &= 0, \\ -27,8h_1 - 42,25h_2 - 51,55h_3 - 44,99h_4 - 30,82h_5 - 97,77h_6 + 295,2h_7 &= 0, \\ 138,3h_1 + 69,88h_2 + 42,82h_3 + 13,31h_4 - 13,61h_5 - 337,7h_6 + 86,98h_7 &= 0, \\ -3488h_1 + 606,2h_2 + 1183h_3 + 923,4h_4 + 399,4h_5 - 1837h_6 + 2214h_7 &= 0, \end{aligned}$$

откуда находим

$$\begin{aligned} h_4 &= -84,02h_1 - 16,44h_2 - 4,886h_3, \\ h_5 &= 157,4h_1 + 28,66h_2 + 6,703h_3, \\ h_6 &= -9,058h_1 - 1,567h_2 - 0,3307h_3, \\ h_7 &= 0,7136h_1 + 0,1106h_2 - 0,02005h_3. \end{aligned} \quad (4,1)$$

С помощью соотношений (4,1) систему семи уравнений, коэффициенты которых записаны в таблице 2, сведем к системе трех уравнений:

$$\begin{aligned} (-79,38 - 10^6 \lambda^2)h_1 - 129,5h_2 + 22,67h_3 &= 0, \\ -1728h_1 + (339,8 - 10^6 \lambda^2)h_2 - 487,4h_3 &= 0, \\ 32470h_1 + 5874h_2 + (2612 - 10^6 \lambda^2)h_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4,2),$$

Для (4,2) находим следующие три системы решений:

$$\begin{aligned} \lambda_5 &= 0,02245, & \lambda_6 &= 0,03136, & \lambda_7 &= 0,03721, \\ h_1^5 &= -5,228, & h_1^6 &= 1,686, & h_1^7 &= 0,6644, \\ h_2^5 &= 25,32, & h_2^6 &= -12,09, & h_2^7 &= -5,763, \\ h_3^5 &= 10, & h_3^6 &= 10, & h_3^7 &= 10. \end{aligned} \quad (4,3)$$

Подставляя (4,3) в (4,1), вычисляем $h_i^{(\mu)}$, $h_5^{(\mu)}$, $h_6^{(\mu)}$, $h_7^{(\mu)}$ для каждого из корней характеристического уравнения. Результаты этих вычислений приведены в таблице 3.

Таблица 3

Значения коэффициентов $h_i^{(\mu)}$

№ стрингера	1	2	3	4	5	6	7
$h_i^{(2)} = u_i \text{ см} \dots$	- 5,56	- 21,13	- 25,77	-22,5	- 15,41	- 5,43	18,45
$h_i^{(3)} = v_i \text{ см} \dots$	27,66	34,94	21,41	6,65	- 6,81	- 18,76	5,44
$h_i^{(4)} = \omega^* \text{ см}^2 \dots$	-697,7	303,1	501,4	461,7	199,7	-102,1	138,4
$h_i^{(5)} \dots \dots \dots$	5,228	25,32	10	-25,86	- 29,8	4,362	-0,73
$h_i^{(6)} \dots \dots \dots$	1,686	- 12,09	10	8,296	- 14,34	0,3774	0,066
$h_i^{(7)} \dots \dots \dots$	0,604	- 5,763	10	-9,953	6,391	- 0,293	0,037

Определим напряжения в стрингерах и обшивке балки в случае, когда сечение $z = 0$ заделано, а свободный конец балки загружен поперечной силой $Q_y = -3000 \text{ кг}$, которая создает момент $M_z = -30000 \text{ кг/см}$ или $M^* = -55860 \text{ кг/см}$.

В этом случае для определения начальных параметров имеем в соответствии с (3,16) и (3,20)

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0 \quad \omega_k(0) &= 0, \quad \varphi_0^{(\mu)} = 0, \\ \text{при } z = l \quad \dot{\omega}_k(l) &= 0, \quad \Pi^{(\mu)}(l) = 0. \end{aligned} \quad (4,4)$$

В случае, если $l > 150 \text{ см}$, то можно принять $\text{th } \lambda_\mu l = 1$. Тогда, используя условия (4.4), по формуле (3,15) получим

$$\varphi^{(\mu)} = \left(\frac{B_{yh}^{(\mu)}}{B_{yy}} + d \frac{B_{\omega h}^{(\mu)}}{B_{\omega\omega}} \right) \frac{Q_y}{\lambda_\mu^2} (e^{-\lambda_\mu z} - 1), \quad (4,5)$$

где d — плечо силы Q_y относительно центра сдвига $d = 10 \text{ см}$.

