ТРУДЫ ХАРЬКОВСКОГО АВИАЦИОННОГО ИНСТИТУТА

Выпуск 17 1957

# О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ ПРИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

*В. Е. Семенов*

Применение математического анализа к изучению многих технологических процессов обработки металлов давлением, физическая сущность которых хорошо известна, зачастую безуспешно. Это проявляется в одних случаях в том, что, умея составить соотношения (уравнения) между параметрами, описывающими процесс, мы не можем найти из них выражение интересующих нас параметров через другие. В других случаях мы идем на ряд упрощений, часто очень грубых, чтобы все-таки получить такие выражения, чем в значительной степени снижаем ценность наших выводов.

В этих случаях большую помощь может оказать теория подобия, отвечающая на вопрос, как использовать результаты единичного опыта для других случаев, а также метод моделирования, основанный на этой теории и показывающий, каким требованиям должна удовлетворять модель, чтобы процессы, протекающие в ней, были подобны явлениям в натуре.

Теория подобия и моделирование успешно применяются при решении самых различных вопросов науки и техники. Однако как теоретических, так и экспериментальных работ, посвященных моделированию технологических процессов, очень немного, хотя общая теория подобия, нашедшая широкое применение в других областях, может быть применена и здесь. Наиболее важными работами, относящимися к моделированию технологических процессов, являются работы В. Л. Кирпичева [1], Н. Н. Давиденкова [2], С. И. Губкина [3], А. А. Ильюшина [4].

Дальнейший анализ условий подобия протекания технологических процессов и их моделирования является необходимым. И не случайно Ленинградская научно-производственная технологическая конференция 1951 года в качестве одной из основных проблем, требующих немедленного разрешения, рекомендовала «дальнейшую разработку принципов моделирования процессов обработки металлов давлением» [5].

В известных нам работах ([1], [2], [3], [4] и др.) рассматривается вопрос о подобии при пластическом деформировании в стадии нагружения. Но в технологических процессах нас в первую очередь интересует достижение необходимой формы детали после снятия всех формообразующих усилий. В связи с этим в настоящей заметке расматривается не только нагрузка, но и разгрузка при обычных скоростях и температурах деформирования.

## Закон подобия Кирпичева и подобие механических свойств материалов

Технологический процесс обработки металлов давлением в стадии возрастания деформирующих усилий при обычных скоростях и деформациях может быть описан рядом уравнений теории пластичности, анализ размерностей которых приводит к следующему выводу [4]: равенство соответствующих относительных деформаций и подобие напряженных состояний в соответствующих точках геометрически подобных деформируемых подобно расположенными внешними силами тел будет обеспечено, если коэффициенты трения пар инструмент—заготовка будут одинаковы, сопротивления трения пропорциональны соответствующим пределам текучести и механические свойства рассматриваемых материалов подобны между собой. Подобие механических свойств означает:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=\frac{\sigma_{s2}}{\sigma_{s1}}=\frac{k_2}{k_1}, \qquad (1)$$

где $\sigma_1$ и $\sigma_2$ — напряжения на диаграммах напряжение — деформация рассматриваемых материалов при одной и той же относительной деформации $e$;
$\sigma_{s2}$ и $\sigma_{s1}$ — напряжения предела текучести,
$k_1$ и $k_2$ — модули объемного расширения.

При всех перечисленных выше условиях в соответствующих точках при одинаковых относительных деформациях $e$ имеем:
для удельных давлений $p$

$$\frac{p}{\sigma_s}=i\,\mathrm{dem} \qquad (2)$$

для усилий $P$

$$\frac{P}{\sigma_s L^2}=i\,\mathrm{dem}, \qquad (3)$$

где $L$ — какой-либо характерный линейный размер,
для мощностей $H$

$$\frac{H}{\sigma_s L^3}=i\,\mathrm{dem}.$$

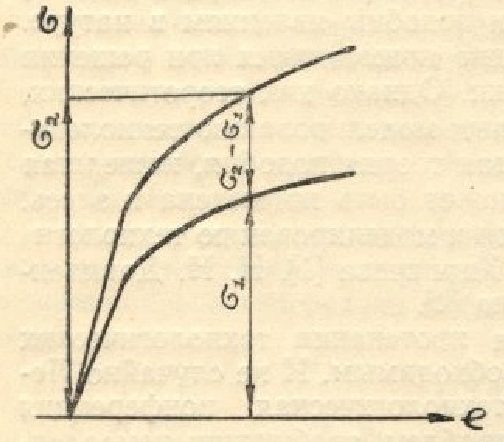

Рис. 1.

