

С. Д. ФРОЛОВ

УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ВТОРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЦИРКУЛЯЦИИ СКОРОСТИ ВДОЛЬ РАЗМАХА ЛОПАТОК В ПРЯМЫХ РЕШЕТКАХ

При обтекании вязкой жидкостью прямой решетки лопаток, ограниченных по высоте твердыми стенками, наблюдается пространственная форма движения в отличие от предполагаемой в таком случае плоской картины обтекания. Следствием этого является непостоянство параметров потока и аэродинамических характеристик профилей по высоте лопаток.

Принято рассматривать пространственный поток в решетке лопаток как результат наложения двух течений: плоское (основное) течение, которое представляется как предельное состояние действительного потока через решетку в среднем по высоте лопаток сечении при бесконечном удалении друг от друга торцевых стенок, и дополнительное (вторичное) течение в плоскости, перпендикулярной к направлению основного потока.

Следует заметить, что относительно природы и формы движения вторичных потоков в решетках лопаток турбомашин в литературе высказываются различные мнения [1, 2, 6, 7]. Это свидетельствует о том, что указанный вопрос не получил еще исчерпывающего разрешения.

При построении расчетной схемы будем считать, что вторичное течение внутри межлопаточного канала характеризуется двумя вихревыми шнурами радиуса r_0 одинаковой интенсивности I , но противоположного вращения (рис. 1).

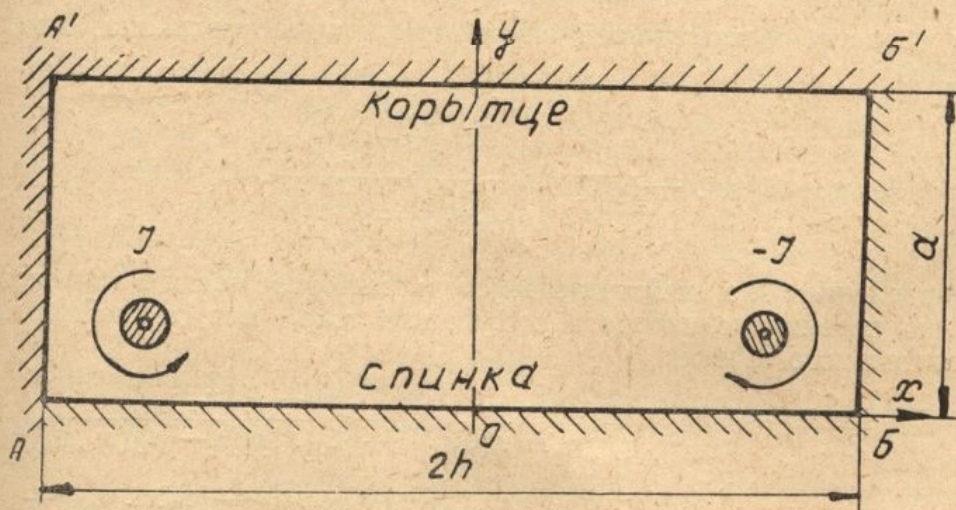


Рис. 1. Гидродинамическая схема вторичного течения.

Хотя само возникновение вторичных течений обусловлено проявлением вязких свойств жидкости, при дальнейшем рассмотрении данного явления будем считать жидкость невязкой и несжимаемой.

Для определения течения, вызванного парой вихрей внутри прямоугольной области, воспользуемся методом конформного преобразования.

Рассмотрим в плоскости W (рис. 2а) течение, вызванное четырьмя вихрями интенсивности I .

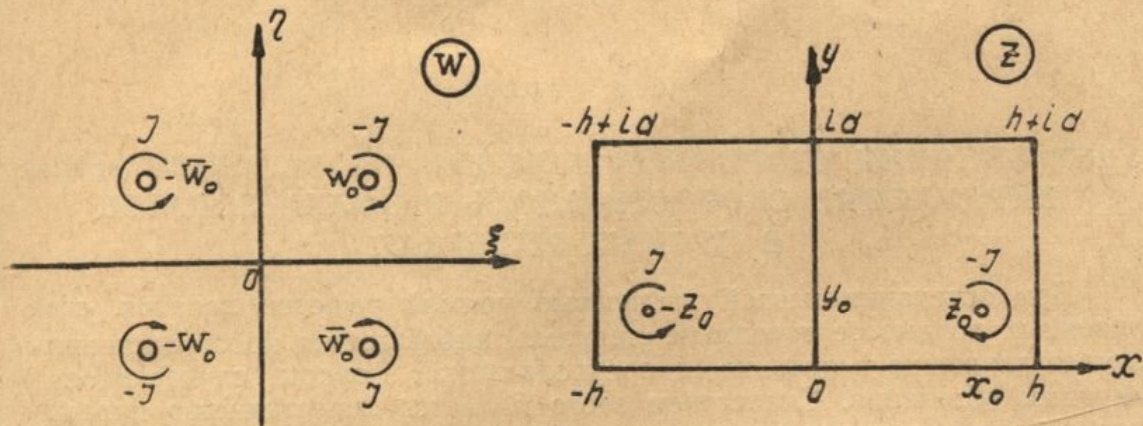


Рис. 2 а, б. К определению дополнительного течения.

Комплексный потенциал этого течения выражается функцией

$$\chi(w) = \frac{I}{2\pi i} \ln \frac{w^2 - \bar{w}_0^2}{w^2 - w_0^2} \quad (1)$$

Отобразим полуплоскость $Im w$ на внутренность прямоугольника в плоскости z (рис. 2б) с помощью функции [3]

$$z = C \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2 w^2)}} \quad (2)$$

Так как обращением эллиптического интеграла (2) является эллиптическая функция Якоби $w = \operatorname{sn}\left(\frac{z}{C}; k\right)$, то комплексный потенциал течения в области, составляющей внутренность прямоугольника, выразится функцией

$$\chi(z) = \frac{I}{2\pi i} \ln \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{z}{C} - \operatorname{sn}^2 \frac{\bar{z}_0}{C}}{\operatorname{sn}^2 \frac{z}{C} - \operatorname{sn}^2 \frac{z_0}{C}} \quad (3)$$

Разделением на действительную и мнимую части в (3) получим функцию потенциала скорости и функцию тока для рассматриваемого дополнительного течения

$$\varphi(x, y) = \frac{I}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2Q(x_0, y_0) [P(x, y) - P(x_0, y_0)]}{[P(x, y) - P(x_0, y_0)]^2 + [Q(x, y)]^2 - [Q(x_0, y_0)]^2} \quad (4)$$

$$\psi(x, y) = -\frac{I}{4\pi} \ln \frac{[P(x, y) - P(x_0, y_0)]^2 + [Q(x, y)]^2 - [Q(x_0, y_0)]^2 + 4[Q(x_0, y_0)]^2 [P(x, y) - P(x_0, y_0)]^2}{\{[P(x, y) - P(x_0, y_0)]^2 + [Q(x, y) - Q(x_0, y_0)]^2\}^2} \quad (5)$$

где функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определяются выражениями

$$P(x, y) = \frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{x}{C}; k\right) \operatorname{dn}^2\left(\frac{y}{C}; k'\right) - \operatorname{sn}^2\left(\frac{y}{C}; k'\right) \operatorname{cn}^2\left(\frac{y}{C}; k'\right) \operatorname{cn}^2\left(\frac{x}{C}; k\right) \operatorname{dn}^2\left(\frac{x}{C}; k\right)}{\left[\operatorname{cn}^2\left(\frac{y}{C}; k'\right) + k^2 \operatorname{sn}^2\left(\frac{x}{C}; k\right) \operatorname{sn}^2\left(\frac{y}{C}; k'\right)\right]^2} \quad (6)$$

$$Q(x, y) = \frac{2 \operatorname{sn}\left(\frac{x}{C}; k\right) \operatorname{cn}\left(\frac{x}{C}; k\right) \operatorname{dn}\left(\frac{x}{C}; k\right) \operatorname{sn}\left(\frac{y}{C}; k'\right) \operatorname{cn}\left(\frac{y}{C}; k'\right) \operatorname{dn}\left(\frac{y}{C}; k'\right)}{\left[\operatorname{cn}^2\left(\frac{y}{C}; k'\right) + k^2 \operatorname{sn}^2\left(\frac{x}{C}; k\right) \operatorname{sn}^2\left(\frac{y}{C}; k'\right)\right]^2} \quad (7)$$

В выражениях (6) и (7) используются общепринятые обозначения эллиптических функций Якоби [4].

Определенное нами дополнительное течение справедливо при наличии твердых границ прямоугольного контура, т. е. пригодно для наложения на основной поток только внутри межлопаточного канала вплоть до выходных кромок лопаток.

На выходе из межлопаточного канала две его твердые границы AB и $A'B'$ (рис. 1), соответствующие спинке и корытцу соседних лопаток, заменяются вихревой пеленой, первоначальная интенсивность которой определяется скоростями дополнительного течения (3) вдоль границ AB и $A'B'$.

Вихревая пелена в присутствии вихревых шнуров, выходящих из межлопаточных каналов, деформируется, вследствие чего будет изменяться как форма дополнительного течения, так и поле индуцируемых пеленой скоростей. Задача определения дополнительного течения в этих условиях сильно усложняется.

Сход вихревой пелены указанной интенсивности приводит в соответствии с вихревой схемой крыла Н. Е. Жуковского к соответствующему изменению интенсивности присоединенного вихря по размаху лопатки, т. е. к изменению циркуляции скорости вокруг профилей вдоль размаха лопатки. Этот закон распределения циркуляции, как и первоначальную интенсивность вихревой пелены, можно было бы считать за искомое решение, если бы поток на выходе из межлопаточного канала не деформировался и оставался таким же, как в случае твердых границ.

Примем в качестве первого приближения, что деформация выходящего из решетки потока происходит на величину осредненных по ширине канала нормальных к плоскости первоначальной пелены компонентов скоростей дополнительного течения (3). Это дополнительное отклонение потока в ту или другую сторону по сравнению с отклонением основного потока в решетке вызывает соответствующее изменение циркуляции скорости, а следовательно, изменяет первоначальную интенсивность вихревой пелены.

Итак, будем считать, что изменение циркуляции скорости Γ равно сумме изменений этой величины от схода первоначальной вихревой пелены и от указанной выше деформации выходящего потока.

Для получения решения в такой постановке задачи прежде всего необходимо определить скорости течения (3) в каждой точке границ $y=0$ и $y=a$ (рис. 1), а также осредненное по ширине канала a значение компоненты скорости v (проекция на ось y -ов) в каждом сечении канала, параллельном оси y -ов. При этом, в силу симметрии, ограничимся рассмотрением только правой половины прямоугольника.

Дифференцируя по z выражение (3), получаем

$$\begin{aligned} x'(z) = \bar{V} = u - iv &= \frac{l}{2\pi i} \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{z}{C} - \operatorname{sn}^2 \frac{z_0}{C}}{\operatorname{sn}^2 \frac{z}{C} - \operatorname{sn}^2 \frac{z_0}{C}} \frac{d}{dz} \left(\frac{\operatorname{sn}^2 \frac{z}{C} - \operatorname{sn}^2 \frac{z_0}{C}}{\operatorname{sn}^2 \frac{z}{C} - \operatorname{sn}^2 \frac{z_0}{C}} \right) = \\ &= \frac{l}{\pi C l} \frac{\operatorname{sn} \frac{z}{C} \operatorname{cn} \frac{z}{C} \operatorname{dn} \frac{z}{C} \left(\operatorname{sn}^2 \frac{z_0}{C} - \operatorname{sn}^2 \frac{z_0}{C} \right)}{\operatorname{sn}^4 \frac{z}{C} - \left(\operatorname{sn}^2 \frac{z_0}{C} + \operatorname{sn}^2 \frac{z_0}{C} \right) \operatorname{sn}^2 \frac{z}{C} + \operatorname{sn}^2 \frac{z_0}{C} \operatorname{sn}^2 \frac{z_0}{C}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как

$$\operatorname{sn}^2 \frac{z_0}{C} - \operatorname{sn}^2 \frac{z_0}{C} = -i 2Q(x_0, y_0);$$

$$\operatorname{sn}^2 \frac{z_0}{C} + \operatorname{sn}^2 \frac{z_0}{C} = 2P(x_0, y_0);$$

$$\operatorname{sn}^2 \frac{z_0}{C} \operatorname{sn}^2 \frac{z_0}{C} = [P(x_0, y_0)]^2 + [Q(x_0, y_0)]^2 = M(x_0, y_0),$$

то уравнение (8) окончательно примет вид

$$x'(z) = u - iv = -\frac{2IQ(x_0, y_0)}{\pi C} \frac{\operatorname{sn} \frac{z}{C} \operatorname{cn} \frac{z}{C} \operatorname{dn} \frac{z}{C}}{\operatorname{sn}^4 \frac{z}{C} - 2P(x_0, y_0) \operatorname{sn}^2 \frac{z}{C} + M(x_0, y_0)}. \quad (9)$$

На границе AB ($y=0$) $\operatorname{sn} \frac{z}{C} = \operatorname{sn} \frac{x}{C}$, в силу чего из (9) получаем

$$u_1 = \frac{2Q_0 l}{\pi C} \frac{\operatorname{sn} \frac{x}{C} \operatorname{cn} \frac{x}{C} \operatorname{dn} \frac{x}{C}}{\operatorname{sn}^4 \frac{x}{C} - 2P_0 \operatorname{sn}^2 \frac{x}{C} + M_0}, \quad (10)$$

где для краткости написания обозначено

$$P_0 = P(x_0, y_0), \quad Q_0 = Q(x_0, y_0), \quad M_0 = M(x_0, y_0).$$

На границе $A'B'$ ($y=a$)

$$\frac{z}{C} = \frac{x}{C} + i \frac{a}{C} = \frac{x}{C} + iK',$$

где K' — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k' ; дополнительный модуль k' определяется из соотношения $k'^2 = 1 - k^2$.