Формула В. З. Власова (3,30) в данном случае принимает вид

$$\sigma_i^{(\mu)} = \left(\frac{u_i \sin \gamma}{I_v} + \frac{v_i \cos \gamma}{I_u} + \frac{d\omega_i^*}{I_\omega} \right) Q_y (z - l), \quad (4,6)$$

где γ — угол между направлением главных осей сдвига и главных осей инерции, $\lambda = \alpha - \beta = 42^\circ 47'$.

Дополнительные напряжения находим в соответствии с (3,31) и (4,5).

$$\sigma_i^{(\mu)} = - \left(\frac{B_{yh}^{(\mu)}}{B_{yy}} + d \frac{B_{\omega h}^{(\mu)}}{B_{\omega\omega}} \right) \frac{Q_y}{I_\mu \lambda_\mu} h_i^{(\mu)} e^{-\lambda_\mu z} \quad (4,7)$$

Значения всех параметров, необходимых для определения напряжений по формулам (4,6) и (4,7), приведены в таблицах 3 и 4, а величины этих напряжений при $z=0$ — в таблице 5.

Таблица 4

Значения корней характеристических уравнений и коэффициентов, характеризующих жесткость оболочки

№ корня μ	1	2	3	4	5	6	7
λ_μ	0	0	0	0	0,0225	0,0314	0,0372
I_μ	47	9840	14170	4380000	5084	1059	550
$B_{xh}^{(\mu)}$	0	1,79	0	0	- 1,32	0,532	0,198
$B_{yh}^{(\mu)}$	0	0	10,76	0	- 1,05	-0,276	-0,015
$B_{\omega h}^{(\mu)}$	0	0	0	1530	11,28	-0,9	0,564

Таблица 5

Нормальные напряжения в сечении $z=0$ от $Q_y = -3000$ кг

№ стрингера	1	2	3	4	5	6	7
Напряжения в кг/см ²							
σ_i^0	-2183	2160	1695	676	-1045	-2570	3066
$\sigma_i^{(5)}$	-3	-16	-6	16	19	-2	0
$\sigma_i^{(6)}$	-5	35	-29	-24	41	-1	0
$\sigma_i^{(7)}$	0	-2	3	-3	2	0	0
σ_i	-2191	2177	1663	665	-983	-2573	3066

Как видно из последней таблицы, для данных условий загрузки балки формула В. З. Власова с достаточной степенью точности определяет величину нормальных напряжений.

Формула (4,7) вносит несущественные уточнения к общим напряжениям и их можно не учитывать. Заметим, что основное уточнение внесется величинами напряжений, соответствующих минимальным корням характеристического уравнения.

Для вычисления погонных касательных усилий в обшивке запишем для нашего случая формулы (3,6) и (3,25)

$$q_i^0 = \left(\frac{b_i \bar{y}_i}{B_{yy}} + d \frac{b_i \bar{\omega}_i}{B_{\omega\omega}} \right) Q_y, \quad (4,8)$$

$$q_i^{(\mu)} = \frac{G}{E} \frac{1}{I_\mu \lambda_\mu} \left(\frac{B_{yh}^{(\mu)}}{B_{yy}} + d \frac{B_{\omega h}^{(\mu)}}{B_{\omega\omega}} \right) Q_y b_i k_i^{(\mu)} (e^{-\lambda_\mu z} - 1). \quad (4,9)$$

Величины погонных касательных усилий в обшивке при расчете балки по методу В. З. Власова определяются по формуле:

$$q_i^b = \left(-\frac{S_{ui} \cos \gamma}{I_u} - \frac{S_{vi} \sin \gamma}{I_v} + m \frac{S_{\omega i}}{I_\omega} \right) Q_y. \quad (4,10)$$

где S_{ui} , S_{vi} , $S_{\omega i}$ — статические и секториальный статический моменты инерции,

m — плечо силы Q_y относительно центра изгиба,

$m = 18,6$ см.

Результаты расчетов по формулам (4,8), (4,9) и (4,10) приведены в таблице 6.