Соотношения (2), (3) и (4) составляют закон подобия В. Л. Кирпичева.

Остановимся более подробно на подобии диаграмм $\sigma=\Phi(e)$. Две диаграммы интенсивность напряжения — интенсивность деформации $\sigma_2=\Phi_2(e)$ и $\sigma_1=\Phi_1(e)$ называются подобными по напряжениям, если отношение $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=k_\sigma=\mathrm{const}$ при любых одинаковых на обеих диаграммах деформациях.

Величину $k_\sigma$ будем называть коэффициентом подобия диаграмм по напряжениям.

На рисунке 1 приведены две подобные по напряжениям диаграммы с $k_\sigma=1{,}5$. Для подобных диаграмм $\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_1}=k_\sigma-1=\mathrm{const}$.

Это соотношение дает удобный способ выявления подобия по напряжениям двух диаграмм: если избыток напряжения $\sigma_2$ на одной диаграмме над напряжением $\sigma_1$ на другой при одной и той же деформации $e$, то есть $\sigma_2-\sigma_1$, составляет одну и ту же часть от $\sigma_1$ (или $\sigma_2$), то диаграммы подобны. Так для диаграмм, приведенных на рисунке 1, $\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_1}=\frac{1}{3}$.

Как видим, о подобии диаграмм можно судить по результатам механических испытаний, то есть использовав диаграммы в их „натуральном" виде, не прибегая к их аналитическому приближению.

В практике используются различные виды диаграмм напряжение—деформация $\sigma - e$, $\sigma + \ln(1+e)$, $\sigma - \psi$, $\sigma_{усл} - e$, $\tau - \gamma$.

Возникает вопрос, следует ли из подобия диаграмм одного вида, например $\sigma - e$, подобие их в другом виде. Покажем, что это так.

О подобии двух диаграмм мы судим по отношению напряжений $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$, равных для обеих диаграмм относительных деформаций $e$. Но если одинаковы $e$, то одинаковы и $\ln(1+e)$ и, следовательно, из подобия диаграмм $\sigma - e$ следует подобие $\sigma - \ln(1+e)$.

Точно так же из равенства $e$ следует равенство $\psi\left(\frac{e}{1+e}\right)$, то есть из подобия диаграмм $\sigma - e$ следует подобие диаграмм $\sigma - \psi$ с тем же $k_\sigma$.

Если $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = k_\sigma$ для любых равных на двух диаграммах относительных деформаций $e$, то

$$\frac{\sigma_{2\,усл}}{\sigma_{1\,усл}} = \frac{\sigma_2/1+e}{\sigma_1/1+e} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = k_\sigma,$$

то есть диаграммы $\sigma_{усл} - e$ также подобны с тем же $k_\sigma$.

Точно так же для $\tau = \tau(\gamma)$ имеем

$$\frac{\tau_2(\gamma)}{\tau_2(\gamma)} = \frac{\sigma_2\,(e\sqrt{3})/\sqrt{3}}{\sigma_1\,(e\sqrt{3})/\sqrt{3}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = k_\sigma.$$

Итак, подобие диаграмм по напряжениям и их коэффициент подобия $k_\sigma$ можно (по крайней мере в пределах равномерной деформации) устанавливать по любому из видов диаграмм, используемых в практике.

Введем понятие о диаграммах, подобных по деформациям.

Диаграммы $e_1 = e_1(\sigma)$ и $e_2 = e_2(\sigma)$ будем называть подобными по деформациям, если для любых, но равных на обоих диаграммах напряжений $\sigma$ имеем $\frac{e_2}{e_1} = k_e = \text{const}$. Так как для диаграмм на рисунке 2 $\frac{e_2}{e_1} = k_e = 1,5$.

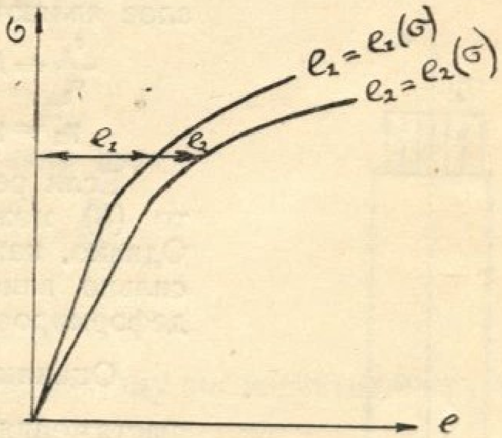

Рис. 2.