Так как

$$\operatorname{sn} \left(\frac{x}{C} + iK' \right) = \frac{1}{k \operatorname{sn} \frac{x}{C}},$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{x}{C} + iK'\right) = -i \frac{\operatorname{dn} \frac{x}{C}}{k \operatorname{sn} \frac{x}{C}},$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{x}{C} + iK'\right) = -i \frac{\operatorname{cn} \frac{x}{C}}{\operatorname{dn} \frac{x}{C}},$$

то для границы $y=a$ из (9) будем иметь

$$u_{II} = \frac{2k^2 Q_0 I}{\pi C} \frac{\operatorname{sn} \frac{x}{C} \operatorname{cn} \frac{x}{C} \operatorname{dn} \frac{x}{C}}{k^4 M_0 \operatorname{sn}^4 \frac{x}{C} - 2k^2 P_0 \operatorname{sn}^2 \frac{x}{C} + 1}. \quad (11)$$

Первоначальная интенсивность вихревой пелены

$$\gamma(x) = \frac{d\Gamma}{dx} = u_I - u_{II},$$

откуда

$$d\Gamma = (u_I - u_{II}) dx. \quad (12)$$

Интегрируя (12) вдоль оси x -ов, получаем

$$\begin{aligned} \Gamma = \int u_I dx - \int u_{II} dx + B = \frac{2Q_0 I}{\pi C} \int \frac{\operatorname{sn} \frac{x}{C} \operatorname{cn} \frac{x}{C} \operatorname{dn} \frac{x}{C} dx}{\operatorname{sn}^4 \frac{x}{C} - 2P_0 \operatorname{sn}^2 \frac{x}{C} + M_0} - \\ - \frac{2k^2 Q_0 I}{\pi C} \int \frac{\operatorname{sn} \frac{x}{C} \operatorname{cn} \frac{x}{C} \operatorname{dn} \frac{x}{C} dx}{k^4 M_0 \operatorname{sn}^4 \frac{x}{C} - 2k^2 P_0 \operatorname{sn}^2 \frac{x}{C} + 1} + B. \end{aligned} \quad (13)$$

Оба интеграла заменой переменной интегрирования

$$X = \operatorname{sn}^2 \frac{x}{C}; \quad dX = \frac{2}{C} \operatorname{sn} \frac{x}{C} \operatorname{cn} \frac{x}{C} \operatorname{dn} \frac{x}{C} dx$$

сводятся к интегралам вида

$$\int \frac{dX}{aX^2 + bX + d}.$$

Вид первообразной функции зависит от величины $\Delta = 4ad - b^2$. В данном случае имеем для первого интеграла

$$\Delta = 4M_0 - 4P_0^2 = 4(P_0^2 + Q_0^2) - 4P_0^2 = 4Q_0^2 > 0,$$

так как Q_0 — действительное число, и для второго интеграла

$$\Delta = 4k^4 M_0 - 4k^4 P_0^2 = 4k^4(P_0^2 + Q_0^2) - 4k^4 P_0^2 = 4k^4 Q_0^2 > 0,$$

так как k — также действительное число. Следовательно, оба интеграла из (13) выражаются первообразной функцией вида

$$\int \frac{dX}{aX^2 + bX + d} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{arctg} \frac{b + 2aX}{\sqrt{\Delta}} + \operatorname{const},$$

в силу чего уравнение (13) переходит в уравнение

$$\begin{aligned} \Gamma &= -\frac{I}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{x}{C} - P_0}{Q_0} + \operatorname{arctg} \frac{k^2 M_0 \operatorname{sn}^2 \frac{x}{C} - P_0}{Q_0} \right) + B = \\ &= -\frac{I}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{Q_0 \left[2P_0 - (1 + k^2 M_0) \operatorname{sn}^2 \frac{x}{C} \right]}{\left(P_0 - \operatorname{sn}^2 \frac{x}{C} \right) \left(P_0 - k^2 M_0 \operatorname{sn}^2 \frac{x}{C} \right) - Q_0} + B. \end{aligned} \quad (14)$$

Константу B определим из такого условия.

Циркуляция в середине размаха лопатки, т. е. при $x=0$, при удалении торцевых стенок на бесконечность становится равной величине циркуляции Γ_∞ при плоском обтекании. При этом вихри, сохраняя свою интенсивность I , с той же скоростью будут удаляться вместе с торцевыми стенками, т. е. вихри всегда остаются «концевыми» явлениями. Следовательно, при удалении торцевых стенок $x_0 \rightarrow \infty$, а y_0 остается величиной конечной, неравной нулю.

При этих условиях из (14) следует, что

$$B = \Gamma_\infty + \lim_{\substack{x_0 \rightarrow \infty \\ y_0 = \operatorname{const}}} \left[\frac{I}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2P_0 Q_0}{P_0^2 - Q_0^2} \right] = \Gamma_\infty + \frac{2I}{\pi} \lim_{\substack{x_0 \rightarrow \infty \\ y_0 = \operatorname{const}}} \left[\operatorname{arctg} \frac{Q_0}{P_0} \right]. \quad (15)$$

Определим предел во втором слагаемом из (15).

По уравнениям (6) и (7)

$$\frac{Q_0}{P_0} = \frac{2 \operatorname{sn} \left(\frac{x_0}{C}; k \right) \operatorname{cn} \left(\frac{x_0}{C}; k \right) \operatorname{dn} \left(\frac{x_0}{C}; k \right) \operatorname{sn} \left(\frac{y_0}{C}; k' \right) \operatorname{cn} \left(\frac{y_0}{C}; k' \right) \operatorname{dn} \left(\frac{y_0}{C}; k' \right)}{\operatorname{sn}^2 \left(\frac{x_0}{C}; k \right) \operatorname{dn}^2 \left(\frac{y_0}{C}; k' \right) - \operatorname{sn}^2 \left(\frac{y_0}{C}; k' \right) \operatorname{cn}^2 \left(\frac{y_0}{C}; k' \right) \operatorname{cn}^2 \left(\frac{x_0}{C}; k \right) \operatorname{dn}^2 \left(\frac{x_0}{C}; k \right)}. \quad (16)$$

Так как при удалении торцевых стенок (т. е. при $h \rightarrow \infty$ и $a = \operatorname{const}$) $k \rightarrow 1$ и $k' \rightarrow 0$, то эллиптические функции вырождаются:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn} \left(\frac{x}{C}; k \right) &\rightarrow \operatorname{th} \frac{x_0}{C}; & \operatorname{sn} \left(\frac{y_0}{C}; k' \right) &\rightarrow \sin \frac{y_0}{C}; \\ \operatorname{cn} \left(\frac{x_0}{C}; k \right) &\rightarrow \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{x_0}{C}}; & \operatorname{cn} \left(\frac{y_0}{C}; k' \right) &\rightarrow \cos \frac{y_0}{C}; \\ \operatorname{dn} \left(\frac{x_0}{C}; k \right) &\rightarrow \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{x_0}{C}}; & \operatorname{dn} \left(\frac{y_0}{C}; k' \right) &\rightarrow 1. \end{aligned}$$

Следовательно, при стремлении к пределу соотношение (16) переходит в соотношение

$$\left[\frac{Q_0}{P} \right]_{k'=0}^{k=1} = \frac{2 \operatorname{th} \frac{x_0}{C} \frac{i}{\operatorname{ch}^2 \frac{x_0}{C}} \sin \frac{y_0}{C} \cos \frac{y_0}{C}}{\operatorname{th}^2 \frac{x_0}{C} - \sin^2 \frac{y_0}{C} \cos^2 \frac{y_0}{C}} \frac{1}{\operatorname{ch}^4 \frac{x_0}{C}}.$$