Таблица 6
Касательные усилия в панелях в сечениях балки $z=0$ и $z=l$ от
 $Q_y = -3000 \text{ кг}$

№ панели	2	3	4	5	6	7
Усилия в кг/см						
q_i^0	-22,11	-12,15	- 5,3	-3,61	-4,27	-98,58
$q_i^{(5)} z=l$	- 0,37	0,35	0,63	-0,1	-0,94	0,16
$q_i^{(6)} z=l$	1,28	- 2,38	0,64	3,15	-1,19	- 0,16
$q_i^{(7)} z=l$	- 0,04	0,1	- 0,15	0,1	-0,06	0,01
$q_i^z z=l$	-21,28	-14,08	- 4,18	-0,46	-6,46	-98,5
$q_i^b z=l$	-21,83	-13,2	-4,48	-1,68	-5,97	-98,4

Из рассмотрения этой таблицы заключаем, что для данных условий закрепления балки погонные касательные усилия, возникающие в сечении балки от поперечной нагрузки, с достаточной для целей практики точностью можно определять либо по формуле В. З. Власова (4,10), либо по формуле Ю. Г. Одинокова (4,8).

Определим общие деформации балки. Для нашего случая формулы (3,27) после интегрирования, подстановки числовых значений, всех параметров примут вид:

$$\begin{aligned} \xi &= -7 \cdot 10^{-8} l^3 \cdot \bar{z}^2 \cdot (6 - 2\bar{z}), \\ \eta &= -1,72 \cdot 10^{-8} l^3 \bar{z}^2 (6 - 2\bar{z}) - 96,2 \cdot 10^{-5} l \bar{z}, \\ \theta &= -1,54 \cdot 10^{-9} l^3 \bar{z}^2 (6 - 2\bar{z}) - 67,9 \cdot 10^{-6} l \bar{z}, \end{aligned} \quad (4,11)$$

где $\bar{z} = \frac{z}{l}$.

Первым членам правых частей этих формул соответствуют прогибы ξ^* , η^* в направлении осей ox , oy и угол поворота θ^* , которые можно получить на основе метода В. З. Власова. Вторые члены последних двух формул выражают прогибы и угол поворота, вызванные сдвигом от поперечной силы.

Результаты расчетов по формулам (4,11) представлены на графиках (рис. 4 и 5), где сплошными линиями изображены деформации балки, подсчитанные по методу В. З. Власова. При этом рисунок 4 соответствует балке длиной $l=100 \text{ см}$, а рисунок 5 — $l=500 \text{ см}$.

Из графиков мы видим, что деформации, вызванные сдвигами от поперечной силы для тонкостенных балок, велики не только для относительно коротких, но также для балок средней длины.

Произведем теперь расчет рассматриваемой балки от действия осевых сил. Будем считать, что она заделана в сечении $z=0$, а в сечении $z=l$ нагружена осевыми силами, приложенными к стрингерам №№ 1 и 7.

$$P_1 = 10000 \text{ кг}, P_7 = 40000 \text{ кг}.$$

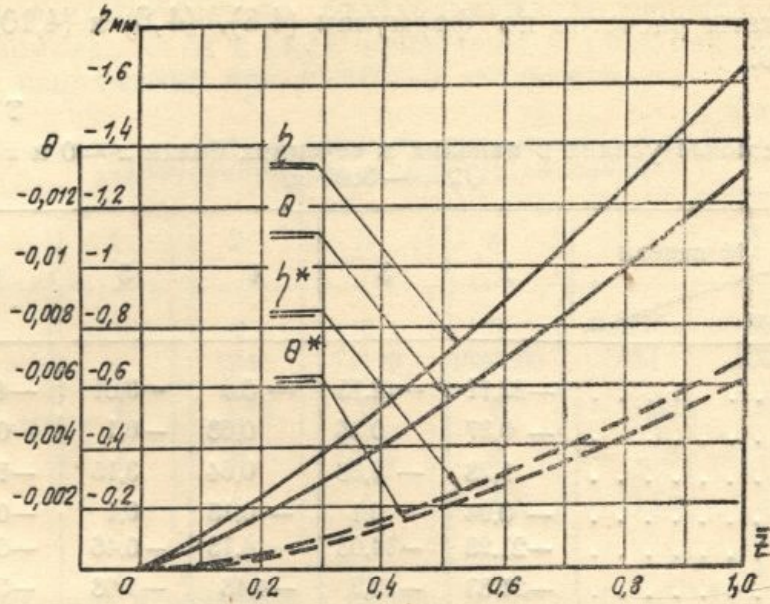


Рис. 4.