Рассмотрим теперь условие подобия механических свойств (1) при нагружении. Физическую сущность этого условия выясним из рассмотрения величины работы деформации. Полная работа деформации $w$, приходящаяся на единицу деформируемого объема, состоит из работы по изменению формы $w_ф$ и работы по изменению объема $w_0$, так что

$$w = w_ф + w_0,$$

причем

$$w_ф = \int_0^e \sigma\, de \quad \text{и} \quad w_0 = \frac{k\theta^2}{2},$$

где $\theta$ — относительное изменение объема.

Рассмотрим случай деформирования двух геометрически подобных тел с подобными по напряжениям диаграммами $\sigma_1 = \Phi_1(e)$ и $\sigma_2 = \Phi_2(e)$, предполагая, что все условия подобного деформирования, сформулированные выше, выполнены.
Для работ имеем

$$w_1 = \int_0^e \sigma_1 \, de + \frac{k_1 \theta^2}{2}$$

$$w_2 = \int_0^e \sigma_2 \, de + \frac{k_1 \theta^2}{2}.$$

Из этих выражений видим, что при $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = k_\sigma$ будет

$$w_2 = k_\sigma w_1, \tag{5}$$

если только $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{k_2}{k_1}$, то есть при условии (1).

Если в последнем соотношении заменить $k$ через коэффициент Пуансона $\mu$ и модуль упругости $E$, то получим

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{E_2}{E_1} \frac{1 - 2\mu_1}{1 - 2\mu_2}.$$

Но

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{E_2}{E_1} = k_\sigma,$$

поэтому из последнего соотношения получаем $\mu_1 = \mu_2$.

Следовательно, условиями подобия механических свойств материалов являются

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = k_\sigma = \text{const}. \tag{7}$$

$$\mu_1 = \mu_2 \tag{8}$$

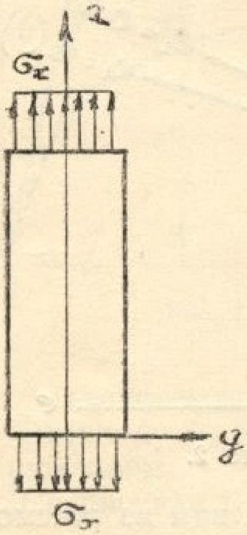

Рис. 3.

Если речь идет о двух различных материалах, то (8) может выполняться лишь приближенно. Однако, как мы сейчас убедимся, это не может сильно влиять на нарушение подобных условий деформирования при пластических деформациях.

Оценим величину работы $w_0 = \frac{k\theta^2}{2}$ на примере растяжения круглого образца.
Имеем (рис. 3) $e_y = e_z = -\mu e_x$.
Следовательно,

$$\theta = e_x + e_y + e_z = (1 - 2\mu)\, e_x.$$

Значит

$$w = \int_0^{e_x} \sigma_x \, de_x + \frac{E(1 - 2\mu)}{6} e_x^2.$$

Если рассматривать деформирование только в пределах упругости, то $w = \frac{E e_x^2}{2}\left(1 + \frac{1 - 2\mu}{3}\right)$, откуда видно, что

$$\frac{w_0}{w_\Phi} = \frac{1-2\mu}{3}. \tag{9}$$

Если взять $\mu = \frac{1}{3}$, то $\frac{w_0}{w_\Phi} = \frac{1}{9}$, а так как уже на пределе текучести $\mu = 0{,}4$ [6], то $\frac{w_0}{w_\Phi} = 0{,}07$, то есть работа по изменению объема уже при небольших пластических деформациях составляет лишь небольшую часть всей работы деформирования. А если учесть, что при больших пластических деформациях $\mu$ приближается к 0,5, то можно сделать вывод, что работа по изменению объема $w_0$ настолько мала, что ею можно пренебречь. Поэтому условием (8) можно пренебречь и считать, что при пластических деформациях в стадии нагрузки условием подобия механических свойств двух материалов является только подобие диаграмм напряжение — деформация (7).

Это обстоятельство очень важно с практической точки зрения, так как определение $\mu$ для образцов, особенно плоских, затруднено [6].

## Об остаточных деформациях после разгрузки

Пусть два тела из материалов с подобными механическими свойствами нагружены усилиями, величины которых удовлетворяют закону подобия Кирпичева [3] (все условия подобия, разумеется, выполнены) и вызывают в деформируемых телах напряжения выше предела текучести.