Предел этого соотношения при $x_0 \rightarrow \infty$ и $y_0 = \text{const}$ равен нулю, так как $\operatorname{th} \frac{y_0}{C}$ при $x_0 \rightarrow \infty$ остается величиной ограниченной ($\operatorname{th}^2 \frac{x_0}{C} < 1$ при $\frac{x_0}{C} \rightarrow \infty$),

$$\text{а } \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{x_0}{C}} \rightarrow 0.$$

Следовательно, второе слагаемое в (15) равно нулю и

$$B = \Gamma_\infty. \quad (17)$$

Итак, выражение (14) принимает вид

$$\Gamma = \Gamma_\infty - \frac{I}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{Q_0 \left[2P_0 - (1 + k^2 M_0) \operatorname{sn}^2 \left(\frac{x_0}{C}; k \right) \right]}{\left[P_0 - \operatorname{sn}^2 \left(\frac{x_0}{C}; k \right) \right] \left[P_0 - k^2 M_0 \operatorname{sn}^2 \left(\frac{x_0}{C}; k \right) \right] - Q_0^2}. \quad (18)$$

Закон (18) распределения циркуляции вдоль размаха лопатки с учетом только сходящей вихревой пелены первоначальной интенсивности, как уже отмечалось, должен быть дополнен еще слагаемым, определяющим изменение циркуляции от деформации выходящего потока под действием скоростей \bar{v} .

Значение скоростей \bar{v} определяем следующим образом:

$$\bar{v} = \frac{1}{a} \int_0^a v dy = \frac{1}{a} \int_0^a \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = \frac{1}{a} \int_0^a d\varphi = \frac{\varphi(x, a) - \varphi(x, 0)}{a}. \quad (19)$$

Устанавливая по (4) значения

$$\varphi(x, a) = \frac{I}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{k^2 Q_0 \operatorname{sn}^2 \left(\frac{x}{C}; k \right)}{1 - k^2 P_0 \operatorname{sn}^2 \left(\frac{x}{C}; k \right)},$$

$$\varphi(x, 0) = \frac{I}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{Q_0}{\operatorname{sn}^2 \left(\frac{x}{C}; k \right) - P_0},$$

находим, что

$$\bar{v} = \frac{I}{\pi a} \operatorname{arctg} \frac{Q_0 \left[1 - k^2 \operatorname{sn}^4 \left(\frac{x}{C}; k \right) \right]}{\left[1 - k^2 P_0 \operatorname{sn}^2 \left(\frac{x}{C}; k \right) \right] \left[P_0 - \operatorname{sn}^2 \left(\frac{x}{C}; k \right) \right] - k^2 Q_0^2 \operatorname{sn}^2 \left(\frac{x}{C}; k \right)}. \quad (20)$$

Заметим, что данный прием осреднения неприемлем для сечений, захватывающих ядро вихря.

Чтобы не усложнять операцию определения v , можно при практических подсчетах исключить эти сечения из рассмотрения. Стыковка двух частей закона распределения v по полуразмаху лопатки по обеим сторонам от ядра вихря осуществляется плавным проведением кривой через нуль в точке $x=x_0$, так как вполне очевидно, что при $x=x_0$ $\bar{v}=0$.

Изменение циркуляции от деформации потока определяется из соотношения

$$\Delta\Gamma = \bar{v}_u t, \quad (21)$$

где $\bar{v}_u = \bar{v} \sin \bar{\beta}_2$ — проекция скорости \bar{v} на направление тангенциального компонента скорости основного потока на выходе из решетки: t — шаг решетки.

Замечая, что $a = t \sin \bar{\beta}_2$, будем иметь из (21) и (20)

$$\Delta\Gamma = \frac{l}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{Q_0 \left[1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \left(\frac{x}{C}; k \right) \right]}{\left[1 - k^2 P_0 \operatorname{sn}^2 \left(\frac{x}{C}; k \right) \right] \left[P_0 - \operatorname{sn}^2 \left(\frac{x}{C}; k \right) \right] - k^2 Q_0^2 \operatorname{sn}^2 \left(\frac{x}{C}; k \right)}. \quad (21')$$

Итак, закон распределения циркуляции скорости вокруг профилей лопатки вдоль ее размаха при воздействии вторичных течений представляется следующей зависимостью:

$$\begin{aligned} \Gamma(x) = \Gamma_\infty - \frac{l}{\pi} \operatorname{arctg} & \frac{Q_0 \left[2P_0 - (1 + k^2 M_0) \operatorname{sn}^2 \left(\frac{x}{C}; k \right) \right]}{\left[P_0 - \operatorname{sn}^2 \left(\frac{x}{C}; k \right) \right] \left[P_0 - k^2 M_0 \operatorname{sn}^2 \left(\frac{x}{C}; k \right) \right] - Q_0^2} \\ & - \frac{l}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{Q_0 \left[1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \left(\frac{x}{C}; k \right) \right]}{\left[1 - k^2 P_0 \operatorname{sn}^2 \left(\frac{x}{C}; k \right) \right] \left[P_0 - \operatorname{sn}^2 \left(\frac{x}{C}; k \right) \right] - k^2 Q_0^2 \operatorname{sn}^2 \left(\frac{x}{C}; k \right)}. \quad (22) \end{aligned}$$

Подсчеты по (22) удобнее производить, если преобразовать аргумент $\frac{x}{C}$ следующим образом:

$\frac{x}{C} = \frac{x}{h} \frac{h}{C} = \bar{x} K$, где $0 \leq \bar{x} \leq 1$; K — полный эллиптический интеграл первого рода в канонической форме Лежандра с модулем k .

Тогда уравнение (22) окончательно будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Gamma(\bar{x}) = \Gamma_\infty - \frac{l}{\pi} \operatorname{arctg} & \frac{Q_0 [2P_0 - (1 + k^2 M_0) \operatorname{sn}^2(K\bar{x}; k)]}{[P_0 - \operatorname{sn}^2(K\bar{x}; k)] [P_0 - k^2 M_0 \operatorname{sn}^2(K\bar{x}; k)] - Q_0^2} \\ & - \frac{l}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{Q_0 [1 - k^2 \operatorname{sn}^2(K\bar{x}; k)]}{[1 - k^2 P_0 \operatorname{sn}^2(K\bar{x}; k)] [P_0 - \operatorname{sn}^2(K\bar{x}; k)] - k^2 Q_0^2 \operatorname{sn}^2(K\bar{x}; k)}. \quad (23) \end{aligned}$$

На графиках рис. 3. представлены кривые распределения циркуляции $\Gamma(\bar{x})$ по полуразмаху лопатки, полученные расчетом по (23) и по