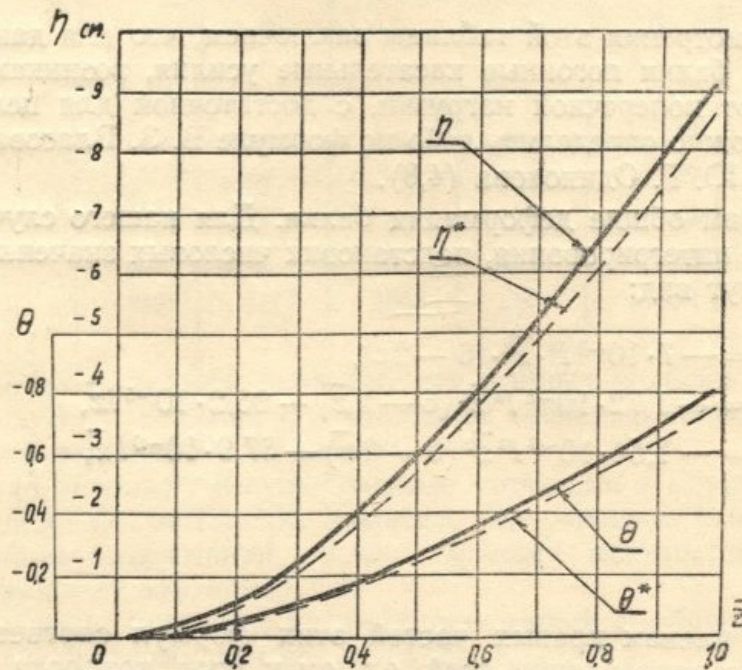


Рис. 5.

В данном случае имеем

$$\begin{aligned} &\text{при } z=0 \quad \omega_i(0) = 0, \quad \varphi_0 = 0, \\ &\text{при } z=l \quad \omega_1(l) = \frac{P_1}{EF_1}, \quad \omega_7(l) = \frac{P_7}{EF_7}, \\ &\Pi^{(\mu)}(l) = P_1 h_1^{(\mu)} + P_7 h_7^{(\mu)}, \quad \mu = 5, 6, 7. \end{aligned} \quad (4,12)$$

При этом нормальные напряжения в стрингерах определяются так:

$$\begin{aligned} \sigma_i = & \frac{P_1 + P_7}{F} + \frac{P_1 u_1 + P_7 u_7}{I_v} u_i + \frac{P_1 v_1 + P_7 v_7}{I_u} v_i + \\ & + \frac{P_1 \omega_1^* + P_7 \omega_7^*}{I_w} \omega_i^* + \sum_{\mu=5}^7 \frac{P_1 h_1^{(\mu)} + P_7 h_7^{(\mu)}}{I_\mu} \frac{\operatorname{ch} \lambda_\mu z}{\operatorname{ch} \lambda_\mu l} h_i^{(\mu)} \end{aligned} \quad (4,13)$$

Результаты расчетов по этой формуле нанесены на график (рис. 6), где пунктирными линиями изображены эпюры нормальных напряжений, вычисленные по методу В. З. Власова, то есть по первым четырем слагаемым правой части формулы (4,13).

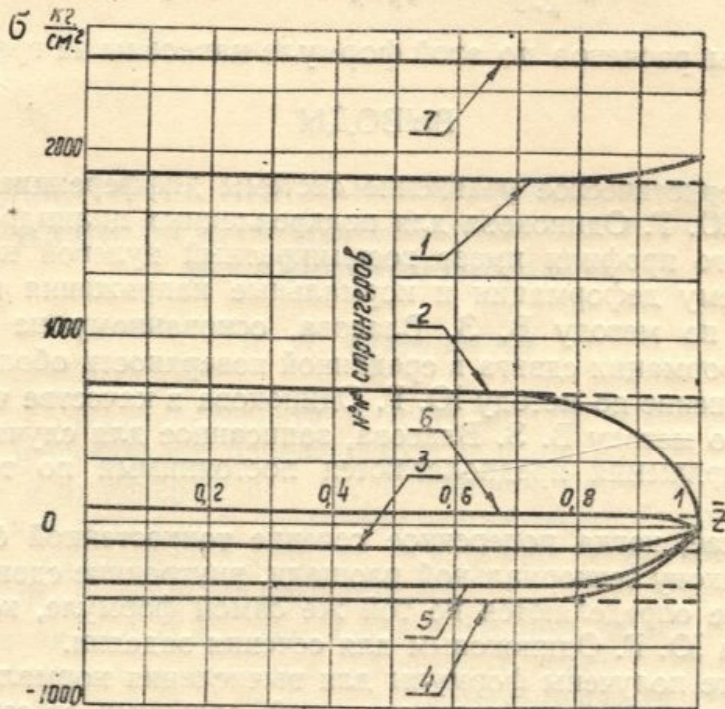


Рис. 6.