При этом относительные деформации $e$ в сходственных точках будут одинаковы. После снятия усилий получаем

$$e_{1\,\text{ост}}\, e = -\frac{\sigma_1}{E_1}$$

$$e_{1\,\text{ост}} = e - \frac{\sigma_2}{E_2}.$$

Но из подобия диаграмм по напряжениям имеем

$$\frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{\sigma_1}{E_1}, \text{ так как } \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{E_2}{E_1} = k_\sigma$$

и поэтому

$$e_{10\,cm} = e_{20\,cm}.$$

Но это относится к каждой точке тела, поэтому после снятия нагрузки тела будут геометрически подобными.

Рассмотрим разгрузку двух материалов с диаграммами, подобными по деформациям, если они были нагружены так, что напряжения $\sigma$ в соответствующих точках были одними и теми же.

Из равенства напряжений имеем

$$E_2(e_2 - e_{20\,cm}) = E_1(e_1 - e_{10\,cm}). \tag{10}$$

Но из подобия диаграмм по деформациям следует

$$\frac{E_1}{E_2} = k_e$$

$$\left(\text{так как } \frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma/e_1}{\sigma/e_2} = \frac{e_2}{e_1} = k_e\right).$$

Подставив

$$e_2 = k_e e_1 \text{ и } \frac{E_1}{E_2} = k_e \text{ в (9),}$$

получаем

$$e_{2\,ocm} = k_e e_{1\,ocm}. \tag{11}$$

Следовательно, если диаграммы подобны по деформациям с коэффициентом подобия $k_\sigma$, то после разгружения материалов с одинаковых напряжений распределение остаточных деформаций также будет подобным с тем же коэффициентом подобия $k_e$.

Простейшим примером, иллюстрирующим (11), может быть следующий. Две геометрически одинаковых балки, изготовленных из материалов с подобными по деформациям диаграммами, нагружены моментом одной и той же величины такой, что напряжения в крайних волокнах выше $\sigma_s$. Тогда распределение напряжений по высоте сечения будет одинаковым, а распределение деформаций подобным (рис. 4).

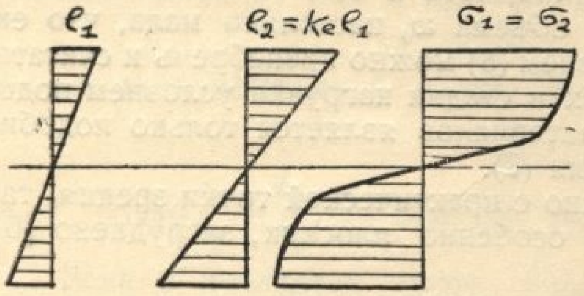


Рис. 4.

После снятия моментов распределение остаточных деформаций по высоте сечения будет также подобным (11), а остаточных напряжений — одинаковым.

## ВЫВОДЫ

1. Рассмотрено подобие диаграмм напряжения — деформация по напряжениям. Показано, что о подобии диаграмм по напряжениям можно судить по любому из видов встречающихся в практике диаграмм в их «натуральном» виде (то есть без аналитического приближения), причем коэффициент подобия $k_\sigma$ остается во всех случаях одинаковым.

2. Введено понятие о подобии диаграмм по деформациям.

3. Показано, что при обычных скоростях и температурах деформирования критерием подобия механических свойств деформируемых материалов является только подобие диаграмм по напряжениям.

4. Показано, что после разгрузки тел, изготовленных из материалов с подобными механическими свойствами удовлетворяющих закону подобия Кирпичева, геометрически подобные тела остаются геометрически подобными: остаточные относительные деформации в сходственных точках одинаковы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Кирпичев. Журнал русского физико-химического общества, VI. 1874.

2. Н. Н. Давиденков. Некоторые проблемы механики материалов. Лениздат, 1943.

3. С. И. Губкин. Подобные условия деформации при обработке металлов давлением. Изв. АН СССР, ОТН, 1947, № 1.

4. А. А. Ильюшин. Моделирование горячих и скоростных процессов обработки металлов давлением. В кн. «Прогрессивная технология кузнечно-штамповочного производства» Машгиз, 1953. ЛОНИТОМАШ. Книга 31.

5. П. В. Камнев. Современное состояние теории и практики кузнечно-штамповочного производства и основные направления их развития. В книге, указанной в [4].

6. М. П. Марковец и К. И. Фролова. О коэффициенте поперечной деформации в пластической области на пределе текучести. ЗЛ. 1951, № 5.