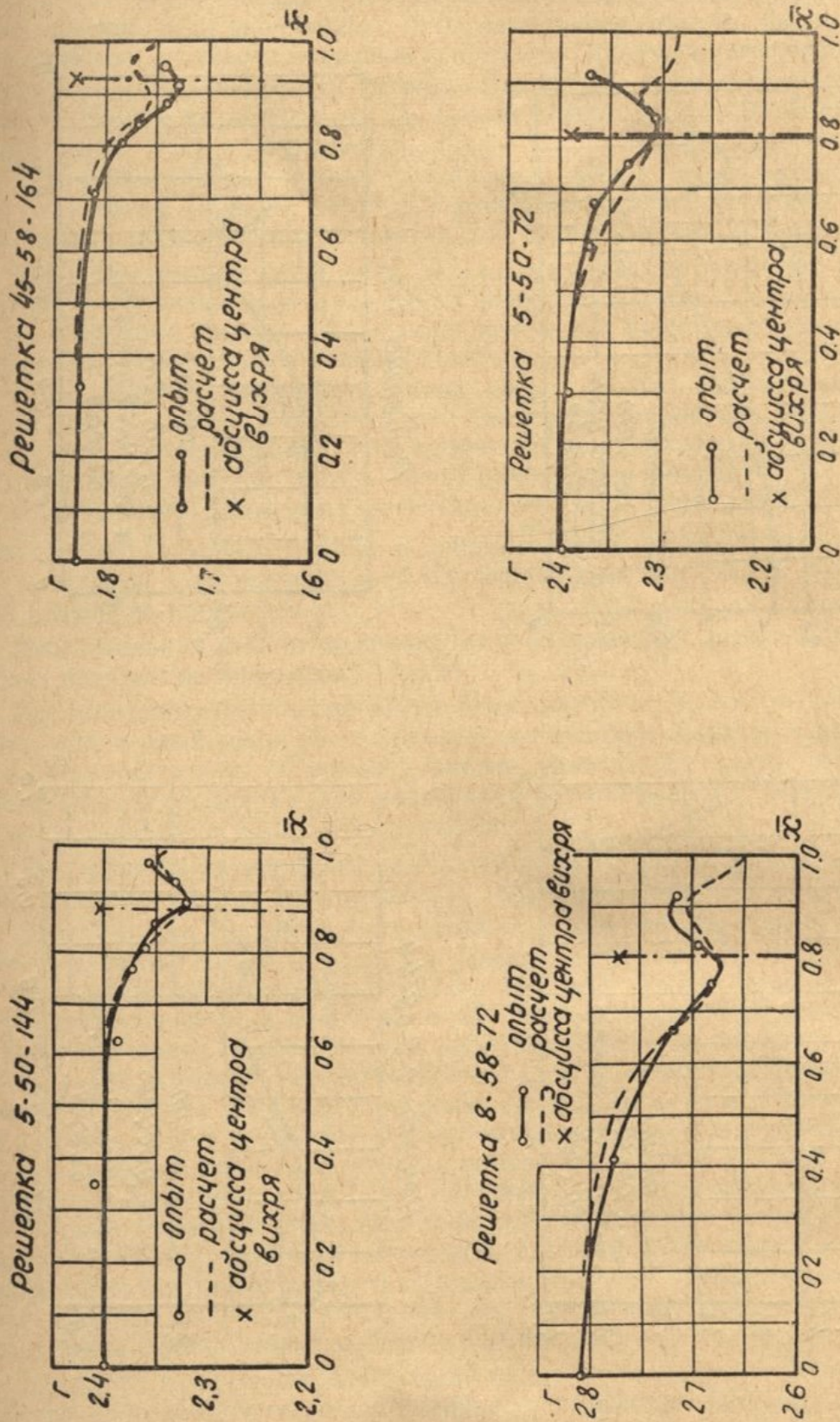


Рис. 3. а, б, в, г. Сопоставление результатов расчета с экспериментом.

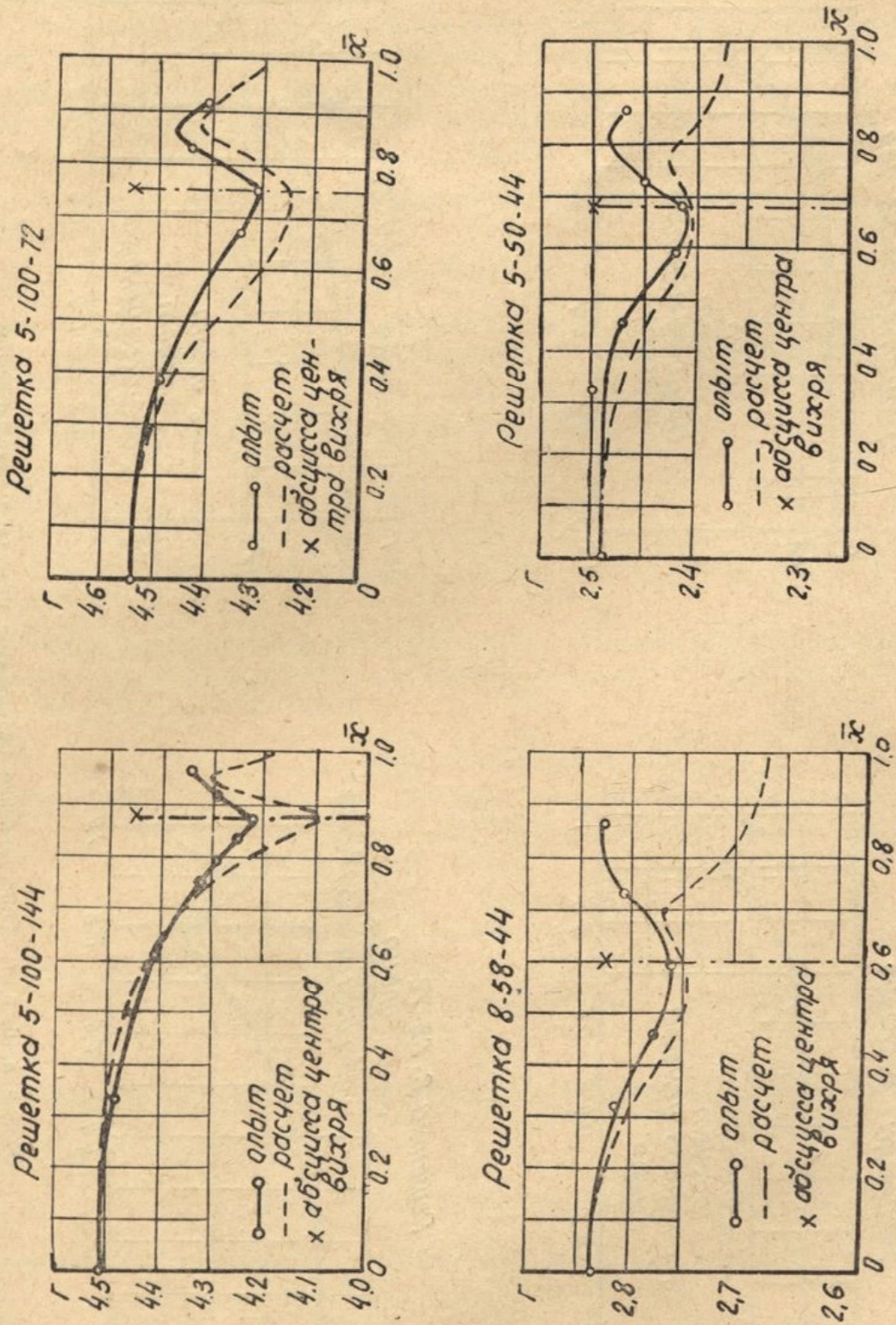


Рис. 3. д, е, ж, з. Сопоставление результатов расчета с экспериментом.