Как видно из графика нормальных напряжений, при расчете балки на осевые силы по методу В. З. Власова не выполняются граничные условия для стрингеров № 1—6 на свободном торце балки (при $z = 1$).

При расчете данного примера по методу В. З. Власова погонные сдвигающие усилия в обшивке по всей длине балки равны нулю (при предположении, что касательные напряжения по толщине оболочки не меняются).

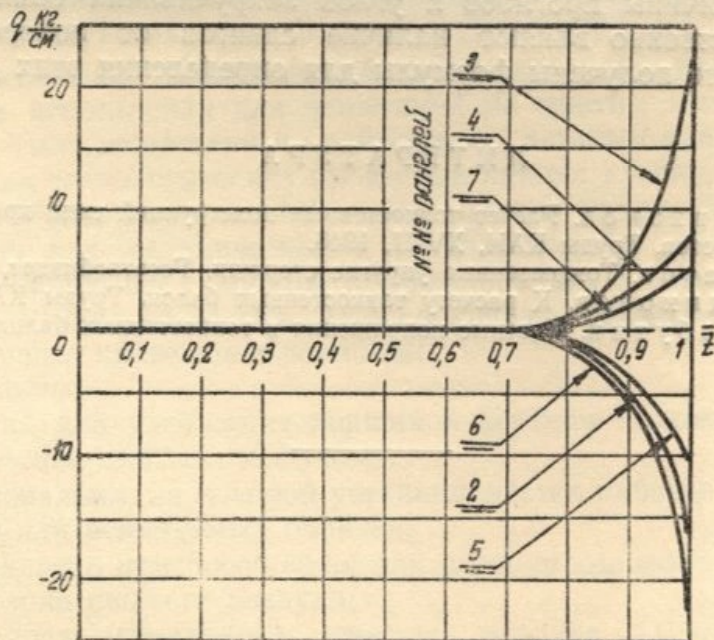


Рис. 7.

По уточненной методике они определяются так:

$$q_i = \frac{G}{E} \sum_{\mu=5}^7 \frac{P_1 h_i^{(\mu)} + P_7 h_7^{(\mu)}}{I_\mu \lambda_\mu} \frac{\text{sh } \lambda_\mu z}{\text{ch } \lambda_\mu l} b_i k_i^{(\mu)}. \quad (4,14)$$

Результаты расчетов по этой формуле нанесены на график (рис. 7).

ВЫВОДЫ

1. Характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений метода Ю. Г. Одинокова для подкрепленных цилиндрических оболочек открытого профиля имеет восьмикратный нулевой корень. Соответствующие ему деформации и нормальные напряжения в стрингерах определяются по методу В. З. Власова, основанному на гипотезе об отсутствии деформации сдвига в срединной поверхности оболочки. Следовательно, в решение по методу Ю. Г. Одинокова в качестве частного входит решение по методу В. З. Власова, записанное для случая, когда касательные напряжения предполагаются постоянными по толщине оболочки.

2. В случае, когда поперечное сечение тонкостенной балки депланируется по закону секториальной площади, внутренние сдвигающие усилия в оболочке определяются по той же самой формуле, которая ранее была получена Ю. Г. Одиноквым для сечения заделки.

3. В работе получены формулы для вычисления нормальных и касательных напряжений с учетом депланаций, отличных от секториальных. Эти напряжения оказываются значительными при действии на балку осевых сил.

4. При расчете подкрепленных балок открытого профиля со свободными или защемленными концами от поперечной нагрузки формулы В. З. Власова для определения нормальных и касательных напряжений дают достаточную для практики точность. Однако метод В. З. Власова принципиально не позволяет решать задачи, в которых произвольно заданы осевые силы, когда граничные условия в каком-либо сечении представлены частично силами, частично — перемещениями.

5. На величины прогибов и углов закручивания балки открытого профиля существенно влияют наличие сдвигов от поперечной силы. В данной работе получены формулы для определения этих деформаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Г. Одинок о в. Расчет тонкостенных конструкций типа крыла, фюзеляжа и оперения самолетов. Труды КАИ, XVIII, 1946.
2. В. З. В л а с о в. Тонкостенные упругие стержни, Госстройиздат, 1940.
3. Ю. Г. Одинок о в. К расчету тонкостенных балок. Труды КАИ, XXV, 1951.
4. Н. В. Х л е б у г и н. Местные напряжения в тонкостенных балках. Труды ХАИ, вып. 16, 1955.