данным опытов для восьми решеток. Испытанные решетки представляли собой плоские модели сопловых аппаратов и различались формой профиля, густотой решетки и удлинением лопаток. Продувки решеток производились при малых скоростях потока ($M_2 \approx 0,2$, $Re_2 \approx 3,5 \cdot 10^5$). Интенсивность I вихрей и их координаты x_0 , y_0 при подсчетах по (23) брались по измерениям в опытах на решетках.

При сравнении полученных результатов прежде всего следует отметить однотипный характер опытной и расчетной кривых, что указывает на качественное совпадение результатов для всех испытанных решеток.

В количественном отношении результат сравнения расчета с опытом получается неодинаковым для разных решеток. Лучшее совпадение расчетной и опытной кривых наблюдается для густых решеток со сравнительно большой относительной длиной лопаток.

Наибольшее несовпадение кривых имеет место вблизи торцевой стенки. Это объясняется тем, что действительное движение в этом районе не является потенциальным, в то время как при построении расчета оно предполагалось потенциальным всюду кроме ядер вихрей.

В силу этого допущения расчетная величина циркуляции на конце лопатки ($\bar{x}=1$) отлична от нуля. В действительном же движении циркуляция в области пограничного слоя на торцевой стенке быстро падает до нуля вместе со скоростью.

Максимальная разбежка кривых на участке $0 \leq \bar{x} \leq \bar{x}_0$ для всех испытанных решеток не превышает $1 \div 2\%$.

Произведенное сравнение результатов расчетов и опытов показывает, что полученный закон распределения циркуляции скорости вокруг профилей лопатки вдоль ее размаха вполне удовлетворительно отражает действительное изменение этой величины в прямой решетке лопаток, ограниченных по высоте торцевыми стенками.

Что касается распространения полученного решения на случай кольцевых решеток, то пока можно сказать только следующее.

Известно, что общий характер концевых явлений в кольцевых неподвижных решетках такой же, как и в прямых решетках. Известно также, что в кольцевых неподвижных решетках (без радиального зазора) наблюдается проявление ряда новых явлений: радиальная неуравновешенность пограничных слоев на поверхности лопаток, веерное расположение лопаток и других, которые определенным образом изменяют закономерности развития концевых явлений. Еще сложнее обстоит дело в случае вращения решетки. Все это говорит о том, что распространять полученное решение на случай кольцевой решетки можно только при условии слабого проявления новых факторов. Такое положение, по-видимому, может иметь место в направляющих аппаратах турбомашин с большим относительным диаметром втулки. В других возможных случаях полученным решением можно воспользоваться в качестве предварительной оценки влияния концевых явлений на рассматриваемую характеристику. Насколько состоятельна такая оценка, может показать только опыт.

Расчет распределения циркуляции скорости по размаху лопатки по формуле (23) требует знания интенсивности вихревых шнуров. Величину I возможно определить не только непосредственным ее измерением.

Анализ исследования вторичных течений в решетках лопаток турбомашин показывает, что их интенсивность зависит от многих факторов: типа решетки, ее геометрии, угла атаки, структуры натекающего потока и т. д. Это обстоятельство затрудняет получение обобщающих зависимостей для определения количественных характеристик рассматриваемого явления.

Основным содержанием вторичных течений в решетке лопаток является поперечное перетекание заторможенной жидкости по торцевым стенкам от корытца лопатки к спинке с образованием внутриканальных вихревых шнуров. Поэтому за количественную меру интенсивности вторичного течения можно принять интенсивность внутриканальных вихревых шнуров.

Поперечное перетекание заторможенной жидкости по торцевой стенке от корытца к спинке лопатки объясняется многими авторами [1, 2, 6, 8] нарушением в области пограничного слоя этой стенки уравнения динамического равновесия:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{\omega^2}{r}, \quad (24)$$

где p — давление в движущейся по криволинейному каналу жидкости;
 r — радиус кривизны траектории движения элемента жидкости;
 ρ — плотность жидкости;
 ω — скорость движения жидкости.

Вблизи торцевой стенки жидкость будет испытывать подтормаживающее действие этой стенки. В силу известного свойства пограничного слоя сохранять по толщине слоя величину давления, равную давлению на его внешней границе, левая часть равенства (24) будет оставаться неизменной и в области пограничного слоя на торцевой стенке. Но так как в области пограничного слоя скорость движения $v < \omega$, то в этой области будет иметь место неравенство

$$\left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| > \rho \frac{v^2}{r}, \quad (25)$$

которое отражает факт нарушения равновесия и перемещения заторможенной жидкости по торцевой стенке.

Из этого объяснения следует, что перетекание заторможенной жидкости будет более интенсивным при большем количественном выражении неравенства (25).

Осредненно по толщине пограничного слоя (от 0 до δ) неравенство 25 можно записать так:

$$\left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| > \rho \frac{\bar{v}^2}{r}. \quad (25')$$

При этом осреднение скорости движения производится так, чтобы сохранялась величина кинетической энергии заторможенной жидкости по всей толщине пограничного слоя, т. е.

$$\rho \delta \frac{\bar{v}^3}{2} = \int_0^{\delta} \rho v^3 dy, \quad (26)$$

благодаря чему величина неравенства (25) для всей толщины слоя не изменяется.

Правая часть неравенства (25') представляет собой уравновешенную часть поперечного градиента давлений в области пограничного слоя на торцевой стенке.

Неуравновешенная часть поперечного градиента, следовательно, будет

$$\left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{\text{н}} = \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| - \rho \frac{\bar{v}^2}{r} = \rho \frac{\omega^2}{r} - \rho \frac{\bar{v}^2}{r}. \quad (27)$$

Пусть связь между ω и v выражается законом

$$\frac{v}{\omega} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^n.$$

Тогда из (26)

$$\bar{v} = \frac{\omega}{\sqrt[3]{3n+1}}. \quad (28)$$

Подставляя (28) в (27), будем иметь

$$\left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{\text{н}} = \rho \frac{\omega^2}{r} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{(3n+1)^2}} \right) = B \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|, \quad (29)$$

или в интегральной форме

$$\int_{\text{сп}}^{\text{кор}} \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{\text{н}} dr = \int_{\text{сп}}^{\text{кор}} B \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| dr. \quad (30)$$

С достаточной степенью точности (если даже $\frac{1}{10} \leq n \leq \frac{1}{7}$, то $0,16 \leq B \leq 0,21$) можно принять $B = \text{const}$ по ширине межлопаточного канала, тогда

$$\int_{\text{сп}}^{\text{кор}} \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{\text{н}} dr = B \int_{\text{сп}}^{\text{кор}} \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| dr. \quad (30')$$

Здесь значком $\int_{\text{сп}}^{\text{кор}}$ обозначено интегрирование по ширине межлопаточного канала от спинки лопатки к корытцу вдоль радиуса кривизны (или огибающей радиусов кривизны) траекторий движения.

Из формулы (30) следует, что неуравновешенный перепад давлений на торцевой стенке, который является движущей силой поперечного перетекания заторможенной жидкости, пропорционален (с точностью определения $B = \text{const}$) перепаду давлений между корытцем и спинкой лопатки в ядре потока.

В соответствии с выражением (30') можно за меру количественного выражения причины вторичного течения принимать величину перепада давлений между корытцем и спинкой лопатки в ядре потока (плоской части потока) или эквивалентные ему величины: подъемная сила профиля или циркуляция скорости вокруг профиля в решетке.

Следовательно, влияние различных факторов следует прежде всего рассматривать в направлении их воздействия на величину подъемной силы или циркуляции скорости в решетке профилей, т. е. эта часть задачи полностью совпадает с аналогичной задачей для плоской решетки.

Между интенсивностью вторичного движения и количественной мерой проявления причины этого движения должна существовать определенная зависимость.

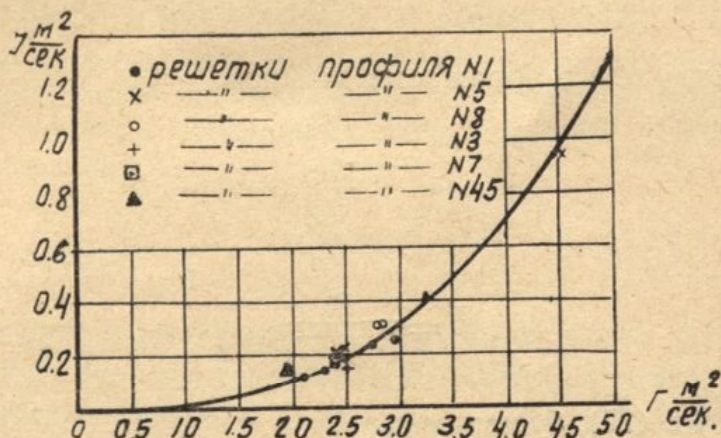


Рис. 4. Зависимость интенсивности вихревого шнура от начальной циркуляции скорости вокруг профиля лопатки.

На рис. 4 нанесены экспериментальные точки, полученные при испытании однотипных решеток с однородным потоком на входе. Решетки различались кривизной профиля ($\theta = 45 \div 73^\circ$), густотой ($\tau = 0,86 \div 2,45$) и удлинением лопаток ($\lambda = \frac{l}{b} = 0,44 \div 2,5$).

Характер расположения точек предоставляет полную возможность для их обработки в виде обобщающей зависимости. Результат аппроксимации функцией вида $y = Ax^n$ по методу наименьших квадратов представлен на рис. 4 в виде сплошной линии.

Как видим, эмпирическая зависимость

$$I = 0,00735 \Gamma_0^{2,8} \quad (31)$$

вполне приемлема в данном случае для выражения количественной связи между величиной циркуляции скорости вокруг профиля при плоском обтекании и интенсивностью вихревого шнура.

Некоторый разброс точек на рис. 4, который нельзя было объяснить только неизбежной погрешностью измерений, вызывает законный вопрос: определяется ли интенсивность вихревого шнура только количественной мерой причины его возникновения.

Для выяснения этого вопроса была проведена такая серия опытов.

1. Измерялась интенсивность вихревого шнура I , величина циркуляции скорости Γ_0 и потеря полного давления $\Delta \bar{H}_{\text{по}}$ в середине размаха лопатки при продувке конфузорной решетки. Густота $\tau = 2$ и удлинение $\lambda = 0,72$. Состояние поверхностей лопаток и торцевых пластин было в ней обычным для всех наших опытов, т. е. лопатки имели сухую полированную поверхность, торцевые пластины — технически гладкий дюраль без забоин и рисок.

2. Проводились те же измерения на указанной решетке, но при измененной шероховатости торцевых стенок. Поверхность лопаток оставалась без изменений. Увеличенная шероховатость торцевых пластин создавалась

путем нанесения тонкого слоя солидола и припудривания чистым песком с достаточно однородным размером зерен.

3. Тем же способом создавалась увеличенная шероховатость поверхностей лопаток, а поверхность торцевых стенок оставалась гладкой как в первом опыте. Условия на входе в решетку во всех опытах поддерживались одинаковыми.

Результаты опытов приведены в таблице 1.

Таблица 1

Решетка	Γ_0 м ² /сек	I м ² /сек	$\Delta \bar{H}_{\text{по м.м. вод. ст.}}$
Исходная решетка	2,39	2,204	3,72
Опесоченные стенки	2,40	0,468	4,50
Опесоченные лопатки	2,37	0,201	27,30

Полученные результаты весьма примечательны. Прежде всего, из сравнения результатов первого и третьего опытов следует, что увеличение профильных потерь не оказывает существенного влияния на интенсивность вторичных течений. Небольшое уменьшение I в третьем опыте отвечает некоторому уменьшению Γ_0 вследствие сильно возросших вязких потерь. Таким образом, в этих двух опытах подтверждается ранее установленная закономерность.

Во втором опыте Γ_0 и $\Delta \bar{H}_{\text{по}}$ практически совпадают с аналогичными величинами в исходной решетке. Однако интенсивность I вихревого шнура оказалась в 2,3 раза больше, чем в исходной решетке. Чем же объяснить этот факт? Можно предположить, что на торцевой стенке во втором опыте при сохранении величины Γ_0 все же изменяется количественное выражение неравенства (25'). Попытаемся выяснить этот вопрос, используя следующие рассуждения.

В случае опесоченных торцевых стенок пограничный слой на них будет иметь в сходственных сечениях большую толщину по сравнению с чистыми стенками в первом опыте (исходная решетка). Примем закон распределения скоростей по толщине пограничного слоя в обоих случаях в таком виде:

$$\frac{v_1}{w} = \left(\frac{y}{\delta_1} \right)^{n_1} \text{ — исходная решетка;} \quad (32)$$

$$\frac{v_2}{w} = \left(\frac{y}{\delta_2} \right)^{n_2} \text{ — опесоченные стенки.} \quad (33)$$

При этом считаем, как оно и должно быть, что скорости на внешних границах пограничных слоев в обоих случаях одинаковы.

Неравенство (25') для первого и второго случая с учетом (32), (33) и (28) будет иметь вид

$$\left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|_1 > \rho \frac{\bar{v}_1^2}{r} = \rho \frac{w^2}{r} \frac{1}{\sqrt{(3n_1 + 1)^2}} \quad (34)$$

$$\left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|_2 > \rho \frac{\bar{v}_2^2}{r} = \rho \frac{w^2}{r} \frac{1}{\sqrt{(3n_2 + 1)^2}} \quad (35)$$

Показатель n в (32) и (33), являясь некоторой функцией числа Рейнольдса, в случае турбулентного пограничного слоя слабо изменяется в довольно широком диапазоне чисел $Re_\delta = \frac{w\delta}{\nu} \left(\frac{1}{7} \leq n \leq \frac{1}{10} \right)$ при $10^4 \leq Re_\delta \leq 10^7$.

Поэтому в данном случае можно принять $n_1 \approx n_2$. Тогда правые части в (34) и (35) будут равны.

Заметим, что полученный вывод практически не изменится, если даже не делать предположения о постоянстве показателя n . Действительно, пусть даже $n_1 = 1/7$, а $n_2 = 1/10$, то и при этом по (28) будет

$$\bar{v}_1 = 0,89w \text{ и } \bar{v}_2 = 0,916w,$$

т. е. осредненные скорости будут отличаться на 3%.

Левые части неравенства (34) и (35) также равны между собой. Это заключение можно сделать, не требуя выполнения условия постоянства давления по толщине пограничного слоя как в первом, так и во втором случаях.

Действительно, если даже в случае очень развитого пограничного слоя на опесоченных стенках давление внутри слоя будет отличаться от давления на его внешней границе, то в силу одинакового проявления этого эффекта в направлении радиуса кривизны r величина градиента $\frac{\partial p}{\partial r}$ остается и в этом случае равной соответствующему значению этой величины на внешней границе.

Таким образом, мы приходим к выводу о совпадении неравенств (34) и (35), а следовательно, и к заключению о неизменности во втором опыте количественной меры причины образования вторичного течения.

Это обстоятельство наводит на мысль, что интенсивность вихревых шнуров, образующихся в результате поперечного перетекания заторможенной жидкости и состоящих главным образом из частиц этой жидкости, зависит не просто от скорости перетекания, определяемой величиной неуравновешенного поперечного перепада давлений. По крайней мере, как показывают обсуждаемые опыты, большую роль играет количество притекающей в единицу времени заторможенной жидкости с торцевых стенок.

Действительно, в опыте с опесоченными стенками, в силу сохранения величины неравенства (25') скорости поперечного движения заторможенной жидкости по торцевым стенкам будут такими же, как и в исходной решетке. Расход же заторможенной жидкости будет больше, так как в этом случае имеется более толстый пограничный слой на торцевых стенках.

Чтобы еще раз проверить справедливость сделанного заключения, были проведены такие опыты:

1. Измерялись величины I , Γ_0 и ΔH_{no} в исходной решетке.
2. Во втором опыте одна из торцевых стенок этой же решетки выполнялась наклонной, так что высота лопатки на входе была $l_1 = 44$ мм и на выходе — $l_2 = 49$ мм.

Условия входа в обоих опытах были одинаковыми.

Результаты измерения приведены в таблице 2.

Таблица 2

Объект	Γ_0 м ² /сек	$\Delta \bar{H}_{\text{по вод. ст.}}$ мм	I м ² /сек
Исходная решетка	2,84	4,8	0,318
У прямой стенки	} 2,74	} 10,5	0,265
У наклонной стенки			0,570

Некоторое уменьшение интенсивности вихревого шнура у прямой стенки по сравнению с исходной решеткой связано, очевидно, с меньшей величиной Γ_0 во втором опыте.

Несмотря на это, интенсивность вихревого шнура у наклонной стенки значительно больше, чем в исходной решетке.

Угол наклона торцевой стенки составлял 3° , и межлопаточный канал оставался конфузурным с отношением площади входа к площади выхода $\frac{F_{\text{вх}}}{F_{\text{вых}}} = 2,475$. Поэтому на наклонной стенке не наблюдался развитый отрыв потока, а имело место только значительное утолщение пограничного слоя. На выходе из решетки толщина пограничного слоя у наклонной стенки составляла в среднем 6,5 мм, а у прямой стенки — только 3 мм.

Анализ причины образования вихревого шнура большей интенсивности у наклонной стенки затруднен из-за отрывного ее обтекания в общем случае.

В данном случае можно принять, что изменение продольного градиента давлений на наклонной стенке приводит только к утолщению пограничного слоя в сходственных сечениях по сравнению с прямой стенкой. Используя те же рассуждения, что и при анализе опыта с опесоченными стенками, приходим к заключению о совпадении количественного выражения неравенства (25') на обеих торцевых стенках.

Следовательно, и в данном опыте обнаруживается зависимость интенсивности вихревого шнура от толщины пограничного слоя на торцевой стенке.

Влияние продольного градиента давлений на рост толщины пограничного слоя на стенках межлопаточного канала особенно сказывается в диффузорных решетках. Поэтому при одной и той же величине Γ_0 в конфузурной и диффузорной решетках, т. е. при одинаковой мере проявления причины образования вторичных течений, в последней следует ожидать большую их интенсивность.

Для проверки этого предположения были проведены опыты на диффузорной решетке. Для сравнения принята конфузурная решетка того же профиля с одинаковой густотой $\tau=2$ и удлинением лопаток $\lambda=2,5$.

Результаты измерения представлены в таблице 3.

Таблица 3

Решетка	Γ_0 м ² /сек	$\Delta \bar{H}_{\text{по вод. ст.}}$ мм	I м ² /сек
Конфузурная	2,40	4,2	0,204
Диффузорная	1,78	20,0	1,136

Полученные результаты свидетельствуют еще раз о той большой роли, которую играют условия формирования и состояния пограничного слоя на торцевых стенках при организации вихревых особенностей в потоке у концов лопаток.

В свете полученных опытных фактов представляется такая схема установления расчетных зависимостей для определения интенсивности внутриканальных вихревых шнуров.

Неуравновешенный перепад давлений на торцевой стенке (30)

$$\Delta p_n = \int_{сп}^{кор} \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|_n dr = B \int_{сп}^{кор} \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| dr \quad (30'')$$

определяет осредненную скорость поперечного перетекания заторможенной жидкости по соотношению

$$u = \varphi \sqrt{\frac{2\Delta p_n}{\rho}}, \quad (36)$$

где φ — коэффициент необратимой потери неуравновешенного перепада давлений на торцевой стенке.

Как показывают наблюдения в опытах [9], ядро вихревого шнура состоит из частиц перетекающей с торцевых стенок заторможенной жидкости.

Используя закон сохранения момента количества движения, можно получить связь между интенсивностью вихревого шнура и параметрами движения заторможенной жидкости по торцевой стенке.

Момент количества движения в ядре вихревого шнура выражается уравнением

$$L = \frac{\rho I^2}{16\pi^2}, \quad (37)$$

где ρ — плотность жидкости, I — интенсивность шнура. Момент количества движения заторможенной жидкости можно записать в таком виде:

$$L^1 = \rho \delta u^2 k^2 \delta = k^2 \rho \delta^2 u^2, \quad (38)$$

где δ — толщина пограничного слоя,

$k^2 \delta$ — плечо момента, пропорциональное толщине пограничного слоя,

k^2 — коэффициент пропорциональности.

Приравнявая (37) и (38), получаем

$$I = 4\pi k \delta u. \quad (39)$$

Оценка интенсивности вихревых шнуров по формуле (39) с использованием экспериментальных данных о входящих в уравнение величинах дает значения I , близкие полученным непосредственными измерениями. Это свидетельствует о состоятельности высказанных соображений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лукасова Е. А. Исследование концевых потерь в турбинных решетках. Труды ЦКТИ, в. 27, 1954.
2. Дейч М. Е. К вопросу о концевых потерях в направляющих каналах паровых турбин. «Советское котлотурбостроение» № 6, 1945.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. III, ч. 2, ГТТИ, 1953.
4. Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. ОНТИ НКТП СССР, 1936.
5. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. ГТТИ, 1949.
6. Carter A. D. S. Three dimensional flow theories for axial compressors and turbines. Proc. Inst. Mech. Engrs. 159, № 62 (1954).
7. Squire H. B. and Winter K. G. The secondary flow in a cascade of airfoils in a nonuniform stream. JAS, 18, № 4 (1951).
8. Herzig H. Z. and Hansen A. G. Visualisation studies of secondary flows with applications to turbomachines. Transactions of the ASME, 77, № 3 (1955).